UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

ESCUELA DE POSGRADO

UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y FORMALES

“UN PRINCIPIO DEL MÁXIMO PARA LA ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI EN VARIEDADES RIEMANNIANAS”

Tesis presentada por la bachiller:

LUZ MARLENI MAYTA CHUA

Para optar el Grado Académico de Maestra en Ciencias: Matemáticas, con mención en Modelación Matemática

Asesor: Dr. Richard Mamani Troncoso

AREQUIPA – PERÚ

2019

“UN PRINCIPIO DEL MÁXIMO PARA LA ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI EN VARIEDADES RIEMANNIANAS”

Tesis presentada por :

Bach. Luz Marleni Mayta Chua

JURADO DICTAMINADOR:

- **Dr. Julio Valencia Guevara** …..……………….….………….
  (Presidente)

- **Dra. Claudia Luque Justo** …...……………………….…….

- **Dr. Richard Mamani Troncoso** …..……………….…….……….
  (Asesor)

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por darme conocimiento y vida para seguir creciendo en todos los aspectos de mi vida, también agradezco a mi Madre por ser mi soporte y mi mayor motivación por cada día ser mejor y un agradecimiento muy especial al Dr. Richard Mamani Troncoso quien fue un guía, un maestro y un amigo en todo el proceso del desarrollo de esta Tesis. Muchas gracias a todos, mi familia, amigos los que directa e indirectamente fueron parte de todo este proceso y a mí querida universidad la UNSA.

Resumen

En este trabajo, presentamos una formulación y desarrollo del Principio del Máximo para ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades Riemannianas completas que son uniformemente localmente convexas y tienen radio de inyectividad positivo, obtenidos por Azagra, Daniel; Ferrera, Juan; López - Mesas, Fernando (2006). Este resultado tiene una participación fundamental en la demostración de la existencia y unicidad de las soluciones de viscosidad de ecuaciones de Hamilton-Jacobi.

Palabras claves: Variedades Riemannianas uniformemente mesetables, Principio variacional de Deville-Godefroy-Zizler, subdiferenciabilidad y superdiferenciabilidad, ecuaciones de Hamilton-Jacobi, Principio del máximo.

Abstract

In this work, we present a formulation and development of the Principle of Maximum for Hamilton-Jacobi equations in complete Riemannian manifolds that are uniformly locally convex and have positive injectivity radius, obtained by Azagra, Daniel; Ferrera, Juan; López - Mesas, Fernando (2006). This result has a fundamental role in demonstrating the existence and uniqueness of the viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations.

Keywords: Uniformly bumpable Riemannian manifold, Variational Principle of Deville-Godefroy-Zizler, Subdifferentiability and Superdifferentiability, Hamilton-Jacobi equations, Maximum principle.

Índice general

Introducción

En este trabajo, siguiendo la línea de estudio de Azagra, Daniel; Ferrera, Juan; López - Mesas, Fernando (2006) nos proponemos establecer un principio del máximo para subsoluciones y supersoluciones de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi de la forma:

$$\begin{cases} u_t + F(t, d_x u) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

donde $u_0 : M \to \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua y acotada, M es una variedad Riemanniana y $F : [0, \infty) \times T^*M \to \mathbb{R}$ es una función intrínsecamente uniformemente continua.

Como sabemos existe una gran cantidad de ejemplos de ecuaciones de Hamilton-Jacobi que no siempre admiten soluciones clásicas, incluso en el caso más simple, donde $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces fue necesario debilitar la noción de solución a la noción de solución débil, también conocidas como soluciones de viscosidad, que existen bajo hipótesis muy generales. En ese sentido, una referencia la encontramos en Barles, G (1994) y Deville,Robert (1999), en donde se ilustra una extensa lista acerca de soluciones de viscosidad para ecuaciones de Hamilton-Jacobi en $\mathbb{R}^n$ o en espacios de Banach. Ahora bien, uno de los primeros trabajos en estudiar soluciones de viscosidad, para ecuaciones de Hamiton-Jacobi definidas en variedades Riemannianas fue hecho por Azagra, Daniel; Ferrera, Juan; López - Mesas, Fernando (2005).

Inicialmente, introduciremos algunos conceptos básicos sobre variedades Riemannianas que serán utilizadas a lo largo de este trabajo, principalmente enfocándonos en los conceptos de transporte paralelo, flujo geodésico, aplicación exponencial, convexidad fuerte y convexidad local. Siendo así, dada una curva $\gamma : I \to M$, consideremos los números $t_0, t_1 \in I$ y un vector $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, entonces es sabido que existe un único campo vectorial paralelo V_t a lo largo de γ tal que $V_{t_0} = V_0$, y una aplicación entre los espacios tangentes $T_{\gamma(t_0)}M$ y $T_{\gamma(t_1)}M$, definida por $V_0 \to V_{t_1}$, la cual es una isometría lineal. Si γ es una geodésica minimizante con $x = \gamma_{t_0}$ y $y = \gamma_{t_1}$, podemos definir la aplicación $L_{xy} : T_xM \to T_yM$ como el transporte paralelo de T_xM a T_yM a lo largo de γ. Así, el transporte paralelo nos permitirá definir una medida y/o diferencia entre los vectores que pertenecen a espacios tangentes (o fibras del fibrado tangente) distintos. Además, si γ es una geodésica minimizante que une los puntos $x, y \in M$, y si L_{xy} es el transporte paralelo a lo largo de γ, entonces para cualquier par de vectores $v \in T_xM$ y $w \in T_yM$, podemos definir de manera natural la distancia entre v y w como el número $\|v - L_{yx}(w)\|_x = \|w - L_{xy}(v)\|_y$ (notar que L_{xy} es una isometría lineal entre los dos espacios tangentes correspondientes, con inversa L_{yx}). Puesto que los espacios T_xM y T_x^*M son isométricos a través de la aplicación $v \to \langle v, \cdot \rangle$, entonces esto nos permite utilizar la misma correspondencia para medir distancia entre formas lineales $\zeta \in T_x^*M$ y $\eta \in T_y^*M$; pero en diferentes espacios cotangentes del fibrado cotangente T_x^*M.

Así mismo, estableceremos el concepto de variedad Riemanniana uniformemente mesetable, como aquella variedad para la cual existen dos números $R > 1$ y $r > 0$ tales que para cada $p \in M$, y cada $\delta \in (0, r)$, existe una función $b : M \to \langle 0, 1]$ tal que $b(x) = 0$, si $d(x, p) \geq \delta, b(p) = 1$ y $\sup_{x \in M} \|db(x)\|_x \leq R/\delta$. Por ejemplo, las variedades compactas o aquellas que tienen radios de inyectividad y convexidad estrictamente positivos, son situaciones naturales de variedades uniformemente mesetables. De hecho, para el caso de variedades Riemannianas uniformemente mesetables en general no existe una descripción consistente acerca de su estructura, puesto que no está muy claro si toda variedad Riemanniana es uniformemente mesetable. Sin embargo, a pesar de eso, para las variedades uniformemente mesetables se establecerá a lo largo de este trabajo un cierto principio variacional suave, que se traduce en lo siguiente: si M es una variedad Riemanniana completa uniformemente mesetable y $F : M \to \langle -\infty, +\infty]$ es una función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente, con $F \not\cong +\infty$, entonces para cada $\delta > 0$ existe una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ acotada de clase C^1, tal que $F - \varphi$ alcanza un mínimo fuerte en M ademas $\|\varphi\|_\infty = \sup_{p \in M} |\varphi(p)| < \delta$ y $\|d\varphi\|_\infty = \sup_{p \in M} \|d\varphi(p)\|_p < \delta$.

Por otro lado, desarrollaremos el estudio y análisis de la noción de subdiferencial para funciones $f : M \to \langle -\infty, +\infty]$ según Azagra, Daniel; Ferrera, Juan; López - Mesas, Fernando (2005), definidas sobre una variedad Riemanniana como una extensión de la noción de diferenciabilidad, en el sentido que esta es subdiferenciable en el punto p, cuando exista una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1, tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en el punto p. Así, entonces el conjunto de las derivadas $d\varphi(p)$ de todas las funciones φ será denominado subdiferencial de f en p, y será denotado por $D^- f(p)$. En forma similar, se define la noción de superdiferencial $D^+ f(p)$. Así mismo, a lo largo de este trabajo de tesis bajo ciertas condiciones, formularemos la equivalencia entre la diferenciabilidad de una determinada función en un punto dado, y las nociones de funciones subdiferenciables, superdiferenciables simultáneamente, en el mencionado punto. Seguidamente, estudiaremos la relación que existe entre la convexidad y la noción de subdiferenciabilidad de funciones en variedades Riemannianas. Así mismo, verificaremos que la convexidad de una función definida en una variedad Riemanniana provee y/o implica la subdiferenciabilidad en todos sus puntos; así como, la diferenciabilidad en un subconjunto denso. Además se establecerá una propiedad sobre estabilidad para subdiferenciales (de manera similar se puede establecer la estabilidad para superdiferenciales) la cual jugará un rol importante en la aplicación del cálculo subdiferencial direccionado al estudio de las ecuaciones de Hamilton–Jacobi, pero en variedades Riemannianas.

Finalmente, los resultados desarrollados anteriormente serán aplicados a la formulación del principio del máximo para subsoluciones viscosas y supersoluciones viscosas de las ecuaciones de evolución de Hamilton-Jacobi, en variedades Riemannianas en el siguiente sentido:

Consideremos las ecuaciones estacionarias de Hamilton-Jacobi de primer orden

$$F(x, u(x), du(x)) = 0,$$

y de las ecuaciones de evolución de Hamilton-Jacobi de primer orden

$$F(t, x, u(x, t), du(t, x)) = 0,$$

Así mismo, algunos ejemplos de ecuaciones de Hamilton-Jacobi aparecen de manera natural en variedades Riemannianas véase tambien Madersen, Abraham (1989). Ahora bien, no está demás indicar que en una etapa inicial del trabajo de tesis desarrollaremos algunos aspectos del cálculo subdiferencial y establecemos algunas de las versiones del principio variacional suave para funciones definidas en variedades Riemannianas de dimensión finita o infinita; las cuales nos permitirán establecer el principio del máximo para la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi de la forma:

$$\begin{cases} u_t + F(t, d_x u) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \qquad (1)$$

donde $u_0 : M \to \mathbb{R}$, es una condición inicial acotada y uniformemente continua, M una variedad Riemanniana y $F : [0, \infty\rangle \times T^*M \to \mathbb{R}$ es un Hamiltoniano uniformemente continuo. Siendo así, con estas precisiones indicadas, podemos obtener un principio del máximo para las mencionadas ecuaciones de Hamilton-Jacobi a través del siguiente teorema

Teorema 0.1 *Sean M una variedad Riemanniana completa, uniformemente convexa con radio de inyectividad estrictamente positivo, y $u_0, v_0 : M \to \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas, acotadas y $F : [0, \infty\rangle \times T^*M \to \mathbb{R}$ una función intrínsecamente uniformemente continua. Si u es una subsolución de viscosidad acotada de (1) y v es una supersolución* *de viscosidad acotada de (1), entonces* $\sup_{[0,\infty\rangle\times M}(u-v) \leq \sup_M(u_0-v_0)$.

No está demás indicar que como una situación particular de este teorema podemos deducir un resultado referido a la unicidad de soluciones viscosas; es decir si u, v son soluciones de viscosidad de (1), entonces $u = v$.

Siendo así, el desarrollo del presente trabajo de tesis está distribuido a lo largo de cuatro capítulos y de la siguiente forma:

En el capítulo 1, presentamos algunos conocimientos básicos y necesarios sobre variedades riemannianas y recordamos algunos conceptos esenciales de métricas, conexiones, campos paralelos, geodésicas, aplicación exponencial, variedades Riemannianas completas, etc; en particular hacemos referencia focalizada a las geodésicas y a las geodésicas minimales que corresponden a los caminos sobre variedades Riemannianas con los cuales trabajaremos. Por otro lado, recordamos la definición de variedad Riemanniana localmente convexa, radio de convexidad, radio de inyectividad así como algunos teoremas, fundamentales en geometría Riemanniana como el teorema de Hopf-Rinow que esta referida a variedades Riemannianas completas, conexas finito-dimensionales, en donde dos puntos cualesquiera de una variedad Riemanniana completa M, pueden ser conectados por al menos una geodésica minimal y el teorema del valor medio, que tambien está referida a la siguiente afirmación: sean M, N variedades riemannianas, y $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Si f tiene derivada acotada, es decir $\|df(x)\|_x \leq C$ para todo $x \in M$, entonces f es $C-Lipschitz$, esto es $d_N(f(x), f(y)) \leq k d_M(x, y)$, los cuales juegan un rol fundamental en el desarrollo del teorema central presentado en este trabajo de tesis.

En el capítulo 2, enunciaremos algunos principios variacionales como: el principio variacional de Ekeland, el de Borwein-Preiss, y el de Deville-Godefroy-Zizler. Así mismo, introduciremos el concepto de variedad Riemanniana uniformemente mesetable, así como presentamos una formulación y desarrollo del principio variacional suave sobre variedades Riemannianas que es una extensión del principio variacional suave de Deville-Godefroy-Zizler a variedades Riemannianas uniformemente mesetables.

En el capítulo 3, estudiaremos las nociones del cálculo subdiferencial en variedades Riemannianas. Tambien daremos algunas propiedades de la subdiferencial como la regla de la cadena y de la suma. Finalmente presentaremos un demostración detallada del Teorema de Un Principio de Minimización Perturbada para la diferencia de dos funciones que nos dice que dada M una variedad Riemanniana completa uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad $i(M) > r > 0$, sean $u, v : M \to \mathbb{R}$ dos funciones, u acotada y semicontinua superiormente y v acotada y semicontinua inferiormente, entonces para cada $\epsilon > 0$, existen $x_0, y_0 \in M, \zeta \in D^+u(x_0)$ y $\eta \in D^-v(y_0)$ tales que, $d(x_0, y_0) < \epsilon$, $\|\zeta - L_{y_0x_0}(\eta)\|_{x_0} < \epsilon, v(z) - u(z) \geq v(y_0) - u(x_0) - \epsilon$ para cada $z \in M$, cuya prueba será una consecuencia del principio variacional suave desarrollado en el capítulo 2.

En el capítulo 4, presentaremos el concepto de soluciones de viscosidad de ecuaciones de Hamilton-Jacobi, así como un Teorema Principio del Máximo para ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades Riemannianas, y para su demostración haremos uso de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores.

Capítulo 1

NOCIONES BÁSICAS SOBRE VARIEDADES RIEMANNIANAS

Nuestro punto de partida en este capítulo, será una variedad de Banach en la cual introduciremos en cada punto una manera de medir longitudes de vectores tangentes, nociones y resultados en variedades Riemannianas que se habrán de tener en cuenta para entender los siguientes capítulos.

Vamos a considerar campos vectoriales, conexiones, transporte paralelo, convexidad y demás.

1.1. Variedades de Banach

Definición 1.1 *Sea M un espacio topológico y X un espacio de Banach. Un atlas de clase C^k para M modelada en X es una familia de pares $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ con las siguientes propiedades:*

1. $\{U_\alpha\}_\alpha$ es una cobertura abierta para M, esto es $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = M$

2. φ_α es un homeomorfismo de U_α sobre un subconjunto abierto de X

3. Para todo par de índices α, β tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, la aplicación de transición

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un difeomorfismo de clase C^k.

Cada aplicación φ es llamada una carta para una vecindad de M.

Definición 1.2 *Si $X = \mathbb{R}^n$ en la definición anterior. Diremos que M es una variedad diferenciable.*

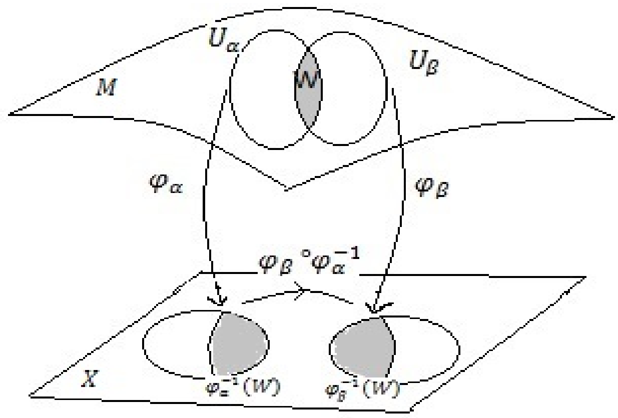

Figura 1.1: Variedad de Banach

Definición 1.3 *Un espacio topológico M con un atlas de clase C^k modelado sobre un espacio de Banach X es llamada una* ***variedad de Banach*** *de clase C^k modelada sobre X.*

Definición 1.4 *Sea M una variedad de Banach de clase C^l modelada sobre un espacio de Banach X. Diremos que una función $f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable (de clase C^k, $k < l$) en un punto $x \in M$ si existe una carta (U, φ) de una vecindad de x tal que*

$$f \circ \varphi^{-1} : \widetilde{U} = \varphi(U) \subset X \to \mathbb{R}$$

es una función diferenciable(de clase C^k).

Definición 1.5 *Sea M una variedad de Banach de clase C^l $(1 \leq l \leq +\infty)$. Una aplicación $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ de clase C^r es llamada una curva de clase C^r en M.*

Sea γ una curva en M, tal que para $t = 0$, $\gamma(0) = x \in M$ y sea $C^1(M)_x$ el conjunto de funciones de M que son de clase C^1 en x, esto es

$$C^1(M)_x = \left\{ f : M \to \mathbb{R} : f \text{ es de clase } C^1 \text{ en } x \right\}.$$

Ahora daremos la definición de vector tangente.

Definición 1.6 *Un* ***vector tangente*** *a la curva γ en $t = 0$ es la función $\gamma\prime(0) : C^1(M)_x \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\gamma\prime(0) f = (f \circ \gamma)\prime(0), \ \textit{para } f \in C^1(M)_x.$$

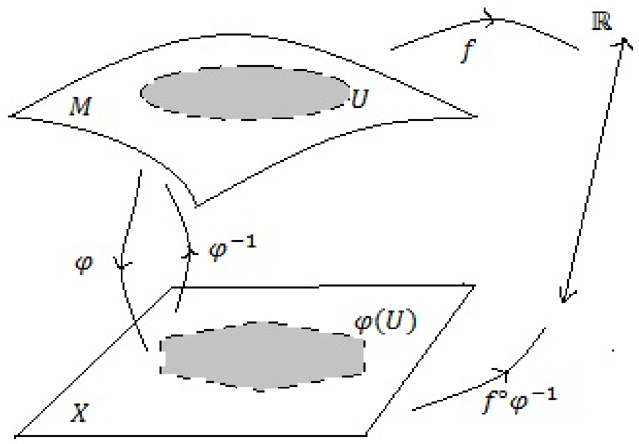

Figura 1.2: Función diferenciable

Definición 1.7 *Un vector tangente en x es un vector tangente en $t = 0$ de alguna curva $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ con $\gamma(0) = x$.*

Definición 1.8 *El conjunto de todos los vectores tangentes a M en x es llamado* ***espacio tangente*** *de M en x y es denotado por T_xM.*

Definición 1.9 *El conjunto*

$$TM = \underset{x\in M}{\cup} T_xM = \{(x, v) : x \in M \ y \ v \in T_xM\}$$

es llamado ***fibrado tangente*** *de M.*

1.2. Métrica Riemanniana

Una métrica Riemanniana (o estructura Riemanniana) en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto p de M un producto interno $\langle \ , \rangle_p$ (una forma bilineal simetrica, positiva definida) en el espacio tangente T_pM, que varía diferenciablemente en el siguiente sentido: Sea $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ un sistema de coordenadas locales en torno de p, con $x(x_1, x_2, ..., x_n) = x(q) = p \in x(U)$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = dx_p(0, ..., 1, ..., 0)$ y $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ la base del plano tangente T_pM asociada al sistema de coordenadas x, entonces $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_p = g_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)$ son funciones diferenciables en U.

Las funciones $g_{ij}(= g_{ji})$ son llamadas expresiones de la métrica Riemanniana en el sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$. Es claro que esta definición no depende del sistema de coordenadas.

Definición 1.10 ***(Variedad Riemanniana).*** *Una variedad diferenciable con una métrica Riemanniana es llamada una variedad Riemanniana.*

Un ejemplo trivial de variedad Riemanniana es $M = \mathbb{R}^n$ con $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i = (0, ..., 1, ..,0)$. La métrica estará dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $\mathbb{R}^n$ es llamado espacio euclidiano de dimensión n y la geometría Riemanniana de este espacio es la geometría métrica euclidiana.

Definición 1.11 *Sea M una variedad Riemanniana y $f : M \to \mathbb{R}$ una funcion diferenciable en $p \in M$, la norma de la diferencial $df(p) \in T_p^*M$ en el punto p se define por*

$$\|df(p)\|_p = \sup \left\{ df(p)(v) : v \in T_pM, \|v\|_p < 1 \right\}.$$

Dado que $(T_pM, \|.\|_p)$ es un espacio de Hilbert, tenemos una isométria lineal que identifica este espacio y su dual $(T_p^*M, \|.\|_p)$ mediante la aplicación $T_pM \ni x \to f_x \in T_p^*M$, donde $f_x(y) = \langle x, y \rangle$ para todo $y \in T_pM$.

Para definir la distancia entre dos puntos de la variedad, necesitamos introducir el concepto de longitud de caminos.

Definición 1.12 *Sea M una variedad Riemanniana y $\gamma : [a, b] \to M$ un camino de clase C^1, definimos su longitud por*

$$L(\gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt}(s) \right\|_{\gamma(s)} ds.$$

Esta longitud depende solamente de la imagen de $\gamma [a, b]$, y no de como se mueven los puntos $\gamma(t)$. De forma más concreta, si $h : [0, 1] \to [a, b]$ es una función continua y monótona, entonces $L(\gamma \circ h) = L(\gamma)$. Diremos que un camino γ es una parametrización por la longitud de arco, cuando $\gamma : [0, T] \to M$ satisface $\left\| \frac{d\gamma}{dt}(s) \right\|_{\gamma(s)} = 1$ para todo s, y en este caso tenemos que:

$$L(\gamma \mid_{[0,T]}) = \int_0^r \left\| \frac{d\gamma}{dt}(s) \right\|_{\gamma(s)} ds = r$$

para cada $r \in [0, T]$.

Para dos puntos $p, q \in M$, definimos la distancia d entre p y q como

$$d(p, q) = \text{ínf} \left\{ L(\gamma) : \gamma \text{ es un camino de clase } C^1 \text{ que une } p \text{ y } q \text{ en } M \right\}$$

cuando p y q están en la misma componente conexa de M (denominada g-distancia en M) la cual define la misma topología que la dada en M. Para esta métrica definimos la bola cerrada de centro p y radio $r > 0$ como

$$B_g(p,r) = \{q \in M : d(p,q) \leq r\}.$$

1.3. Conexión y campos paralelos

Como trabajaremos con campos vectoriales en una variedad, recordaremos su definición.

Definición 1.13 *Un campo vectorial X en una variedad diferenciable es una aplicación de M en el fibrado tangente TM, tal que $X(p) \in T_pM$. El campo es diferenciable si la aplicación $X : M \to TM$ es diferenciable. Si* $\dim M < \infty$, *esto ocurre si y solo si $X(f)(p) \doteqdot df(p)(X(p))$ es diferenciable para todo f diferenciable.*

Denotamos el espacio de campos vectoriales diferenciables en M por $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathcal{D}(M)$ el conjunto de funciones reales de clase C^∞ definidas en M.

Definición 1.14 *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Un corchete de Lie de X, Y es un campo vectorial $[.,.] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definido por*

$$[X,Y](f) = XY(f) - YX(f).$$

Ahora vamos a definir lo que se entiende por conexión en una variedad diferenciable.

Definición 1.15 *Una conexión afin en una variedad diferenciable M es una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ que satisface las siguientes propiedades*
i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$
ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_Y Z.$
iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$
Donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

La siguiente proposición nos dara una idea mas clara de la estructura Riemanniana de la conexión afin.

Proposición 1.1 *Sea M una variedad diferenciable con una conexión ∇. Entonces existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial V a lo largo de una curva diferenciable $c : I \to M$ otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de c, denominada derivada covariante de V a lo largo de c, tal que:*
a) $\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *donde* W *es un campo de vectores a lo largo de* c *y* f *es una función diferenciable en* I.

c) Si V *es inducido por un campo de vectores* $Y \in \mathfrak{X}(M)$, *tal que* $V(t) = Y(c(t))$, *entonces* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Prueba. Vease (Carmo 1988, p.51). ∎

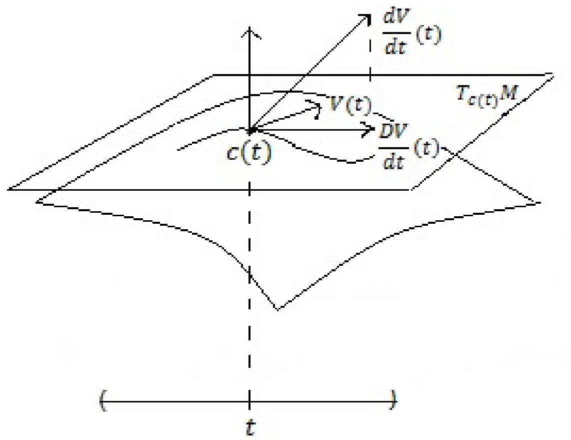

Figura 1.3: Derivada covariante

Observación 1.1 *La proposición anterior nos muestra que una conexión en* M *da origen a una derivada bien definida de campos de vectores a lo largo de curvas. Por lo tanto la noción de conexión permanece como la manera de derivar vectores a lo largo de curvas, en particular, es posible hablar de aceleración en una curva de* M.

Ahora daremos la definición de derivada covariante.

Definición 1.16 *El campo diferenciable* $\frac{DV}{dt}$ *es llamado derivada covariante de* V *a lo largo de* c.

Observación 1.2 *La derivada covariante en función de los símbolos de* $Christoffel$, *esta dada por*

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right\}$$

Notemos que $\frac{DV}{dt}$ *difiere de la derivada usual en el espacio euclidiano por los términos que envuelven los símbolos de* $Christoffel$.

Para el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, *tenemos que los* $\Gamma_{ij}^m = 0$ *por lo que la derivada covariante coincide con la derivada usual.*

Ahora daremos una definición de paralelismo.

Definición 1.17 *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afin ∇. Un campo vectorial V a lo largo de una curva $\gamma : I \to M$ es un campo paralelo cuando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Proposición 1.2 *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afin ∇. Sea $\gamma : I \to M$ una curva diferenciable en M,con t_0 y t_1 en I.*

(i) Para cada $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ existe un único campo de vectores paralelo V a lo largo de γ tal que $V(t_0) = V_0$. ($V(t)$ es llamado transporte paralelo de $V(t_0)$ a lo largo de γ)

(ii) La aplicación

$$P_{t_0,\gamma}^{t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$$

definida por

$$P_{t_0,\gamma}^{t_1}(V_0) = V(t_1),$$

donde V es el transporte paralelo de V_0 a lo largo de γ, y es una isometria lineal.

Prueba. Vease (Carmo 1988, p. 52) ■

Denotaremos por $L_{x,y}$ al transporte paralelo que equivale a $P_{t_0,\gamma}^{t_1}$ donde γ es la geodésica minimal que une $\gamma(t_0) = x$ con $\gamma(t_1) = y$.

A continuación daremos la definición de compatibilidad de la conexión con una métrica Riemanniana.

Definición 1.18 *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afin ∇ y una métrica Riemanniana $\langle \ , \rangle$. La conexión es compatible con la métrica $\langle \ , \rangle$, cuando para toda curva diferenciable c y para dos campos paralelos P y P' (arbitrarios) a lo largo de c, tenemos $\langle P, P' \rangle = cons\tan te$.*

Proposición 1.3 *Sea M una variedad Riemanniana. Una conexion ∇ en M es compatible con la métrica si y solo si para todo par V y W de campos de vectores a lo largo de una curva diferenciable $c : I \to M$ se tiene*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Prueba. Vease (Carmo 1988, p. 53). ■

Corolario 1.1 *Una conexión ∇ en una variedad Riemanniana M es compatible con la métrica si y solo si*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Apartir de ahora, en una variedad Riemanniana M, trabajaremos con la conexión de Levi-Civita, que está caracterizada por el siguiente Teorema.

Teorema 1.1 *(Levi-Civita). Dada una variedad Riemanniana M, existe una única conexión afín ∇ en M satisfaciendo las condiciones:*

a) ∇ es simétrica.

b) ∇ es compatible con la métrica Riemanniana.

Prueba. Vease (Carmo 1988, p. 55). ■

En adelante ∇ denotara la conexión de Levi Civita con esta conexión podemos definir una derivación covariante y a partir de ella podremos diferenciar campos vectoriales en la variedad M.

1.4. Geodésicas y aplicación exponencial

Definición 1.19 *Una curva parametrizada $\gamma : I \to M$ es una geodésica en $t_0 \in I$ si $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt})(t_0) = 0$. Si γ es geodésica en t, para todo $t \in I$, entonces diremos que γ es una geodésica.*

Cualquier camino γ que une p y q en M y tal que $L(\gamma) = d(p,q)$ es una geodésica y se denomina geodésica minimal (o minimizante). En lo que sigue, si no se especifica lo contrario, supondremos que un camino geodésico está parametrizado por la longitud de arco..

Observación 1.3 *Sea γ una geodésica para todo $t \in I$, tenemos que $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt})(t) = 0$, entonces*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma(t)}{dt}, \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{dt}(\frac{d\gamma(t)}{dt}), \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{d\gamma(t)}{dt}, \frac{D}{dt}(\frac{d\gamma(t)}{dt}) \right\rangle \\
&= 2\left\langle \frac{D}{dt}(\frac{d\gamma(t)}{dt}), \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\rangle = 0
\end{aligned}$$

lo que significa que $\left\langle \frac{d\gamma(t)}{dt}, \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\rangle =$ constante. Entonces $\left|\frac{d\gamma(t)}{dt}\right| = c \neq 0$, para todo $t \in I$. Consideraremos geodésicas que no se reducen a un punto.

A partir de esto, la longitud de arco de t_0 a t, esta dada por :

$$S(t) = \int_{t_o}^{t} \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt = c(t - t_0),$$

luego toda geodésica tiene un parámetro proporcional a su longitud de arco. Cuando $c = 1$ y $\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = 1$, diremos que la geodésica γ está normalizada.

Teorema 1.2 ***(Teorema de Existencia y Unicidad de Geodésica).*** *Sea M una variedad Riemanniana. Entonces para cada $p \in M$ y $v \in T_pM$, y para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ conteniendo a t_0 y una geodésica $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma(t_0) = p$ y $\gamma'(t_0) = v$.*

Denotaremos la geodésica $\gamma(t)$ de M en el instante $t = 0$ que pasa por p con velocidad v por $\gamma(t, p, v)$.

Es posible aumentar o disminuir la velocidad de una geodésica disminuyendo o aumentando su intervalo de definición. Esto lo veremos en el siguiente lema.

Lema 1.1 ***(Homogenidad de una geodésica).*** *Si la geodésica $\gamma(t, q, v)$, esta definida en el intervalo $(-\delta, \delta)$, entonces la geodésica $\gamma(t, q, av)$, $a \in \mathbb{R}$, $0 < a$, está definida en el intervalo $\left(\frac{-\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right)$ y*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Prueba. Definamos $h : (\frac{-\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \to M$ una curva dada por $h(t) = \gamma(at, q, v)$. Entonces $h(0) = \gamma(0, q, v) = q$ y $h'(0) = \gamma'(at, q, v).a \mid_{t=0} = \gamma'(0, q, v).a = av$.

Ademas, como $h'(t) = a\gamma'(at, q, v)$,

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{dh}{dt}\right) = \nabla_{h'(t)}h'(t) = a^2\nabla_{\gamma'(at,q,v)}\gamma'(at, q, v) = 0,$$

donde, en la primera igualdad, ampliando $h'(t)$ a una vecindad de $h(t)$ en M. Por lo tanto, h es una geodésica que en el instante $t = 0$ pasa por q con velocidad av. Por unicidad

$$h(t) = \gamma(at, q, v) = \gamma(t, q, av). \quad \blacksquare$$

El Teorema anterior y el lema de homogenidad, nos permiten tomar un intervalo de definición de una geodésica uniformemente grande en una vecindad de p. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.4 *Sea M una variedad Riemanniana. Entonces para cada $p \in M$ existe una vecindad V de $p \in M$, $\varepsilon > 0$ y una aplicación diferenciable $\gamma : (-2, 2) \times V \to M$, $V = \{(q, v);\ q \in V,\ v \in T_qM,\ \|v\| < \varepsilon\}$, tales que la curva $t \to \gamma(t, q, v)$, $t \in (-2, 2)$, es la única geodésica de M que en el instante $t = 0$ pasa por q con velocidad v, para cada $q \in V$ y cada $v \in T_qM$ con $\|v\| < \varepsilon$.*

Definición 1.20 *Sea M un variedad Riemanniana. Dado $p \in M$, $V \subset TM$ un abierto dado por la proposición anterior. Entonces la aplicación* $\exp : V \to M$ *dado por*

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma(\|v\|, q, \frac{v}{\|v\|}), \qquad (q, v) \in V$$

es llamada la aplicación exponencial en U.

A continuación enunciaremos un resultado de la función exponencial.

Teorema 1.3 *Sea M una variedad Riemanniana. Consideremos la derivación de Levi-Civita. Entonces para cada $x \in M$ existe un número $r > 0$ tal que la aplicación $\exp_x :$ $B(0_x, r) \subset T_xM \to M$ está definida y verifica:*

1. $\exp_x ; B(0_x, \delta) \to B(x, \delta)$ *es un difeomorfismo bi-Lipschitz C^∞, para todo $\delta \in (0, r]$.*

2. $\exp_x$ *transforma segmentos que pasan por 0_x y están contenidos en $B(0_x, r)$ en geodésicas en $B_M(x, r)$.*

3. $d \exp_x(0_x) = id_{TxM}$.

En particular, teniendo en consideración la condición 3, para cada $C > 1$, el radio r puede ser elegido suficientemente pequeño para que las aplicaciones $\exp_x : B(0_x, r) \to B(x, r)$ y $\exp_x^{-1} : B_M(x, r) \to B(0_x, r)$ sean C-Lipschitz.

Lema 1.2 *Sea M una variedad Riemanniana conexa. Dado $p \in M$, sea $B(p, \varepsilon)$ una bola geodésica centrada en p y radio ε. Considere la función $d : B(p, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d(x) = d_M(p, x) = \left\| \exp_p^{-1}(x) \right\|_p .$$

Tenemos que:

(i) d es diferenciable en $B(p, \varepsilon) \setminus \{p\}$.

(ii) $\|\nabla d(x)\|_x = 1$ y $\nabla d(x)$ es ortogonal a las esferas geodésicas centradas en p y que apuntan afuera.

Prueba. (i) Dado que $d(x) = \left\| \exp_p^{-1}(x) \right\|_p = \sqrt{\left\langle \exp_p^{-1}(x), \exp_p^{-1}(x) \right\rangle_p}$ y $\exp_p$ es un difeomorfismo en el dominio de d, tenemos que d es diferenciable en $B(p, \varepsilon) \setminus \{p\}$.

(ii) Como las esferas geodésicas son curvas de nivel de la función d, es valida la ortogonalidad.

Dado $x \in B(p, \varepsilon)$, con $d(x_0) = t_0$, sea $\gamma : [0, t_0] \to M$ una geodésica parametrizada por longitud de arco tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(t_0) = x$. Entonces

$$\langle \nabla d(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle_x = \frac{d}{dt}(d \circ \gamma)(t)|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(t)|_{t=t_0} = 1.$$

Luego

$$\|\nabla d(\gamma(t_0))\|_x = \|\nabla d(\gamma(t_0))\|_x \, \|\gamma'(t_0)\|_x = |\langle \nabla d(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle_x| = 1$$

Portanto

$$\|\nabla d(x)\|_x = 1. \ \blacksquare$$

1.5. Variedades completas y el teorema de Hopf-Rinow

La traslación paralela nos da, de forma natural, la diferencia de las medidas de longitud entre vectores (o formas) que están en diferentes espacios tangentes (o en duales de espacios tangentes, esto es, en diferentes fibras del fibrado cotangente) siempre que exista una geodésica minimizante que une sus proyecciones en M.

Definición 1.21 *Sea γ una geodésica minimizante que conecta dos puntos x, y de M, de forma que $\gamma(t_0) = x$, $\gamma(t_1) = y$. Sean los vectores $V \in T_xM$, $W \in T_yM$, entonces podemos definir la distancia entre V y W como el número*

$$\left\|W - P_{t_0,\gamma}^{t_1}(V)\right\|_y = \left\|V - P_{t_1,\gamma}^{t_0}(W)\right\|_x .$$

Esta igualdad es correcta pues $P_{t_0}^{t_1}$ es una isometría lineal entre dos espacios tangentes, con inversa $P_{t_1}^{t_0}$. Del hecho de que los espacios T_x^*M y T_xM son isométricamente identificables por la fórmula $v = \langle v, . \rangle$, podemos, utilizar el mismo método seguido en espacios tangentes, para medir distancias entre formas $\xi \in T_x^*M$ y $\eta \in T_y^*M$ que se encuentran en diferentes fibras del fibrado cotangente.

Teorema 1.4 ***(Hopf-Rinow).*** *Si M es una variedad finito-dimensional Riemanniana completa y conexa, entonces existe al menos una geodésica minimal que conecta dos puntos cualesquiera de M.*

Prueba. Vease (Carmo 1928, p.147). $\blacksquare$

Ahora, sabemos que el teorema de Hopf-Rinow falla cuando M es infinito-dimensional, pero Ekeland probó (utilizando su celebre principio variacional) que, en infinitas dimensiones, el conjunto de puntos que pueden ser unidos por una geodésica minimal en M es denso (Ekeland, I. 1978).

Teorema 1.5 ***(Ekeland).*** *Si M es una variedad Riemanniana de dimensión infinita, completa y conexa, entonces para cualquier punto p dado, el conjunto*

$$\{q \in M : \textit{ que pueden ser unidos a } p \textit{ por una geodésica minimal}\}$$

es residual en M.

Prueba. Vease (Ekeland 1978, p. 287). $\blacksquare$

Definición 1.22 *Una variedad Riemanniana M, se dice que es geodésicamente completa cuando el intervalo maximal de definición de cada geodésica en M es $\mathbb{R}$.*

Esto es equivalente a decir que para cualquier $x \in M$, la aplicación exponencial $\exp_x$ está definida en todo el espacio tangente T_xM (aunque, no obstante, $\exp_x$ no es necesariamente inyectiva en T_xM). Sabemos tambien que toda variedad Riemanniana completa es geodésicamente completa. De hecho se tiene el siguiente resultado

Proposición 1.5 *Sea M una variedad Riemanniana. Considérese las siguientes condiciones:*

1. M es completa (con respecto a la g-distancia).

2. M es geodésicamente completa.

3. Para cualquier $x \in M$, la aplicación exponencial $\exp_x$ está definida en todo T_xM.

4. Existe algún $x \in M$ tal que la aplicación $\exp_x$ está definida en todo T_xM.

Entonces (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4), y si suponemos que M es finito dimensional, entonces todas las condiciones son equivalentes a cinco:

5. Cada conjunto de M cerrado y d_g-acotado es compacto.

Prueba. Vease (Lang 1999, p. 224). ■

Ahora estableceremos algunos resultados acerca de la convexidad en variedades Riemannianas.

Definición 1.23 *Diremos que un subconjunto U de una variedad Riemanniana es convexo si para cualquier $x, y \in U$, existe una única geodésica que une x e y, tal que la longitud de la geodésica es igual a $dist(x, y)$, y que está contenida en U.*

Cada variedad variedad Riemanniana es localmente convexa, en el siguiente sentido.

Teorema 1.6 ***(Whitehead).*** *Sea M una variedad Riemanniana. para cada $x \in M$, existe $c > 0$ tal que para todo $0 < r < c$, la bola abierta $B(x, r) = \exp_x B(0_x, r)$ es convexa.*

Este teorema justifica la necesidad de introducir la noción de variedad uniformemente localmente convexa, que será utilizada de manera relevante cuando desarrollemos los principios variacionales y las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades Riemannianas.

Prueba. Vease (Klingenberg 1982, p. 220). ■

Definición 1.24 *Diremos que una variedad Riemanniana M es* ***uniformemente localmente convexa*** *cuando existe $c > 0$ tal que para cada $x \in M$ y cada r con $0 < r < c$ la bola $B(x, r) = \exp_x B(0_x, r)$ es convexa.*

Definición 1.25 *Sea M en una variedad Riemanniana. Definimos el* ***radio de convexidad*** *$c(M, x)$, de $x \in M$ por*

$$c(M, x) = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} : \text{ la bola geodésica } B(x, r) \text{ es convexa} \right\}.$$

Y el radio de convexidad $c(M)$ de M definido por

$$c(M) := \text{ínf}\{c(M, x) : x \in M\}.$$

Observación 1.4 *De las definiciones anteriores podemos concluir que una variedad Riemanniana M es uniformemente localmente convexa cuando, y solo cuando, $c(M) > 0$. La nocion de radio de inyectividad de una variedad Riemanniana, tambien, jugara un papel relevante en el estudio de los principios variacionales en las ecuaciones de Hamilton-Jacobi.*

Definición 1.26 *Sea M una variedad Riemanniana. Definimos el* ***radio de inyectividad*** *$i(M, x)$de $x \in M$ por*

$$i(M, x) = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} : \ exp : B(0_x, r) \to M \text{ es un difeomorfismo } C^\infty \right\}.$$

Y el radio de inyectividad $i(M)$ de M es definido por

$$i(M) = \text{ínf}\, \{i(M, x) : x \in M\}.$$

Observación 1.5 *Para una variedad finito-dimensional M, se prueba que $i(M, x)$ equivale al supremo de los $r > 0$ tales que $\exp_x$ es inyectiva cuando la restringimos a la bola $B(0_x, r)$, véase sin embargo, para variedades infinito dimensionales no está claro si esta afirmación es siempre verdadera. (Azagra, Ferrera y Lopez 2005).*

1.6. Desigualdad de valor medio

Definición 1.27 *Sean M, N variedades Riemannianas y $K \geq 0$. Una función $f : M \to N$ es llamada k-Lipschitz si*

$$d_N(f(x), f(y)) \leq k d_M(x, y), \text{ para todo } x \in M.$$

Teorema 1.7 *(Desigualdad de valor medio). Sean M, N variedades Riemannianas, y $f: M \to N$ una aplicación diferenciable. Si f tiene derivada acotada, es decir $\|f'(x)\|_x \leq C$ para todo $x \in M$, entonces f es $C-$Lipschitz.*

Prueba. Sean p, $q \in M$. Por la definición de $d_M(p,q)$ y dado $\varepsilon > 0$, tenemos que existe una curva $\gamma : [0,T] \to M$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(T) = q$ tal que

$$L(\gamma) \leq d_M(p,q) + \frac{\varepsilon}{C},$$

consideremos la curva $\beta : [0,T] \to N$ definida por $\beta(t) = f \circ \alpha(t)$, tenemos que β es de clase C^1 y une los puntos $f(p)$ a $f(q)$ en N. Por la definición de $d_N(f(p), f(q))$, tenemos que

$$\begin{aligned} d_N(f(p), f(q)) &\leq L(\beta) = \int_0^T \|\beta'(t)\|_{\beta(t)}\, dt = \int_0^T \|f'(\gamma(t))(\gamma'(t))\|_{f(\gamma(t))}\, dt \\ &\leq C \int_0^T \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt \leq CL(\gamma) \\ &\leq C\left(d_M(p,q) + \frac{\varepsilon}{C}\right) = Cd_M(p,q) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto

$$d_N(f(p), f(q)) \leq Cd_M(p,q). \ \blacksquare$$

Teorema 1.8 *Sean M, N variedades Riemannianas y $f : M \to N$ una aplicación K-Lipschitz, entonces $\|df(x)\|_x \leq K$ para todo $x \in M$.*

Prueba. Vamos a considerar el caso $N = \mathbb{R}$. Suponemos que existe $x_0 \in M$ tal que $\|df_{x_0}\|_{x_0} = \sup\left\{df_{x_0}(v) : v \in T_{x_0}M, \|v_0\|_{x_0} \leq 1\right\} > k$. Seguidamente de la definición de supremo tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $v_0 \in T_{x_0}M$ con $\|v_0\|_{x_0} = 1$ tal que:

$$k - \varepsilon < \|df_{x_0}\|_{x_0} - \varepsilon < df_{x_0}(v_0).$$

Así, como ε es arbitrario tenemos que $df_{x_0}(v_0) > k$. Ahora consideremos la geodésica $\gamma(t) = \exp_{x_0}(tv_0)$ definida por $|t| \leq r_0$ con $r_0 > 0$ suficientemente pequeño. Definamos la función $F : [-r_0, r_0] \to \mathbb{R}$ por

$$F(t) = (f \circ \gamma)(t).$$

Notemos que $F'(0) = df_{x_0}(v_0) > k$. Por la definición de $F'(0)$, existe $\delta_0 \in (0, r_0)$ tal que:

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} > k, \text{ si } |t| \leq \delta_0.$$

Dado que $x_0 = \gamma(0)$, tomando $y_0 = \gamma(\delta_0)$, tenemos que

$$|f(x_0) - f(\delta_0)| > F(\delta_0) - F(0) > k\delta_0 = kd_M(x_0, y_0),$$

lo que contradice el hecho que f es k-Lipschitz.

Ahora consideremos el caso general, es decir cuando N es una variedad Riemanniana. Suponemos que $\|df_{x_0}\|_{x_0} > k$ para algun $x_0 \in M$, entonces existe algun $\zeta_0 \in T^*_{f(x_0)}N$ y $v_0 \in T_{x_0}M$ con $\|v_0\|_{x_0} = 1 = \|\zeta_0\|_{x_0}$ y tal que $k < \|df_{x_0}\|_{x_0} = \zeta_0(df_{x_0}(v_0))$. Tomemos $s_0 > 0$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de tal forma que

$$\exp^{-1}_{f(x_0)} : B(f(x_0), s_0) \to B(s_0, 0)$$

es un difeomorfismo $(1+\varepsilon)$ $-$Lipschitz y $k < (1+\varepsilon)\, k < \|df_{x_0}\|_{x_0}$. Ademas, escogemos $r_0 > 0$ suficientemente pequeño tal que $f(B(x_0, r_0)) \subset B(f(x_0), s_0)$.

Ahora considerando la función $g : B(x_0, r_0) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = \zeta_0(\exp^{-1}_{f(x_0)}(f(x))).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &= \left|\zeta_0(\exp^{-1}_{f(x_0)}(f(x))) - \zeta_0(\exp^{-1}_{f(x_0)}(f(y)))\right| \\
&= \left|\zeta_0(\exp^{-1}_{f(x_0)}(f(x))) - \exp^{-1}_{f(x_0)}(f(y)))\right| \\
&\leq \left|\exp^{-1}_{f(x_0)}(f(x))) - \exp^{-1}_{f(x_0)}(f(y))\right| \\
&\leq (1+\varepsilon)\, d_M(f(x), f(y)) \\
&\leq (1+\varepsilon)\, d_M(x, y).
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $d(\exp^{-1}_{f(x_0)})_{f(x_0)}$ es la identidad, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
dg_{x_0}(v_0) &= \zeta_0(d(\exp^{-1}_{f(x_0)}(f(x_0))df_{x_0}(v_0)) \\
&= \zeta_0(df_{x_0}(v_0)) \\
&= \|df_{x_0}\|_{x_0} \\
&> (1+\varepsilon)\, k,
\end{aligned}$$

y esto contradice el resultado probado para el caso $N = \mathbb{R}$. ■

Capítulo 2

UN PRINCIPIO VARIACIONAL SUAVE EN VARIEDADES RIEMANNIANAS

En este capítulo, estableceremos el concepto de variedad Riemanniana uniformemente mesetable y para estas variedades Riemannianas uniformemente mesetables, definiremos un cierto principio variacional suave, como se sabe las funciones de clase C^∞ de X en $\mathbb{R}$ que no tienen ningún punto crítico son densas en el espacio de las funciones $C(X, \mathbb{R})$, por lo que, para una función regular en una variedad Riemanniana infinito-dimensional se carece de expectativas de encontrar algún punto crítico, estas ideas se desarrollan en el trabajo de Azagra, Daniel y Deville Robert (1997). Es así, que para buscar una solución a este problema se recurrio a resultados que nos garantizaban la existencia de puntos casi críticos, es decir puntos en los que la derivada era muy pequeña, casi cero. Los principios variacionales, también llamados principios de minimización perturbada, son los que nos proporcionan dichos puntos aproximados.

Así mismo, daremos las definiciones de función propia, función meseta en un espacio de Banach, función semicontinua inferiormente y también enunciaremos algunos principios variacionales como el principio variacional de Ekeland que fue el primero en aparecer y aún es uno de los más potentes que sigue generando diversas aplicaciones en el campo de la optimización.

Definición 2.1 *Sea $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función que toma valores en el conjunto de los números reales extendidos, la función f es llamada **función propia** cuando*

$$Dom(f) = \{x \in M : f(x) < \infty\} \neq \phi$$

Definición 2.2 *Sea X un espacio de Banach. Una **función meseta** es una función*

$f : X \to \mathbb{R}$ tal que:

(i) $f \neq 0$,

(ii) $supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$ es acotada.

Definición 2.3 *Diremos que una función $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es **semicontinua inferiormente** (s.c.i.) en x_0 si para cada $\varepsilon > 0$, existe una vencidad U_{x_0} de x_0, tal que $U_{x_0} \subset M$ y $f(x_0) < f(x) + \varepsilon$, para todo $x \in U_{x_0}$. Así mismo, diremos que f es **semicontinua superiormente** (s.c.s.) en x_0 si $-f$ es s.c.i. en x_0.*

Para una demostración de las siguientes proposiciones vease (Lima, 2007).

Proposición 2.1 *Sea $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es s.c.i.*
2. *Dado $x \in M$, se cumple $\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x)$.*
3. *Dado $x \in M$ y $(x_n)_{n \in N}$ una sucesión, tal que $(x_n) \to x$, se cumple $\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq f(x)$.*

Proposición 2.2 *Si f_1 y f_2 son funciones s.c.i., entonces $f_1 + f_2$ es s.c.i.*

Una vez introducida las nociones de funciones propias, semicontinuidad inferior, semicontinuidad superior y la caracterización de semicontinuidad inferior; es necesario las nociones de mínimo fuerte para luego utilizarlos en la formulación variacional de los diversos principios de minimización.

Definición 2.4 *Sea M una variedad Riemanniana y $F : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función limitada inferiormente. Diremos que F alcanza un mínimo fuerte en $p \in M$ si:*

1. *$F(p) = \inf \{F(x) : x \in M\}$.*
2. *Dada una sucesión $(p_n)_{n \in N} \subset M$ tal que $F(p_n) \to F(p)$, entonces $d_M(p_n, p) \to 0$.*

2.1. Principios variacionales

Ahora enunciaremos algunos principios variacionales que seran necesarios para la formulación y desarrollo del principio del máximo para la ecuación Hamilton-Jacobi sobre variedades Riemannianas y para una demostración de los siguientes teoremas vease (Ekeland, I. 1979; Deville, Robert 1999).

Teorema 2.1 ***(Principio variacional de Ekeland).*** *Sea X un espacio métrico completo, y sea $f : X \to (\infty, +\infty]$ una función propia semicontinua inferiormente que está* *acotada inferiormente. Sean $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in X$ tales que $f(x_0) < \text{ínf}\{f(x) : x \in X\} + \varepsilon$. Entonces, para cada λ con $0 < \lambda < 1$, existe un punto $z \in Dom(f)$ tal que:*

i. $\lambda d(z, x_0) + f(z) \leq f(x_0)$

ii. $d(z, x_0) < \frac{\varepsilon}{\lambda}$

iii. $f(z) < \lambda d(x, z) + f(x)$ *para todo* $x \in X$ *tal que* $x \neq z$.

El principio variacional de Ekeland es el que se aplica a espacios métricos completos, los cuales son la mayor clase de espacios, este principio nos dice que dada una función semicontinua inferiormente definida en un espacio métrico completo con valores en $(\infty, +\infty]$ y un punto cercano a su infimo, entonces admite perturbaciones arbitrariamente pequeñas (por traslaciones de la norma) que hacen que dicho punto funcione como mínimo, teniendo en cuenta que estas funciones no alcanzan un mínimo.

Teorema 2.2 ***(Principio variacional de Borwein-Preiss).*** *Sean $(X, \|.\|)$ un espacio de Hilbert, $f : X \to (-\infty, +\infty]$ una función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente. Sea $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ tal que $f(x_0) < \text{ínf} f + \varepsilon$. Entonces para cada $\lambda > 0$, existen $z \in B(x_0, \lambda)$, $y \in B(z, \lambda)$, tales que $f(y) \leq f(x_0)$ y la función*

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \|x - z\|^2$$

alcanza un mínimo fuerte en y.

El principio de Borwein-Preiss es válido en los espacios de Banach con normas diferenciables, este principio perturba la función inicial con un múltiplo pequeño del cuadrado de la distancia a un determinado punto z, función que es relativamente plana en las proximidades del punto y donde la perturbación alcanza su mínimo, y que a su vez, como la norma del espacio de Banach es diferenciable (salvo en 0), entonces la función φ tambien será diferenciable, algo que no sucede en los conos de Ekeland.

Teorema 2.3 ***(Principio variacional de Deville-Godefroy-Zizler).*** *Sea X un espacio de Banach con una función meseta de clase C^1y Lipschitz, y sea $F : X \to (-\infty, +\infty]$ una función propia, semicontinua inferiormente. Entonces, para cada $\delta > 0$, existe una función φ de clase C^1 con derivada acotada y un punto $x_0 \in X$ tales que:*

1. $F - \varphi$ *alcanza un mínimo en* X *en el punto* x_0

2. $\|\varphi\|_\infty < \delta$, *y* $\|\varphi'\|_\infty < \delta$.

Donde, $\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X\}$ *y* $\|\varphi'\|_\infty = \sup\{\|\varphi'(x)\| : x \in X\}$.

El principio variacional de Deville-Godefroy-Zizler a diferencia del principio variacional de Ekeland, permite construir una teoría de subdiferenciabilidad, pues la función con la que perturba es una función regular arbitrariamente pequeña y con constante de Lipschitz también pequeña, la única desventaja de este principio es que no se puede aplicar de forma directa en las variedades Riemannianas. Es necesario, imponer ciertas condiciones a la variedad. La siguiente definición de variedad Riemanniana uniformemente mesetable apunta en esa dirección.

2.2. Variedades Riemannianas uniformemente mesetables

En esta sección introduciremos la noción de variedades Riemannianas uniformemente mesetables que serán de mucha utilidad para el desarrollo de un principio variacional suave en variedades Riemannianas, que servira de soporte en el desarrollo de un principio del máximo para las ecuaciones de Hamilton-Jacobi.

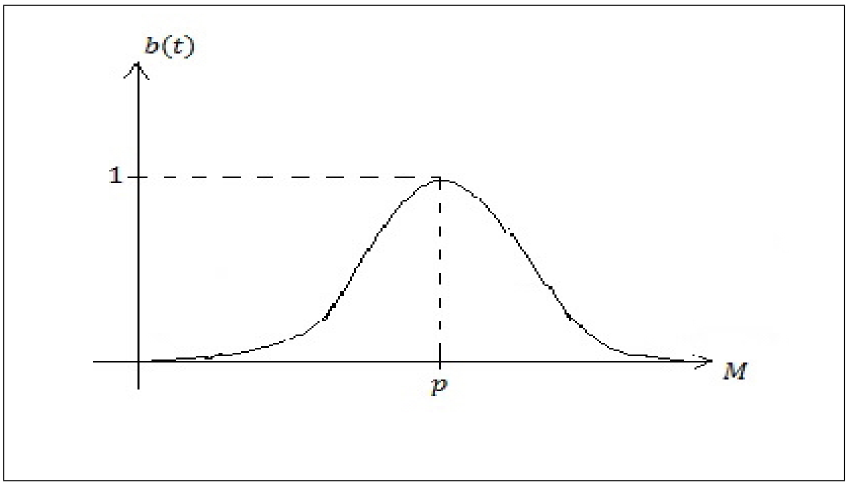

Figura 2.1: Variedad uniformemente mesetable

Definición 2.5 *Diremos que una variedad M es uniformemente mesetable si existen $R > 1$ (posiblemente grande) y $r > 0$ (pequeño) tales que para todo $p \in M$ y $\delta \in (0, r)$ existe una función $b : M \to [0, 1]$ de clase C^1 tal que:*

1. $b(p) = 1$

2. $b(x) = 0$, *si* $d(x, p) \geq \delta$

3. $\sup_{x \in M} \|db(x)\|_x \leq \frac{R}{\delta}$.

2.3. Principio variacional suave en variedades

El siguiente teorema es una extención del Principio Variacional Suave de Deville-Godefroy-Zizler para variedades Riemannianas uniformemente mesetables, que juegan un rol importante en futuras demostraciones que presentaremos en los siguientes capítulos.

Teorema 2.4 ***(Principio variacional suave en variedades).*** *Sea M una variedad Riemanniana completa que sea uniformemente mesetable, y sea $F : M \to (-\infty, +\infty]$ una función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente, $F \not\equiv +\infty$, entonces para cada $\delta > 0$ existe una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y acotada, tal que:*

1. *$F - \varphi$ alcanza un mínimo fuerte en M,*
2. *$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X\} < \delta$, y*
   $\|d\varphi\|_\infty = \sup\{\|d\varphi(x)\| : x \in X\} < \delta$.

La demostración de este teorema será una consecuencia de los siguientes lemas que serán formulados a continuación.

Lema 2.1 *Sea M un espacio métrico completo, y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ el espacio de Banach de las funciones reales, continuas y acotadas en M C_bM que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$\|\varphi\|_Y \geq \|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X\}$ para cada $\varphi \in Y$.*
2. *Existen números reales $C > 1$, $r > 0$, tales que para cada $p \in M$, $\varepsilon > 0$ y $\delta \in (0, r)$, existe una función $b \in Y$ tal que $b(p) = \varepsilon$, $\|b\|_Y \leq C\varepsilon(1 + \frac{1}{\delta})$, y $b(x) = 0$ si $x \notin B(p, \delta)$.*

Sea $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, s. c. i. y acotada inferiormente, entonces el conjunto

$$G = \{\varphi \in Y : f + \varphi \text{ alcanza un mínimo fuerte en } M\}$$

contiene un subconjunto G_δ denso en Y; es decir, una intersección numerable de conjuntos abiertos en Y.

Prueba. Dado $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq \frac{1}{r}$, luego para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$ consideremos un conjunto

$$U_n = \left\{\varphi \in Y : \text{ existe } x_0 \in M \text{ tal que } (f + \varphi)(x_0) < \inf\left\{ (f + \varphi)(x) : x \in M \setminus B(x_0, \frac{1}{n})\right\}\right\}$$

Probaremos, en primer lugar, que U_n es un subconjunto abierto de Y.

- En efecto, U_n es abierto. Dado $\varphi \in U_n$. Entonces por la definición de U_n existe $x_0 \in M$ tal que

$$(f + \varphi)(x_0) < \inf\left\{ (f + \varphi)(x) : x \in M \setminus B(x_0, \frac{1}{n})\right\} = \alpha.$$

Definamos

$$\rho = \frac{1}{3}(\alpha - \ (f+\varphi)(x_0)).$$

Así, $B(\varphi,\rho) \subset U_n$.De hecho dado $\varphi_0 \in B(\varphi,\rho)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{ínf}\left\{\ (f+\varphi_0)(x) : x \in M\backslash B(x_0,\frac{1}{n})\right\} &> \text{ínf}\left\{\ (f+\varphi)(x) : x \in M\backslash B(x_0,\frac{1}{n})\right\} \\
&\quad + \text{ínf}\left\{\ (\varphi_0-\varphi)(x) : x \in M\backslash B(x_0,\frac{1}{n})\right\} \\
&\geq \alpha + \text{ínf}\{\ (\varphi_0-\varphi)(x) : x \in M\} \\
&= \alpha - \sup\{\ (\varphi-\varphi_0)(x) : x \in M\} \\
&= \alpha - \|\varphi_0-\varphi\|_\infty \geq \alpha - \|\varphi_0-\varphi\|_Y \\
&> \alpha - \frac{1}{3}(\alpha - (f+\varphi_0)(x)) \\
&= \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}(f+\varphi_0)(x) \\
&> (f+\varphi_0).
\end{aligned}$$

De ahí que, $\varphi_0 \in U_n$. Por lo tanto, U_n es abierto.

- Ahora demostraremos que, U_n es denso en Y. Para eso, tomemos $\varphi \in Y$ y $\varepsilon > 0$, entonces $f+\varphi$ está acotada inferiormente y existe $x_0 \in M$ tal que

$$(f+\varphi)(x_0) < \text{ínf}\{\ (f+\varphi)(x) : x \in M\} + \varepsilon.$$

Sea $\delta = \frac{1}{n} < r$, luego por la condición (2) de la hipótesis, podemos tomar una función $b \in Y$ tal que $b(x_0) = \varepsilon$, $\|b\|_Y \leq C(n+1)\varepsilon$, y $b(x) = 0$ para $x \notin B(x_0,\delta)$, entonces

$$\begin{aligned}
(f+\varphi)(x_0) &< \text{ínf}\{\ (f+\varphi)(x) : x \in M\} + b(x_0) \\
(f+\varphi)(x_0) - b(x_0) &< \text{ínf}\{\ (f+\varphi)(x) : x \in M\}.
\end{aligned}$$

Si colocamos $h = -b$, tenemos que

$$(f+\varphi+h)(x_0) < \text{ínf}\{\ (f+\varphi)(x) : x \in M\} \leq \text{ínf}\left\{\ (f+\varphi)(x) : x \in M\backslash B(x_0,\frac{1}{n})\right\}.$$

Por lo tanto,

$$\text{ínf}\left\{\ (f+\varphi)(x) : x \in M\backslash B(x_0,\frac{1}{n})\right\} = \text{ínf}\left\{\ (f+\varphi+h)(x) : x \in M\backslash B(x_0,\frac{1}{n})\right\}.$$

A partir de las dos últimas relaciones, obtenemos:

$$(f+\varphi+h)(x_0) < \text{ínf}\left\{ (f+\varphi+h)(x) : x \in M\backslash B(x_0, \frac{1}{n})\right\},$$

lo que implica que $\varphi + h \in U_n$.

Por otro lado, tenemos que $\|\varphi - (\varphi + h)\|_Y = \|-h\|_Y = \|b\|_Y \leq C(n+1)\varepsilon$, entonces concluimos que U_n es denso en Y.

Ahora consideremos el siguiente conjunto:

$$U = \cap_{n=N}^{\infty} U_n$$

- U es un subconjunto G_δ denso en Y.

Este resultado, es una consecuencia del teorema de Baire.

- U está contenido en G.

De hecho, debemos probar que, si $\varphi \in G$, entonces $f + \varphi$ alcanza un mínimo fuerte en M.

Así mismo, puesto que $\varphi \in U_n$, para cada $n \geq N$; existe $x_n \in M$ tal que

$$(f+\varphi)(x_n) < \text{ínf}\left\{ (f+\varphi)(x) : x \in M\backslash B(x_n, \frac{1}{n})\right\},$$

Además notemos que: si $k \geq n$, entonces $x_k \in B(x_n, \frac{1}{n})$. En efecto, si $x_k \notin B(x_n, \frac{1}{n})$, obtenemos que:

$$(f+\varphi)(x_n) < \text{ínf}\left\{ (f+\varphi)(x) : x \in M\backslash B(x_n, \frac{1}{n})\right\} \leq (f+\varphi)(x_k). \quad (2.1)$$

Por otro lado, se tiene que $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}$, lo cual implica que $x_n \notin B(x_k, \frac{1}{k})$; de ahí que

$$(f+\varphi)(x_k) < \text{ínf}\left\{ (f+\varphi)(x) : x \in M\backslash B(x_k, \frac{1}{k})\right\} \leq (f+\varphi)(x_n),$$

lo cual es una contradicción a (2.1). Por lo tanto, $x_k \in B(x_n, \frac{1}{n})$ si $k \geq n$, y la sucesión $(x_n)_{n=N}^{\infty}$ es de Cauchy en M. Luego, dado que (M, d) es completa con la distancia riemanniana, entonces la sucesión $(x_n)_{n=N}^{\infty}$ converge para algún $x_0 \in M$.

Ahora, como f es s.c.i, se tiene que

$$\begin{aligned}(f+\varphi)(x_0) &\leq \liminf_n \ (f+\varphi)(x_n) \\ &\leq \liminf_n \left[\text{ínf}\left\{ (f+\varphi)(x) : x \in M\backslash B(x_n, \frac{1}{n})\right\}\right]. \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Luego, para $y \in M$, $y \neq x_0$, existe, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y \notin B(x_n, \frac{1}{n})$, para todo $n \geq n_0$. Es decir,

$$\text{ínf}\left\{ (f+\varphi)(x) : x \in M \backslash B(x_n, \frac{1}{n}) \right\} \leq (f+\varphi)(y), \text{ para } n \geq n_0. \qquad (2.3)$$

Así, a partir de (2.2) y (2.3), tenemos que:

$$\begin{aligned}(f+\varphi)(x_0) &\leq \text{lím inf}[\text{ínf}\left\{ (f+\varphi)(x) : x \in M \backslash B(x_n, \frac{1}{n}) \right\}] \\ &\leq (f+\varphi)(y).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f+\varphi$ alcanza un mínimo global en $x_0 \in M$.

Finalmente, probaremos que x_0 es un mínimo fuerte de $f+\varphi$. En efecto, supongamos que $(y_n)_{n\geq 1}$ es una suceción en M tal que

$$\lim_{n\to\infty} (f+\varphi)(y_n) = (f+\varphi)(x_0), \text{ y eso implica que } y_n \to x_0.$$

Suponemos lo contrario: $y_n \nrightarrow x_0$; entonces podemos asumir que $d(y_n, x_0) \geq \varepsilon$, para todo $n \geq 1$. Luego usando la desigualdad triangular, tenemos que

$$d(y_n, x_k) + d(x_k, x_0) \geq \varepsilon, \text{ para todo } n, k \geq 1.$$

De ahí que, apartir del hecho de que $x_n \to x_0$; existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(y_n, x_k) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \varepsilon \text{ para todo } n \geq 1 \text{ y } k \geq N,$$

siendo así, podemos tomar k suficientemente grande tal que $\frac{1}{k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y $k \geq N$, de modo que

$$d(y_n, x_k) \geq \frac{1}{k}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Pero, como $f+\varphi$ alcanza un mínimo global en $x_0 \in M$, tenemos que

$$(f+\varphi)(x_0) \leq (f+\varphi)(x_k) < \text{ínf}\left\{ (f+\varphi)(x) : x \in M \backslash B(x_k, \frac{1}{k}) \right\} \leq (f+\varphi)(y_n)$$

para todo $n \geq 1$. Lo cual es una contradicción al hecho que $\lim_{n\to\infty} (f+\varphi)(y_n) = (f+\varphi)(x_0)$.

Por lo tanto, G contiene un subconjunto G_δ denso en Y. ■

El siguiente resultado provee la completitud de la norma $\|.\|_Y$ definida sobre el espacio vectorial de funciones de clase C^1 y de lipschitz, apartir de la completitud de la variedad Riemanniana.

Lema 2.2 *Sea M una variedad R iemanniana completa, entonces el espacio vectorial de las funciones:*

$$Y = \left\{ \varphi : M \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ es de clase } C^1, \text{ acotada y lipschitz} \right\},$$

equipado con la norma $\|\varphi\|_Y = \text{máx}\left\{ \|\varphi\|_\infty, \|d\varphi\|_\infty \right\}$, *es un espacio de Banach.*

Prueba. Claramente podemos deducir que $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un espacio normado. Ahora veamos que $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es completo, y para eso tomamos una suceción de Cauchy $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Luego, a partir del hecho de que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas entre espacios métricos es una función continua, entonces existe $\varphi : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to 0.$$

Dado que T_x^*M es un espacio normado y completo para todo $x \in M$, tenemos que la sucesión $(d\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una función $\psi : M \to T^*M$ (sección del fibrado cotangente) definida por

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} d\varphi_n(x),$$

donde este límite está en T_x^*M para cada $x \in M$.

- Ahora veamos que la funcción obtenida anteriormente satisface $\psi = d\varphi$.

En efecto, dado $p \in M$, a partir del Teorema 1.3 tenemos que existe $r > 0$ (que depende de p) tal que la aplicación exponencial $\exp_p : B(0_p, r) \subset T_pM \to B(p, r)$ es un difeomorfismo y que las derivadas de $\exp_p$ y $\exp_p^{-1}$ son acotadas en $B(0_p, r)$ y $B(p, r)$ respectivamente.

Así mismo, consideremos las funciones $\widetilde{\varphi} : B(0, r) \to \mathbb{R}$ y $\widetilde{\varphi}_n : B(0, r) \to \mathbb{R}$, definidas por $\widetilde{\varphi}(z) = (\varphi \circ \exp_p)(z)$ y $\widetilde{\varphi}_n(z) = (\varphi_n \circ \exp_p)(z)$, respectivamente. Entonces, tenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\widetilde{\varphi}(h) - \widetilde{\varphi}(0) - \psi(p)(h)}{\|h\|_p} \right| &= \left| \frac{\widetilde{\varphi}(h) - \widetilde{\varphi}(0)}{\|h\|_p} - \psi(p)(\frac{h}{\|h\|_p}) \right| \\
&\leq \left| \frac{\widetilde{\varphi}(h) - \widetilde{\varphi}(0) - (\widetilde{\varphi}_n(h) - \widetilde{\varphi}_n(0))}{\|h\|_p} \right| \\
&\quad + \left| \frac{\widetilde{\varphi}_n(h) - \widetilde{\varphi}_n(0)}{\|h\|_p} - d\widetilde{\varphi}_n(0)(\frac{h}{\|h\|_p}) \right| \\
&\quad + \left| (d\widetilde{\varphi}_n(0) - \psi(p))(\frac{h}{\|h\|_p}) \right|. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Ahora,consideremos la expresión $\left|\frac{\widetilde{\varphi}(h)-\widetilde{\varphi}(0)-(\widetilde{\varphi}_n(h)-\widetilde{\varphi}_n(0))}{\|h\|_p}\right|$ dada por el primer sumando de la desigualdad (2.4), y aplicamos la desigualdad del Teorema del Valor Medio, para obtener:

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{\varphi_m}(h)-\widetilde{\varphi_m}(0)-(\widetilde{\varphi_n}(h)-\widetilde{\varphi_n}(0))\right| &= \left|(\widetilde{\varphi_m}-\widetilde{\varphi_n})(h)-(\widetilde{\varphi_m}-\widetilde{\varphi_n})(0)\right| \\ &\leq \sup_{x\in B(0_p,r)}\left\|d\widetilde{\varphi_m}(x)-d\widetilde{\varphi_n}(x)\right\|_p\|h\|_p \\ &\leq C\,\|d\varphi_m-d\varphi_n\|_\infty\,\|h\|_p\,. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Como $\left(d\widetilde{\varphi_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces dado $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que,

$$m,n\geq n_0,\ \text{tenemos que}\ \left\|d\widetilde{\varphi_m}-d\widetilde{\varphi_n}\right\|_\infty<\frac{\varepsilon}{3C}.$$

Luego a partir de la desigualdad (2.5), para $m,n\geq n_0$ tenemos que

$$\left|\widetilde{\varphi_m}(h)-\widetilde{\varphi_m}(0)-(\widetilde{\varphi_n}(h)-\widetilde{\varphi_n}(0))\right|<\frac{\varepsilon}{3C}\left(C\,\|h\|_p\right)<\frac{\varepsilon}{3}\,\|h\|_p\,.$$

Haciendo tender $m\to\infty$, obtenemos que:

$$\left|\widetilde{\varphi}(h)-\widetilde{\varphi}(0)-(\widetilde{\varphi_n}(h)-\widetilde{\varphi_n}(0))\right|<\frac{\varepsilon}{3}\,\|h\|_p\,,\ \text{cuando}\ n\geq n_0. \qquad (2.6)$$

Por otro lado, debido a (2.4), existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para $n\geq n_0$, tenemos

$$\left|(d\widetilde{\varphi_n}(0)-\psi(p))(\frac{h}{\|h\|_p})\right|=\left|(d\widetilde{\varphi_n}(p)-\psi(p))(\frac{h}{\|h\|_p})\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (2.7)$$

Ahora, si tomamos $n=n_0$ fijo y utilizando la diferenciabilidad de $\widetilde{\varphi_{n_0}}$, se tiene

$$\left|\frac{\widetilde{\varphi_{n_0}}(h)-\widetilde{\varphi_{n_0}}(0)}{\|h\|_p}-d\widetilde{\varphi_{n_0}}(0)(\frac{h}{\|h\|_p})\right|\to 0,\ \text{cuando}\ \|h\|_p\to 0.$$

Es decir, existe $\delta>0$ tal que

$$\left|\frac{\widetilde{\varphi_{n_0}}(h)-\widetilde{\varphi_{n_0}}(0)}{\|h\|_p}-d\widetilde{\varphi_{n_0}}(0)(\frac{h}{\|h\|_p})\right|<\frac{\varepsilon}{3},\ \text{siempre que}\ \|h\|_p<\delta. \quad (2.8)$$

Finalmente, una vez conseguida las estimaciones anteriores utilizamos las relaciones (2.5), (2.6), (2.7), (2.8), en (2.4) para $n=n_0$, y tenemos que:

$$\left|\frac{\widetilde{\varphi}(h)-\widetilde{\varphi}(0)-\psi(p)(h)}{\|h\|_p}\right|<\varepsilon,\ \text{siempre que}\ \|h\|_p<\delta,$$

de donde, $\widetilde{\varphi}$ es diferenciable en p, con $d\widetilde{\varphi}(0_p) = \psi(p)$. De donde, φ es diferenciable en p con $d\varphi(p) = \psi(p)$. Por lo tanto, $d\varphi = \psi$.

Así mismo, podemos verificar que:

- La función φ es Lipschitziana.

En efecto, como $(d\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $m, n \geq n_0$, se obtiene:

$$\|d\varphi_n - d\varphi_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Por otro lado, tenemos la siguiente relación

$$\|d\varphi_n(y) - d\varphi_m(y)\|_y \leq \sup_{x\in M} \|d\varphi_n(x) - d\varphi_m(x)\|_x = \|d\varphi_n - d\varphi_m\|_\infty,$$

para $m, n \geq n_0$. Lo cual implica

$$\|d\varphi_n(y) - d\varphi_m(y)\|_y \leq \varepsilon, \text{ para todo } y \in M.$$

De ahí que, haciendo tender $m \to \infty$, tenemos que

$$\|d\varphi_n(y) - d\varphi(y)\|_y < \varepsilon, \text{para } n \geq n_0, \text{ y para todo } y \in M.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|d\varphi(y) - d\varphi_n(y)\|_y = 0.$$

Por otro lado, usando la desigualdad triangular, tenemos que

$$\|d\varphi\|_\infty \leq \|d\varphi - d\varphi_n\|_\infty + \|d\varphi_n\|_\infty < \infty.$$

Finalmente, utilizando el Teorema 1.7 (desigualdad del Valor Medio), tenemos que φ es Lipschitziana.

Ahora, veremos que:

- $\psi = d\varphi$ es continua.

En efecto, dado cualquier $p \in M$, existe $r > 0$ tal que $\exp_p : B(0_p, r) \to B(p, r)$ y su inversa son difeomorfismos 2-Lipschitz.

Ahora definimos $\widetilde{\varphi} : B(0_p, r) \to \mathbb{R}$ por $\widetilde{\varphi}(y) = (\varphi \circ \exp_p)(y)$. Luego para verificar que $d\varphi$ es continua en p, es suficiente probar que $d\widetilde{\varphi}$ es continua en 0_p. Siendo así, aplicando la desigualdad del Teorema del valor medio se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left\|d\widetilde{\varphi}(x)-d\widetilde{\varphi}(0)\right\|_p &\leq \left\|d\widetilde{\varphi}(x)-d\widetilde{\varphi}_n(x)\right\|_p+\left\|d\widetilde{\varphi}_n(x)-d\widetilde{\varphi}_n(0)\right\|_p+\left\|d\widetilde{\varphi}_n(x)-d\widetilde{\varphi}(0)\right\|_p \\
&\leq 2\left\|d\varphi-d\varphi_n\right\|_\infty+\left\|d\widetilde{\varphi}_n(x)-d\widetilde{\varphi}_n(0)\right\|_p+2\left\|d\varphi-d\varphi_n\right\|_\infty \\
&= 4\left\|d\varphi-d\varphi_n\right\|_\infty+\left\|d\widetilde{\varphi}_n(x)-d\widetilde{\varphi}_n(0)\right\|_p \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in B(0_p, r) \subset T_pM$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|d\varphi(y)-d\varphi_n(y)\right\|_y = 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, se tiene que

$$\left\|d\varphi-d\varphi_n\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{2.10}$$

Ahora, fijando $n = n_0$, obtenemos:

$$\left\|d\varphi-d\varphi_{n_0}\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Así, apartir de (2.8), deducimos que $\widetilde{\varphi}_{n_0}$ es continua en 0_p. Luego existe $\delta \in (0, r)$ tal que

$$\left\|\tilde{\varphi_{n_0}}(x)-\tilde{\varphi_{n_0}}(0)\right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ siempre que } \|x\|_p < \delta. \tag{2.11}$$

De ahí que, utilizando (2.9), (2.10) y (2.11), tenemos que:

$$\left\|d\widetilde{\varphi}(x)-d\widetilde{\varphi}(0)\right\|_p \leq \varepsilon, \text{ siempre que } \|x\|_p < \delta.$$

Por lo tanto, $d\widetilde{\varphi}$ es continua en 0_p, y concluimos que Y es completo. ■

Finalmente para completar con los preliminares de la formulación y desarrollo del principio variacional suave en variedades Riemannianas estableceremos algunas relaciones y acotaciones de algunas funciones con sus derivadas, haciendo uso de la norma definida en el espacio de Banach.

Lema 2.3 *Sea M una variedad Riemanniana uniformemente mesetable (vea def. 2.5), entonces existen números $C > 1$ y $r > 0$ tales que para todo $p \in M$, $\varepsilon > 0$ y $\delta \in (0, r)$ existe una función $b : M \to [0, 1]$ de clase C^1 tal que:*

1. $b(p) = \varepsilon = \|b\|_\infty := \sup_{p\in M} |b(x)|$,

2. $\|db\|_\infty := \sup_{p\in M} \|db(x)\|_x \leq \frac{C\varepsilon}{\delta}$,

3. $b(x) = 0$ *si* $x \notin B(p, \delta)$.

En particular, se cumple que $\max\{\|b\|_\infty, \|db\|_\infty\} \leq C\varepsilon(1 + \frac{1}{\delta})$.

Prueba. Como M es una variedad uniformemente mesetable, entonces existen $C > 1$ y $r > 0$ de modo que, para $p \in M$ y $\delta \in (0, r)$, existe una función $\bar{b} : M \to [0, 1]$ de clase

C^1 tal que:

i. $\bar{b}(p) = 1$,

ii. $\bar{b}(x) = 0$ siempre que $d_M(x,p) \geq \delta$,

iii. $\sup_{x\in M} = \left\| d\bar{b}(x) \right\|_x \leq \frac{C}{\delta}$.

Ahora, sea $\varepsilon > 0$, y definamos la función $b : M \to [0,\varepsilon]$ por

$$b(x) = \varepsilon\bar{b}(x).$$

Notemos que esta función satisface las condiciones (1),(2) y (3) del Lema. ■

De aqui que, la demostración del principio variacional suave en variedades Riemannianas es una consecuencia de los lemas 2.1, 2.2 y 2.3.

Capítulo 3

NOCIONES DE SUBDIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES DEFINIDAS EN VARIEDADES RIEMANNIANAS

En este capítulo primeramente daremos algunas definiciones de la subdiferencial de viscocidad, que son conocidas ampliamente y utilizadas en la teoría de los espacios de Banach.

Definición 3.1 ***(Fréchet subdiferenciable)*** *Sea f una función real definida en un espacio de Banach X, se dice que f es Fréchet subdiferenciable (o subdiferenciable según Frechet) en un punto x,cuando existe $\zeta \in X^*$ tal que*

$$\liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle \zeta, h \rangle}{\|h\|} \geq 0.$$

En este caso, diremos $\zeta \in X^*$ es una subdiferencial de frechet de f en x

Definición 3.2 *ζ es una subdiferencial de viscosidad de f en X si existe una función $\varphi : X \stackrel{C^1}{\to} \mathbb{R}$ tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en x, y que $\zeta = \varphi'(x)$.*

Notemos que en los espacios de Banach X donde se tenga una función meseta de clase C^1, estas definiciones son equivalentes. De ahí que, en tales espacios, es posible definir que:

$$D^- f(x) = \left\{ \varphi'(x) : \varphi \in C^1(X, \mathbb{R}), \text{tal que } f - \varphi \text{ alcanza un mínimo local en } x \right\}.$$

De ahí que, esta noción de subdiferencial definida en espacios de Banach nos llevará a pensar en una extensión natural a variedades diferenciables modeladas sobre espacios de Banach.

Observación 3.1 *Cuando una función f es subdiferenciable en un punto, el conjunto:*

$$D^- f(x) = \left\{ \varphi'(x) : \varphi \in C^1(X, \mathbb{R}), \textit{tal que } f - \varphi \textit{ alcanza un mínimo local en } x \right\} \neq \emptyset.$$

3.1. Definición y propiedades básicas

A continuación definiremos la subdiferencial de una función f en $p \in M$, donde $\zeta = d\varphi(p) \in T_p^* M$.

Definición 3.3 *Sea M una variedad Riemanniana, y $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia. Diremos que f es subdiferenciable en el punto $p \in dom(f) = \{x \in M : f(x) < \infty\}$ cuando exista una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en el punto p. Definimos la subdiferencial de f en el punto p por el conjunto*

$$D^- f(p) = \left\{ d\varphi(p) \in T_p^* M : \varphi \in C^1(M, \mathbb{R}),\ f - \varphi \textit{ alcanza un mínimo local en el punto } p \right\},$$

que es un subconjunto de $T_p^* M$. En forma similar, se define la superdiferencial de f en p por:

$$D^+ f(p) = \left\{ d\varphi(p) \in T_p^* M : \varphi \in C^1(M, \mathbb{R}),\ f - \varphi \textit{ alcanza un máximo local en el punto } p \right\}.$$

Los elementos de la subdiferencial y superdiferencial en un punto son funciones lineales continuas definidas en el espacio tangente a la variedad en ese punto. Además cada uno de los elementos de esas subdiferenciales y superdiferenciales pueden ser dadas en términos de productos internos y de ahí que podemos asociarle una norma dada por la norma de operadores. Siendo así, para ser mas precisos, damos la siguiente definición.

Definición 3.4 *Para cualquier $\zeta \in D^- f(p) \cup D^+ f(p)$, definimos*

$$\|\zeta\| = \sup \left\{ |\zeta(h)| : h \in T_p M, \|h\|_p = 1 \right\}.$$

Observación 3.2 *1. Si f es subdiferenciable en p, entonces $-f$ es superdiferenciable en p y $-D^- f(p) = D^+(-f)(p)$.*

Como f es subdiferenciable en el punto $p \in M$, entonces existe una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en el punto p. De ahí que:

$$D^- f(p) = \left\{ d\varphi(p) \in T_p^* M : \varphi \in C^1(M, \mathbb{R}),\ f - \varphi \text{ alcanza un mínimo local en el punto } p \right\}.$$

Además $-(\ f - \varphi) = -f + \varphi$ alcanza un máximo local en el punto $p \in M$; luego $-f$ es superdiferenciable en este punto y

$$D^- f(p) \subset D^+ f(p).$$

En forma similar se tiene

$$D^+ f(p) \subset D^- f(p).$$

Claramente podemos visualizar que la determinación de la, subdiferenciabilidad o superdiferenciabilidad de una función es muy tediosa, por lo que es necesario tener una caracterización de está noción, la cual estara dada por el Teorema de caracterizaciones de la subdiferenciabilidad. Previamente enunciaremos unos resultados clásicos de topología sobre la separación de conjuntos a través de funciones y a su vez necesitaremos extender funciones localmente definidas a toda la variedad diferenciable, es por esto que tambien enunciaremos el Teorema de Tietze diferenciable, todos estos resultados nos ayudaran en la demostración del Teorema de caracterizaciones de la subdiferenciabilidad..

Lema 3.1 ***(Lema de Urysohn diferenciable)*** *Sean U, V dos subconjuntos no vacios, cerrados y disjuntos, de una variedad M de clase C^k. Entonces existe una función $f : M \to \mathbb{R}$ de clase C^k, tal que $0 \leq f \leq 1$, $f(U) = 0$ y $f(V) = 1$.*

Prueba. Vease (Lima 2007, p. 197). ■

Direccionado a la prueba en mención, el siguiente resultado es de mucha utilidad para verificar la última implicación.

Lema 3.2 *Sea $F : V \to (-\infty, \infty]$ una función definida en un abierto V de un espacio H de Hilbert y sea $x \in V$ tal que*

$$\liminf_{v \to 0} \frac{F(x+v) - F(x) - \langle \tau, v \rangle}{\|v\|} \geq 0$$

para algún $\tau \in H^*$, entonces existe una función $\psi : H \to \mathbb{R}$ de clase C^k tal que $F - \psi$ alcanza un mínimo local en x y $d\psi_x = \tau$

Prueba. Remplazando F por la función $v \to máx \{F(x+v) - F(x) - \langle \tau, v \rangle, -1\}$, sin perdida de generalidad podemos suponer que $x = 0$, $F(x) = 0$, F es acotada inferiormente en V, entonces el límite inferior del enunciado queda, ahora, como

$$\liminf_{v\to 0}\frac{F(v)}{\|v\|}\geq 0.$$

Luego, definimos la función $\rho:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ por

$$\rho(t)=\inf\left\{F(v):\|v\|\leq t\right\},$$

entonces $\rho(0)=0$ y ρ es no decreciente, pues si $t_1<t_2$, $\{F(v):\|v\|\leq t_1\}\subset\{F(v):\|v\|\leq t_2\}$ y de ahí que $f(t_1)\geq f(t_2)$, por tanto $\rho\leq 0$. Considerando la desigualdad anterior se obtiene,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\rho(t)}{t}=0. \tag{3.1}$$

Ahora, definimos, las funciones:

$$\rho_1(t)=\int_t^{et}\frac{\rho(s)}{s}ds \quad \text{y} \quad \rho_2(t)=\int_t^{et}\frac{\rho_1(s)}{s}ds,$$

entonces ρ_1 es continua, y ρ_2 es de clase C^1 en $(0,\infty)$; además, ρ_1 y ρ_2 son no decrecientes. De ahí, que no es difícil de ver que

$$\rho(e^2t)\leq\rho_1(et)\leq\rho_2(t)\leq\rho_1(t)\leq\rho(t)\leq 0,$$

lo cual junto con (3.1), implica que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\rho_2(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\rho_1(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\rho(t)}{t}=0. \tag{3.2}$$

Así, en estas condiciones, podemos definir la función $\psi:H\to\mathbb{R}$ por

$$\psi(z)=\rho_2(\|z\|),$$

con $\psi(0)=0$. Está claro que ψ es de clase C^1 en $H\setminus\{0\}$ y, que para todo $z\neq 0$,

$$d\psi(z)=\frac{\rho_1(e\|z\|)-\rho_1(\|z\|)}{\|z\|}d\|\cdot\|_z\,.$$

Considerando (3.2) y el hecho de que la norma es 1-Lipschitz, tenemos que $\lim_{v\to 0}\|d\psi(z)\|=0$, Lo que implica por el teorema del valor medio, que ψ es diferenciable en 0, con $d\psi(0)=0$, y $d\psi$ es continua. Entonces, ψ es de clase C^1 en H. Finalmente, tomando en consideración las propiedades de ρ, ρ_1 y ρ_2, es fácil ver que $(F-\psi)(z)\geq 0=F(0)=\psi(0)$

para todo $z \in H$. Por lo tanto, $F - \psi$ alcanza un mínimo en 0. ■

Teorema 3.1 ***(Teorema de Tietze diferenciable)*** *Sea U un subconjunto cerrado de una variedad diferenciable M de clase C^∞. Entonces toda aplicación $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^k $(k \leq r)$, puede ser extendidada a una aplicación $h : M \to \mathbb{R}$ de clase C^k, definida en toda la variedad.*

Prueba. La prueba puede ser consultada en (Lima 2007, p. 202) ■

A continuación enunciaremos el Teorema de caracterizaciones de la subdiferenciabilidad.

Teorema 3.2 ***(Caracterizaciones de la subdiferenciabilidad)*** *Sea $f : M \to (-\infty, \infty]$ una función definida en una variedad Riemanniana M, $p \in M$ y $\eta \in T_p^*M$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\eta \in D^- f(p)$, esto es, existe una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en p, y ademas $\eta = d\varphi(p)$.

(2) Existe una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$, diferenciable en p tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en p y además $\eta = d\varphi(p)$.

(3) Para cada carta $h : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ con $p \in U$, si tomamos $\zeta = \eta \circ d(h^{-1})_{h(p)}$, se verifica que

$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} \geq 0, \ \ con\ v \in \mathbb{R}^n.$$

(4) Existe una carta $h : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ con $p \in U$ y tal que, para $\zeta = \eta \circ d(h^{-1})_{h(p)}$, se verifica que

$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} \geq 0$$

Las condiciones anteriores se pueden establecer de manera analoga para el caso de funciones superdiferenciales. En particular $\zeta \in D^+ f(p)$ si y solo si, existe una carta $h : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ con $p \in U$ tal que, para $\zeta = \eta \circ d(h^{-1})_{h(p)}$,

$$\limsup_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} \leq 0.$$

Prueba. Las implicaciones (1) $\Longrightarrow$ (2) y (3) $\Longrightarrow$ (4) son inmediatas. Primeramente mostraremos (2) $\Longrightarrow$ (3).

Como $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en p, entonces si definimos $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = (f - \varphi) \circ h^{-1}(x)$$

tendremos que g tambien alcanza un mínimo local en $h(p)$, pues

$$g(h(p)) = (f - \varphi) \circ h^{-1}(h(p)) = (f - \varphi)(p),$$

lo cual implica que:

$$\liminf_{v \to 0} \frac{g(h(p) + v) - g(h(p))}{\|v\|} \geq 0,$$

esto es

$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1} - \varphi \circ h^{-1})(h(p) + v) - (f \circ h^{-1} - \varphi \circ h^{-1})(h(p))}{\|v\|} \geq 0$$

de donde, se obtiene:

$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - (\varphi \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) + \varphi(p)}{\|v\|} \geq 0. \qquad (3.3)$$

Por otro lado, como $\varphi \circ h^{-1}$ es diferenciable y

$$\zeta = \eta \circ d(h^{-1})_{h(p)} = d\varphi_p \circ d(h^{-1})_{h(p)} = d(\varphi \circ h^{-1})_{h(p)},$$

obtenemos que:

$$\liminf_{v \to 0} \frac{(\varphi \circ h^{-1})(h(p) + v) - (\varphi \circ h^{-1})(h(p)) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} = 0$$

pues,

$$(\varphi \circ h^{-1})(h(p) + v) - (\varphi \circ h^{-1})(h(p)) = (\varphi \circ h^{-1})'(h(p)) + r(v), \text{ con } \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

así, entonces

$$\liminf_{v \to 0} \frac{(\varphi \circ h^{-1})(h(p) + v) - \varphi(p) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} = 0. \qquad (3.4)$$

Apartir de (3.3) y (3.4), tenemos que:

$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} \geq 0$$

Ahora mostramos (4) $\Longrightarrow$ (1)

Sea V una vecindad de p tal que $V \subset U$. Notemos que la función $F : h(U) \to \mathbb{R}\cup\{^+\infty\}$ definida por $F = f \circ h^{-1}$ satisface la condición:

$$\liminf_{v\to 0} \frac{F(h(p)+v) - F(h(p)) - \langle \zeta, v\rangle}{\|v\|} \geq 0.$$

Luego por el Lema 3.2, existe una función $\psi : h(U) \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F-\psi$ tiene un mínimo local en $h(p)$ y $\zeta = d\psi(h(p))$. Definamos la función de clase C^1 $\phi := \psi \circ h : U \to \mathbb{R}$. Además $(F-\psi)\circ h = f - \phi$ tiene un mínimo local en p y $d\phi(p) = d\psi_{h(p)} \circ dh_p = \zeta \circ dh(p) = \eta$. Luego, por el Teorema de Tietze, existe una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 definida por $\varphi = \theta\phi$, tal que $\varphi|_{\overline{V}} = \phi$, donde θ es una función del tipo Uryshon de clase C^1 cuyo valor es 1 en $\overline{V}$ y 0 en $M\diagdown U$. Como $(f-\varphi)(x) = (f-\phi)(x)$ para todo $x \in V$, entonces $f - \varphi$ tiene un mínimo local en p. Además, $\eta = d\varphi(p)$. ■

3.2. Propiedades de la subdiferencial

En esta sección ilustraremos algunas propiedades de la subdiferencial de una función relacionadas con la composición y la suma de funciones subdiferenciables y diferenciables, que posteriormente serán utilizadas a lo largo del desarrollo de este trabajo.

Teorema 3.3 ***(Regla de la cadena)*** *Sean M, N variedades Riemannianas y sea $g : M \to N$ una función diferenciable en p y $f : N \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función subdiferenciable en $g(p)$, entonces la composición $f\circ g : M \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ es subdiferenciable en p, y además se cumple:*

$$\left\{\zeta \circ dg(p) : \zeta \in D^- f(g(p))\right\} \subseteq D^-(f\circ g)(p)$$

Prueba. Dada una función subdiferenciable f en $g(p)$, tenemos que $D^- f(g(p)) \neq \emptyset$. Sea $\zeta \in D^- f(g(p))$. Entonces por el Teorema de caracterización de subdiferenciabilidad, existe $\varphi : N \to \mathbb{R}$ diferenciable en $g(p)$ tal que $f - \varphi$ tiene un mínimo local en $g(p)$ y $\zeta = d\varphi_{g(p)}$. En particular, existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$f(y) - \varphi(y) \geq f(g(p)) - \varphi(g(p)), \text{ siempre que } d_N(y, g(p)) < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Denotamos la función $\psi = \varphi \circ g$. Dado que g es diferenciable en p y φ es diferenciable en $g(p)$, por la regla de la cadena, tenemos que $\psi : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable en p, y que además $d\psi_p = d\varphi_{g(p)} \circ dg_p$. Como g es continua en p, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_N(g(x), g(p)) < \varepsilon, \text{ siempre que } d_M(x,p) < \delta \tag{3.6}$$

Luego, combinando (3.5) y (3.6), tenemos

$$f(g(x)) - \varphi(g(x)) > f(g(p)) - \varphi(g(p)), \text{ siempre que } d_M(x,p) < \delta,$$

esto es, $f \circ g - \psi$ tiene un mínimo local en p. Por el teorema de caracterización de subdiferenciabilidad [(1) $\Leftrightarrow$ (2)] tenemos que $f \circ g$ es subdiferenciable en p y así,

$$\zeta \circ dg_p = d\varphi_{g(p)} \circ dg_p = d\psi_p \in D^-(f \circ g)(p). \ \blacksquare$$

Corolario 3.1 *Sean M,N variedades Riemannianas y $h : M \to N$ un difeomorfismo de clase C^1. entonces $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es subdiferenciable en p si, solo si $f \circ h^{-1}$ es subdiferenciable en $h(p)$. Además, se cumple*

$$D^- f(p) = \left\{\zeta \circ dh(p) : \zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\right\}.$$

Prueba. Sea $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función subdiferenciable en p, entonces por el Teorema 3.3, $f \circ h^{-1} : N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es subdiferenciable en $h(p)$ y además,

$$\left\{\zeta \circ d(h^{-1})_{h(p)} : \zeta \in D^-(f(h^{-1}(h(p)))\right\} \subseteq D^-(f \circ h^{-1})(h(p)),$$

es decir

$$\left\{\zeta \circ d(h^{-1})_{h(p)} : \zeta \in D^- f(p)\right\} \subseteq D^-(f \circ h^{-1})(h(p)).$$

Luego, sea $T \in D^- f(p)$, entonces

$$\zeta := T \circ d(h^{-1})_{h(p)} \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p)).$$

Por tanto, $T = \zeta \circ dh_p$, con $\zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))$. De ahí que:

$$D^- f(p) \subset \left\{\zeta \circ dh_p : \zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\right\}.$$

Reciprocamente, supongamos que $f \circ h^{-1}$ es subdiferenciable en $h(p)$, entonces por el Teorema 3.3, se tiene que la función $f = (f \circ h^{-1}) \circ h$ es subdiferenciable en p, y además:

$$\left\{\zeta \circ dh_p : \zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\right\} \subseteq D^-((f \circ h^{-1}) \circ h)(p),$$

es decir

$$\left\{\zeta \circ dh_p : \zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\right\} \subseteq D^- f(p).$$

Luego, para cualquier $\zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))$, tenemos que $\zeta \circ dh_p \in D^- f(p)$, así, entonces

$$\{\zeta \circ dh_p : \zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\} = D^- f(p). \ \blacksquare$$

Una buena definición de diferenciabilidad y portanto de subdiferenciabilidad permite que se cumpla tambien que la suma de dos funciones con una de esas dos propiedades también tenga esa propiedad, por lo que es necesario verificar que se cumpla la regla de la suma.

Teorema 3.4 ***(Regla de la suma).*** *Sea M una variedad Riemanniana. Para dos funciones $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ subdiferenciables, con $p \in M$, se verifica que $f_1 + f_2$ es subdiferenciable en p y que además se cunple:*

$$D^- f_1(p) + D^- f_2(p) \subseteq D^-(f_1 + f_2)(p).$$

Prueba. Dados f_1, f_2 funciones diferenciables, podemos tomar $\zeta_i \in D^- f_i(p)$, con $i = 1, 2$, entonces existen funciones regulares de clase C^1 $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ tales que $f_i - \varphi_i$ tienen un mínimo local en p y $\zeta_i = d(\varphi_i)_p$ para $i = 1, 2$, entonces $(f_1 + f_2) - (\varphi_1 + \varphi_2) = (f_1 - \varphi_1) + (f_2 - \varphi_2)$ alcanza un mínimo local en p. Así, se obtiene

$$\zeta_1 + \zeta_2 = d(\varphi_1 + \varphi_2)(p) \in D^-(f_1 + f_2)(p),$$

y que $f_1 + f_2$ es subdiferenciable en el punto p.

Por lo tanto,

$$D^- f_1(p) + D^- f_2(p) \subseteq D^-(f_1 + f_2)(p). \quad \blacksquare$$

El siguiente Teorema es una formulación de la regla aproximada de la subdiferencial de la suma en terminos del transporte paralelo. Para una demostración del Teorema de la regla aproximada para la subdiferencial de la suma vease (Azagra, Daniel; Ferrera, Juan; López - Mesas, Fernando 2005).

Teorema 3.5 *Sea M una variedad Riemanniana. Sean $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que f_1 es semicontinua inferiormente y f_2 es uniformemente continua. Tomamos $p \in M, \zeta \in D^-(f_1 + f_2)(p)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existen p_1 y p_2 en M y $\zeta_1 \in D^- f_1(p_1)$ y $\zeta_2 \in D^- f_2(p_2)$ tales que:*

(1) $d(p_1, p) < \varepsilon$ y $d(p_2, p) < \varepsilon$,

(2) $|f_1(p_1) - f_1(p)| < \varepsilon$ y $|f_2(p_2) - f_2(p)| < \varepsilon$,

(3) $\|L_{p_2 p}(\zeta_2) + L_{p_1 p}(\zeta_1) - \zeta\|_p < \varepsilon$,

donde $L_{p_i p}$ representa el transporte paralelo estándar de p_i a p para $i = 1, 2$.

3.3. Un principio de minimización perturbada para la diferencia de dos funciones en variedades Riemannianas

En esta sección formularemos un principio de minimización perturbada para la diferencia de dos funciones en variedades Riemannianas que son uniformemente localmente convexas y tienen radio de inyectividad positivo.

Sea M una variedad Riemanniana completa, uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad $i(M) > r > 0$, entonces para cada $x \in M$ la función distancia, $y \to d(x, y)$ definida en la bola $B(x, r) \setminus \{x\}$ es de clase C^{∞} y por lo tanto tiene sentido considerar las derivadas parciales $\partial d(x_0, y_0)/\partial x$ y $\partial d(x_0, y_0)/\partial y$ de la función distancia

$$d : M \times M \to \mathbb{R}.$$

Por otro lado, es necesario recordar el transporte paralelo de $T_{x_0}M$ a $T_{y_0}M$, a lo largo de la geodésica que une x_0 con y_0 (nótese que existe una única geodésica minimizante que une x_0 a y_0 porque M es uniformemente localmente convexa y $d(x_0,y_0) < r$). Ahora, sean x_0, $y_0 \in M$ tales que $d(x_0,y_0) < r$ y sea $\gamma(t) = \exp_{x_0}(tv_0)$, con $0 \leq t \leq 1$, la única geodésica minimizante que une estos dos puntos. Así, para cada $w \in T_{x_0}M$, tenemos que, la traslación paralela de w desde x_0 a y_0 a lo largo de γ está definida por la aplicación $L_{x_0y_0} : T_{x_0}M \to T_{y_0}M$, con $L_{x_0y_0}(w) = P^1_{0,\gamma}(w)$, que es una isometría lineal con inversa $L_{y_0x_0} : T_{y_0}M \to T_{x_0}M$. Como $L_{x_0y_0}$, $L_{y_0x_0}$ son isometrías lineales, entonces podemos identificar, T_pM con su espacio dual T^*_pM a través de la aplicación $T_pM \ni x \longmapsto f_x \in T^*_pM$, donde $f_x : T_pM \to \mathbb{R}$, está definida por $f_x(y) = \langle x, y \rangle_p$ para cada $y \in T^*_pM$. Notemos que la isometría lineal $L_{x_0y_0}$, induce una isometría entre los espacios cotangentes $T^*_{x_0}M$ y $T^*_{y_0}M$. De ahí que denotaremos también a esta isometría por $L_{x_0y_0} : T^*_{x_0}M \to T^*_{y_0}M$.

Lema 3.3 *Sea M una variedad Riemanniana completa, uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad $i(M) > r > 0$ y sean $x_0, y_0 \in M$ tales que $0 < d(x_0, y_0) < r$. Entonces*

$$L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}\right) = -\frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Prueba. Sea $r_0 = d(x_0, y_0) < r$, y sea la función $\gamma : [0, 1] \to M$ dada por $\gamma(t) = \exp_{x_0}(tv_0)$, entonces esta es una geodésica radial uniendo x_0 a y_0.

Como

$$\begin{aligned} d(\exp_{x_0})_{v_0}(v_0) &= \frac{d}{dt}\exp_{x_0}((t+1)v_0)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(1, x_0, (t+1)v_0)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\gamma(t+1, x_0, v_0)|_{t=0} = \gamma'(1), \qquad (3.7) \end{aligned}$$

así, de (3.7) tenemos que

$$L_{x_0y_0}(v_0) = \gamma'(1) = d(\exp_{x_0})_{v_0}(v_0).$$

Ahora, usando el Lema 1.3, tenemos que

$$\left\| \frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y} \right\|_{y_0} = 1.$$

En particular,

$$\frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y} \neq 0.$$

Así existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$\gamma'(1) = \lambda \frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}. \qquad (3.8)$$

En efecto, las geodésicas radiales que parten de x_0 son ortogonales a las esferas geodésicas centradas a x_0, esto es $\gamma'(1)$ es ortogonal a $\exp_{x_0}(\partial B(0, r_0))$. Por otro lado, puesto que las esferas geodésicas son curvas de nivel de la función distancia, tenemos que $\frac{\partial d(y_0,x_0)}{\partial y}$ es ortogonal a $\exp_{x_0}(\partial B(0, r_0))$, de aquí que (3.8) es verdadera.

Luego

$$L_{x_0y_0}(v_0) = \gamma'(1) = \lambda \frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}, \text{ para algún } \lambda \neq 0.$$

Como la aplicación $t \longmapsto d(\gamma(t), x_0)$ es creciente, tenemos que $\lambda > 0$. Entonces,

$$\|L_{x_0y_0}(v_0)\|_{y_0} = \|v_0\|_{x_0} = \left\| \lambda \frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y} \right\|_{y_0} = \lambda.$$

Por tanto,

$$L_{x_0y_0}(v_0) = \|v_0\|_{x_0} \frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y} \qquad (3.9)$$

Sea $\beta : [0, 1] \to M$ dada por $\beta(t) = \exp_{y_0}(tw_0)$ una geodésica radial que une los puntos y_0 a x_0. Por la definición de transporte paralelo y geodésica, tenemos que

$$L_{x_0y_0}(v_0) = -w_0 \text{ y } \|w_0\|_{y_0} = \|v_0\|_{x_0}. \quad (3.10)$$

Ahora haciendo un análisis similar al realizado para obtener (3.9) obtenemos

$$L_{y_0x_0}(w_0) = \|w_0\|_{y_0} \frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial x}. \qquad (3.11)$$

Así, de (3.9) tenemos que

$$v_0 = L_{y_0x_0}(L_{x_0y_0}(v_0)) = L_{y_0x_0}\left(\|v_0\|_{x_0} \frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}\right) = \|v_0\|_{x_0} L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}\right).$$

Es decir,

$$\frac{v_0}{\|v_0\|_{x_0}} = L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}\right). \qquad (3.12)$$

Por otro lado, de (3.10) tenemos

$$v_0 = L_{y_0x_0}(L_{x_0y_0}(v_0)) = -L_{y_0x_0}(w_0).$$

Luego,

$$\frac{v_0}{\|v_0\|_{x_0}} = \frac{v_0}{\|w_0\|_{y_0}} = -\frac{L_{y_0x_0}(w_0)}{\|w_0\|_{y_0}}, \qquad (3.13)$$

de ahí que, apartir de la igualdad (3.11), tenemos que

$$\frac{L_{y_0x_0}(w_0)}{\|w_0\|_{y_0}} = -\frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial x}. \qquad (3.14)$$

Finalmente, utilizando (3.12), (3.13) y (3.14) obtenemos que

$$L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial d(y_0,x_0)}{\partial y}\right) = -\frac{\partial d(x_0,y_0)}{\partial x}. \blacksquare$$

Una vez desarrollada la relación entre el transporte paralelo en algunos puntos de la variedad Riemanniana dentro del radio de inyectividad con las derivadas parciales de la distancia Riemanniana en esos puntos, formularemos un Principio de Minimización Perturbada (P.M.P) que esta referido a encontrar propiedades de subdiferenciales y superdiferenciales de funciones semicontinuas superiormente e inferiormente acotadas, respectivamente; con el transporte paralelo, así como la minimización aproximada de la diferencia de esas funciones dadas y que están plasmadas en la siguiente versión del (P.M.P) enunciado a continuación.

Teorema 3.6 ***(Principio de Minimización Perturbada)*** *Sea M una variedad Riemanniana completa uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad $i(M) > r > 0$, sea $u : M \to \mathbb{R}$ una función acotada y semicontinua superiormente, y $v : M \to \mathbb{R}$ una función acotada y semicontinua inferiormente. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existen $x_0, y_0 \in M, \zeta \in D^+u(x_0)$ y $\xi \in D^-v(y_0)$ tales que:*

(i) $d(x_0, y_0) < \varepsilon$,
(ii) $\|\zeta - L_{y_0 x_0}(\xi)\|_{x_0} < \varepsilon$,
(iii) $v(z) - u(z) \geq v(y_0) - u(x_0) - \varepsilon$ *para cada* $z \in M$,

donde $L_{y_0 x_0} : T^*_{y_0}M \to T^*_{x_0}M$ es la aplicación transporte paralelo estandar.

Prueba. Tomemos $\varepsilon < r$. Sea $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, no creciente, y tal que

$$b(t) = b(0) > 2(\|v\|_\infty + \|u\|_\infty) + \varepsilon \text{ si } t \leq \varepsilon/4, \text{ y } b(t) = 0 \text{ si } t \geq \varepsilon. \quad (3.15)$$

Luego, definimos la función $w : M \times M \to \mathbb{R}$ por

$$w(x, y) = v(x) - u(x) - b(d(x, y)) \text{ para } (x, y) \in M \times M.$$

La función w es semicontinua inferiormente y acotada inferiormente. Sea $M \times M$ la variedad Riemanniana producto uniformemente mesetable y completa. Por lo tanto, podemos aplicar el Principio Variacional Suave (dado en el Teorema 2.4) a la función w de modo que nos permita asegurar la existencia de un punto $(x_0, y_0) \in M \times M$ y de una función, $g : M \times M \to \mathbb{R}$, es de clase C^1 tales que

(a) $\|g\|_\infty < \varepsilon/2$ y $\|dg\|_\infty < \varepsilon/2$,

(b) $v(y) - u(x) - b(d(x, y)) - g(x, y) \geq v(y_0) - u(x_0) - b(d(x_0, y_0)) - g(x_0, y_0)$ para todo $x, y \in M$.

- Si tomamos $x = x_0$ en (b), tenemos que

$$v(y) - b(d(x_0, y)) - g(x_0, y) \geq v(y_0) - b(d(x_0, y_0)) - g(x_0, y_0) \text{ para todo } y \in M.$$

- Sí definimos φ una función de M en $\mathbb{R}$ por:

$$\varphi(y) = b(d(x_0, y)) - g(x_0, y), \text{ de clase } C^1.$$

Además como $v - \varphi$ alcanza un mínimo local en y_0, entonces v es subdiferenciable en el punto $y_0 \in M$, y

$$\xi := \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial (b \circ d)(x_0, y_0)}{\partial y} \in D^- v(y_0). \quad (3.16)$$

De manera similar.

- Si tomamos $y = y_0$ en (b), tenemos que

$$\zeta := -\left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial (b \circ d)(x_0, y_0)}{\partial x} \right) \in D^+ u(x_0). \quad (3.17)$$

Ahora, considerando el Lema 3.3 y la definición de (b) cuando $x_0 \neq y_0$, tenemos que

$$L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial(b\circ d)(x_0,y_0)}{\partial y}\right)+\frac{\partial(b\circ d)(x_0,y_0)}{\partial x}=$$

$$\begin{aligned}
&= L_{y_0x_0}\left(b'(d(x_0,y_0))\frac{\partial d(x_0,y_0)}{\partial y}\right)+b'(d(x_0,y_0))\frac{\partial d(x_0,y_0)}{\partial x}\\
&= b'(d(x_0,y_0))\left[L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial d(x_0,y_0)}{\partial y}\right)+\frac{\partial d(x_0,y_0)}{\partial x}\right]=0
\end{aligned}$$

Luego, por la linealidad del transporte paralelo y lo probado arriba, se tiene:

$$\|L_{y_0x_0}(\xi)-\zeta\|_{x_0}=$$

$$=\left\|L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\right)+L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial(b\circ d)(x_0,y_0)}{\partial y}\right)+\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{\partial(b\circ d)(x_0,y_0)}{\partial x}\right\|_{x_0}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\|L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\right)+\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\right\|_{x_0}\\
&\leq \left\|\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\right\|_{y_0}+\left\|\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\right\|_{x_0}\\
&\leq \|dg\|_\infty+\|dg\|_\infty<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,
\end{aligned}$$

lo que prueba (ii).

En la otra dirección, si $d(x_0,y_0)\geq\varepsilon$, entonces por la definición de la función b, obtenemos $b(d(x_0,y_0))=0$ y si tomamos $x=y=z$ en (b), tenemos que:

$$\begin{aligned}
b(0) &\leq v(z)-u(z)-g(z,z)+g(x_0,y_0)-v(y_0)+u(x_0)\\
&\leq (\|v\|_\infty+\|u\|_\infty)+\varepsilon,
\end{aligned}$$

lo cual contradice a la definición de b, para mayores detalles vease (3.15) al inicio de la demostración.

Por tanto, $d(x_0,y_0)<\varepsilon$, lo que prueba (i).

Finalmente, si tomamos $z=x=y$ en (b) y si consideramos que $\|g\|_\infty<\varepsilon/2$ y que la función b es no creciente, tenemos que

$$v(z)-u(z)\geq v(y_0)-u(x_0)+b(0)-b(d(x_0,y_0))+g(z,z)-g(x_0,y_0)$$

$$\begin{aligned}
&\geq v(y_0) - u(x_0) + 0 - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 \\
&= v(y_0) - u(x_0) - \varepsilon,
\end{aligned}$$

lo que prueba (iii). ■

Esta versión del Principio de Minimización Perturbada sera necesario para la formulación del Principio del Máximo para ecuaciones de Hamilton-Jacobi que presentaremos en el siguiente capítulo.

3.4. Desigualdad del Valor Medio de Deville

En la teoría de los espacios de Banach existen diversos Teoremas de valor medio, y dentro de estos el Teorema de valor medio de Deville es uno de los que trata con funciones semicontinuas inferiormente definidas en conjuntos abiertos y conexos de un espacio de Banach. No está demás indicar que dicho teorema fue extendido al espacio de variedades Riemannianas en Azagra, Daniel; Ferrera, Juan; Lopez - Mesas (2005) y siguiendo esta linea de estudio.trataremos de reproducirlo. Previamente a la presentación del Teorema de valor medio de Deville introduciremos algunas notaciones, definiciones y resultados relacionados que serán necesarios en la demostración de dicho Teorema.

Así mismo, es necesario etiquetar aquellas funciones mesetas diferenciables que satisfacen la propiedad de Lipschitz.

Definición 3.5 *Decimos que un espacio de Banach X satisface la propiedad (P). Si existe una función meseta $b : X \to \mathbb{R}$ Lipschitziana de clase C^1.*

Una vez establecida la noción de función meseta (vea def. 2.1)y la propiedad (P), el siguiente paso es relacionar estas funciones con la continuidad según Lipschitz y luego obtener como una consecuencia la propiedad (P) en espacios normados de dimensión finita.

Teorema 3.7 *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach que satisface la propiedad (P) y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente. Si existe una constante $K > 0$ tal que $\|\zeta\| \leq K$ para todo $\zeta \in D^{-}f(x)$ y $x \in X$. Entonces f es Lipschitz continua. Mas precisamente, para todo $x, y \in X$*

$$|f(x) - f(y)| \leq K \|x - y\|.$$

Prueba. Vease (Deville 1995, p 59). ■

Proposición 3.1 *Sea X un espacio de Banach de dimensión finita, entonces X satisface la propiedad (P).*

Prueba. Vease (Lima 2007, p 187). ■

Así, entonces una vez formuladas las nociones de función meseta y la propiedad (P) en espacios normados formulamos la desigualdad del valor medio de Deville, a través del siguiente Teorema.

Teorema 3.8 ***(Desigualdad del Valor Medio de Deville)*** *Sea M una variedad Riemanniana y $f : M \to \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente. Supongamos que existe una constante $K > 0$ tal que $\|\zeta\|_p \leq K$ para todo $\zeta \in D^- f(p)$ y $p \in M$, entonces*

$$|f(p) - f(q)| \leq K d_M(p, q), \text{ para todo } p, q \in M.$$

Prueba. Fijemos dos puntos cualesquiera $p, q \in M$ y sea $\gamma : [0, T] \to M$ una curva continua de clase C^1 por partes, parametrizada por longitud de arco que une los puntos p, q, es decir, sea $\gamma(0) = p$ y $\gamma(T) = q$. Tomando $\varepsilon > 0$, por el Teorema 1.3, para cada $x \in \gamma([0, T])$, existe $r_x > 0$ tal que

$$\exp_x : B(0, 2r_x) \subset T_x M \to B(x, 2r_x) \subset M$$

es un difeomorfismo, y que ademas las derivadas de la $\exp_x$ y exp_x^{-1} estan acotadas por $1 + \varepsilon$.

Como $\gamma([0, T])$ es compacto, existen puntos $p = x_1; x_2; x_3; ...; x_n = q \in M$ tales que

$$\gamma([0, T]) \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r_j) \text{ donde } r_j = r_{x_j}.$$

Sea $r = \text{mín}\{r_1, ..., r_n\}$, entonces escogemos $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $T/m < r/2$. Luego definimos

$$t_j = j\frac{T}{m}, \ j = 0, ..., m.$$

Ademas, consideremos los puntos a_j, b_j con

$$a_j = b_{j-1} = \gamma(t_{j-1}), \ j = 1, ..., m, \text{ y } b_j = \gamma(t_m).$$

Para cada $j \in \{1, ..., m - 1\}$ escogemos un $i_j \in \{1, ..., n\}$ tal que

$$\gamma\left[t_{j-1}, t_j\right] \cap B(x_{i_j}, r_{i_j}) \neq \emptyset,$$

y sean $i_0 = 1, i_m = n$ (tales que $x_{i_0} = p$ y $x_{i_m} = q$).

Como γ está parametrizada por longitud de arco, tenemos que

$$L(\gamma_j|_{[t_{j-1},t_j]}) = t_{j-1} - t_j = \frac{T}{m} < \frac{r}{2} \leq \frac{r_{i_j}}{2}.$$

Así, obtenemos que

$$\gamma\,[t_{j-1}, t_j] \subset B(x_{i_j}, r_{i_j}), \text{ para todo } j = 1, ..., m.$$

Para simplificar la notación, consideraremos $y_j := x_{i_j}$, y $s_j = r_{i_j}$, para cada $j = 1, .., m$. Definamos la funcion $f_j : B(0, 2s_j) \subset T_{y_j}M \to \mathbb{R}$ por

$$f_j(v) = f \circ \exp_{y_j}(v),$$

donde la función f_j es diferenciable, en particular subdiferenciable. Así, dada $x \in B(0, 2s_j)$, por el Corolario 3.1 tenemos que

$$\begin{aligned} D^- f_j(x) &= \left\{\zeta \circ d\exp_{y_j}(x) : \zeta \in D^-(f_j \circ \exp_{y_j}^{-1})(\exp_{y_j}(x))\right\} \\ &= \left\{\zeta \circ d\exp_{y_j}(x) : \zeta \in D^-(f)(\exp_{y_j}(x))\right\}. \end{aligned}$$

Como $\|\zeta\|_y \leq K$, para todo $\zeta \in D^- f(y)$ con $y \in M$ y $\left\|d\exp_{y_j}(x)\right\| \leq (1+\varepsilon)$ para todo $x \in B(0, 2s_j)$, deducimos que

$$\|\eta\|_{y_j} \leq (1+\varepsilon)K \text{ para todo } \eta \in D^- f_j(x), \text{ y todo } x \in B(0, 2s_j).$$

Siendo así, como T_xM es un espacio de Hilbert y la función f_j es semicontinua inferiormente por el Teorema 3.7 tenemos que

$$\begin{aligned} |f(a_j) - f(b_j)| &= \left|f_j(\exp_{y_j}^{-1}(a_j)) - f_j(\exp_{y_j}^{-1}(b_j))\right| \\ &\leq (1+\varepsilon)K \left\|\exp_{y_j}^{-1}(a_j) - \exp_{y_j}^{-1}(b_j)\right\|_{y_j}, \end{aligned}$$

para todo $j = 1, ..., m$. Por otro lado, como $\exp_{y_j}^{-1}$ es $(1+\varepsilon)-$Lipschitz, tenemos que para todo $j = 1, ..., m$ se cumple que

$$\left\|\exp_{y_j}^{-1}(a_j) - \exp_{y_j}^{-1}(b_j)\right\|_{y_j} \leq (1+\varepsilon) d_M(a_j, b_j),$$

Apartir de ahí, combinando las dos últimas desigualdades, vemos que

$$|f(a_j) - f(b_j)| \leq (1+\varepsilon)^2 K d_M(a_j, b_j) \leq (1+\varepsilon)^2 K \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|d\gamma(t)\| \, dt, \text{ para todo } j = 1, ..., m.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |f(p) - f(q)| &= \left| \sum_{j=1}^{m} (f(a_j) - f(b_j)) \right| \leq \sum_{j=1}^{m} |f(a_j) - f(b_j)| \\ &\leq (1+\varepsilon)^2 K \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|d\gamma(t)\| \, dt \\ &= (1+\varepsilon)^2 K L(\gamma). \end{aligned}$$

Por otro lado, tomando el ínfimo del conjunto de las longitudes $L(\gamma)$ de los caminos continuos γ y de clase C^1 por partes que une p y q, tenemos

$$|f(p) - f(q)| \leq (1+\varepsilon)^2 K d_M(p, q).$$

Finalmente, haciendo tender $\varepsilon \to 0$, tenemos que

$$|f(p) - f(q)| \leq K d_M(p, q). \ \blacksquare$$

La desigualdad del valor maedio de Deville juega un rol muy importante en la formulación y desarrollo de la teoría de la existencia y unicidad de soluciones de viscosidad (o soluciones debiles) de ecuaciones de Hamilton-Jacobi definidas en variedades Riemannianas, y en particular en la existencia y unicidad de soluciones de viscosidad de la ecuación eikonal

$$\begin{cases} \|du(x)\|_x = 1, \text{ si } x \in \Omega \\ u(x) = 0, \text{ sobre } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Capítulo 4

ECUACIONES DE HAMILTON-JACOBI EN VARIEDADES RIEMANNIANAS

En este capítulo aplicaremos los resultados que hemos desarrollado en capítulos anteriores para obtener un principio del máximo para las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades Riemannianas.

4.1. Introducción

Las ecuaciones de Hamilton-Jacobi estacionarias de primer orden son de la forma:

$$H(x, u(x), du(x)) = 0$$

y en el caso de que esta evoluciona con el tiempo son de la forma:

$$H(t, x, u(x, t), du(t, x)) = 0.$$

Estas ecuaciones aparecen de manera natural en la teoría de control optimal y en la teoría de Liapunov para el caso de $\mathbb{R}^n$, así las soluciones de estas ecuaciones de Hamilton-Jacobi de primer orden estarán definidas en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, en este trabajo de tesis el escenario del espacio ambiente son las variedades diferenciables. Pero afin de que las ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi tengan sentido es necesario considerar una métrica Riemanniana sobre esta variedad diferenciable de modo que esta sea una variedad Riemanniana satisfaciendo algunas condiciones adicionales como la completitud, de modo que esta sea una variedad Riemanniana completa (finito dimensional o infinito dimensional),es mas aún asumiremos que M es uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad estrictamente positivo, o equivalentemente, existe una constante $r > 0$ tal que para cada $x \in M$ la aplicación $\exp_x$ está definida en la bola $B(0_x, r) \subset T_x M$ y es un difeomerfismo de clase C^∞

$$\exp_x : B(0_x, r) \to B(x, r),$$

y la función distancia viene dada por la siguiente expresión

$$d(x, y) = \left\| \exp_x^{-1}(y) \right\|_x \text{ para todo } y \in B(x, r).$$

Como una situación de esta índole, podemos ver que las variedades compactas satisfacen estas propiedades y si además consideramos a M como una variedad uniformemente mesetable, podemos aplicar el Principio Variacional Suave en variedades Riemannianas, para obtener una versión del principio del máximo para ecuaciones de Hamilton-Jacobi.

Siendo así, a continuación formularemos la definición de una función intrinsecamente uniformemente continua.

Definición 4.1 *Diremos que una función $F : T^*M \to \mathbb{R}$ es intrinsecamente uniformemente continua, cuando para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta \in (0, r_M)$ tal que si $d(x, y) \leq \delta, \zeta \in T_x^*M, \xi \in T_y^*M$, y $\|\zeta - L_{yx}(\xi)\| \leq \delta$, entonces*

$$|F(x, \zeta) - F(y, \xi)| \leq \varepsilon.$$

Ahora, con estas notaciones estamos encaminados a formular el Principio del Máximo para las EDP's mencionadas

4.2. Principio del Máximo para ecuaciones de Hamilton-Jacobi (EHJ)

En esta sección consideremos a M como una variedad Riemannana y la ecuación de Hamilton-Jacobi de primer orden de la forma:

$$\begin{cases} u_t + F(t, d_x u) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \qquad \text{(EHJ)}$$

donde $u_0 : M \to \mathbb{R}$ es una condición inicial que suponemos acotada, uniformemente continua, así como $F : [0, \infty\rangle \times T^*M \to \mathbb{R}$ es una función continua y T^*M es el fibrado cotangente de M.

Definición 4.2 *Consideremos la función* $u : [0, \infty\rangle \times M \to \mathbb{R}$. *Entonces*

(1) Diremos que u *es una* ***subsolución de viscosidad*** *de (EHJ) si:*

- u *es semicontinua superiormente,*
- *Para cada* $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times M$ *y cada* $(a, \zeta) \in D^+u(t, x)$ *se cumple que*
$$\begin{cases} a + F(t, x, \zeta) \leq 0 \\ u(0, x) \leq u_0(x), \end{cases}$$

(2) Diremos que u *es una* ***supersolución de viscosidad*** *de (EHJ) si:*

- u *es semicontinua inferiormente,*
- *Para cada* $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times M$ *y cada* $(a, \zeta) \in D^-u(t, x)$ *se cumple que*
$$\begin{cases} a + F(t, x, \zeta) \geq 0 \\ u(0, x) \geq u_0(x), \end{cases}$$

(3) La función u *es una* ***solución de viscosidad*** *de (EHJ) si es a la vez subsolucion de viscosidad y supersolución de viscosidad de (EHJ).*

Observación 4.1 *Si* u *es una función diferenciable, tendremos que*

$$D^-u(p) = D^+u(p) = \{du_p\},$$

lo cual implica que cualquier solución de viscosidad que sea diferenciable es una solución clásica de (EHJ).

Ahora demostraremos el resultado principal de este trabajo, referido a el principio del máximo para ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades Riemannianas.

Teorema 4.1 *Sea* M *una variedad Riemanniana completa, uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad estrictamente positivo, y sean* $u_0, v_0 : M \to \mathbb{R}$ *funciones uniformemente continuas y acotadas, y* $F : [0, +\infty) \times T^*M \to \mathbb{R}$ *intrínsecamente uniformemente continua. Si* u *es una subsolución de viscosidad acotada de*

$$\begin{cases} u_t + F(t, d_x u) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

y v *es una supersolución de viscosidad acotada de*

$$\begin{cases} v_t + F(t, d_x v) = 0 \\ v(0, x) = v_0(x), \end{cases}$$

entonces $\sup_{[0,\infty\rangle \times M}(u - v) \leq \sup_M(u_0 - v_0)$.

Prueba. Asumamos lo contrario, que

$$\sup_{[0,\infty\rangle \times M}(u - v) > \sup_M(u_0 - v_0).$$

Tomemos ε_1 tal que $0 < \varepsilon_1 < \sup_{[0,\infty\rangle\times M}(u - v) - \sup_M(u_0 - v_0)$. Entonces existe $(t_0, x_0) \in (0,\infty) \times M$, tal que para cada $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$u(t_0, x_0) - v(t_0, x_0) > \sup_M (u_0 - v_0) + \varepsilon.$$

Ahora tomemos $\delta > 0$ tal que $\varepsilon_1 > \delta(1/(2t_0) + 1)$ y fijamos un $\varepsilon_0 < \delta/(2t_0)$. Entonces, para cada $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ tenemos que

$$u(t_0, x_0) - v(t_0, x_0) - \delta > \sup_M (u_0 - v_0) + \varepsilon. \qquad (4.1)$$

Consideremos la función Φ definida en $\mathbb{R} \times M$

$$\Phi = \begin{cases} u(t,x) - v(t,x) - \frac{\delta t}{t_0} & si\ (t,x) \in [0,\infty\rangle \times M \\ -\infty & caso\ contrario. \end{cases}$$

La función Φ es semicontinua superiormente y acotada superiormente. Luego por el teorema 2.4 (Principio Variacional Suave en variedades) aplicado a la función $-\Phi$ (una función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente) tenemos que, existe una función $g : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ diferenciable y con derivada continua tal que:

(i) $\Phi + g$ alcanza su máximo en un punto $(s, y) \in [0,\infty\rangle \times M$

(ii) $\|g\|_\infty = \sup\{|g(t,x)|\,; (t,x) \in \mathbb{R} \times M\} < \frac{\varepsilon}{2}$ y
$\|dg\|_\infty = \sup\{|g'(t,x)|\,; (t,x) \in \mathbb{R} \times M\} < \frac{\varepsilon}{2}$,

donde $s > 0$ porque de lo contrario estaríamos en contradicción con (4.1). Si ponemos

$$A = A(\varepsilon) = \frac{\delta}{t_0} - g_t(s,y) \text{ y } \zeta = D_x g(s,y)$$

tenemos que $(A, \zeta) \in D^+(u(s,y) - v(s,y))$, con la condición $A > \varepsilon_0$ para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Ahora por el Teorema 3.5 (aplicado a v y $-u$) existen (t_1, x_1), $(t_2, x_2) \in (0,\infty) \times M$ y $(b_1, \zeta_1) \in D^+u(t_1, x_1)$ y $(b_2, \zeta_2) \in D^-v(t_2, x_2)$ tales que:

(i) $|t_i - s| < \varepsilon$ y $d(x_i, y) < \varepsilon$ para $i = 1, 2$.

(ii) $|u(t_1, x_1) - u(s,y)| < \varepsilon$ y $|v(t_2, x_2) - v(s,y)| < \varepsilon$.

(iii) $|b_1 - b_2 - A| < \varepsilon$ y $\|L_{x_1 y}(\zeta_1) - L_{x_2 y}(\zeta_2) - \zeta\|_y < \varepsilon$.

Como u es una subsolución de viscosidad y v una supersolución, obtenemos que $b_1 + F(t_1, x_1, \zeta_1) \leq 0$ y $b_2 + F(t_2, x_2, \zeta_2) \geq 0$. De donde podemos obtener

$$b_1 - b_2 + F(t_1, x_1, \zeta_1) - F(t_2, x_2, \zeta_2) \leq 0,$$

de ahí

$$A - \varepsilon + F(t_1, x_1, \zeta_1) - F(t_2, x_2, \zeta_2) \leq 0. \tag{4.2}$$

Además

$$\begin{aligned} |t_1 - t_2| &\leq |t_1 - s| + |s - t_2| < 2\varepsilon, \\ d(x_1, x_2) &\leq d(x_1, y) + d(y, x_2) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

y

$$\|L_{x_1 y}(\zeta_1) - L_{x_2 y}(\zeta_2)\|_y \leq \|L_{x_1 y}(\zeta_1) - L_{x_2 y}(\zeta_2) - \zeta\|_y + \|\zeta\|_y < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalmente, si hacemos tender $\varepsilon \to 0$ en la ecuación (4.2) y teniendo en cuenta que F es intrinsecamente uniforme continua se obtiene que A, que depende de ε, tiende a un valor menor o igual que 0, lo que es una cotradicción al hecho que $A > \varepsilon_0$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. ■

El siguiente corolario es un resultado de unicidad para soluciones de viscosidad (soluciones debiles).

Corolario 4.1 *Sea M una variedad Riemanniana completa, uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad estrictamente positivo, y sea $u_0 : M \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua y acotada, y $F : [0, +\infty) \times T^*M \to \mathbb{R}$ intrínsecamente uniformemente continua. Si asumimos que v y w son soluciones de viscosidad de*

$$\begin{cases} u_t + F(t, d_x u) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

Entonces $v = w$.

El corolario de unicidad para soluciones de viscosidad de ecuaciones de Hamilton-Jacobi, es un resultado que se consigue de asumir en el teorema anterior que $u_0 = v_0$.

Conclusiones

1. El principio del máximo para ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades Riemannianas nos permite obtener resultados de unicidad de soluciones de viscosidad de ecuaciones de Hamilton-Jacobi.
2. El principio variacional suave para la diferencia de funciones en variedades es una herramienta muy útil para encontrar resultados de unicidad de soluciones de viscosidad (soluciones débiles) de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi estacionarias en variedades Riemannianas.
3. Si una función es superdiferenciable y subdiferenciable en un punto esto implica que dicha función es diferenciable en dicho punto.
4. El principio variacional de Deville-Godefroy-Zizler en espacios de Banach no se puede aplicar de forma general, cuando se trata de variedades Riemannianas.

Bibliografía

Azagra, Daniel; Ferrera, Juan; López - Mesas, Fernando. A maximum principle for evolution Hamilton-Jacobi equations on Riemannian manifolds, J. Math. Anal. Appl. 323 (2006) 473-480.

Azagra, Daniel; Ferrera, Juan; López - Mesas, Fernando. Nonsmooth analysis and Hamilton- Jacobi equations on Riemannian Manifolds, J. Funct. Anal. 220 (2005), no.2. pp. 304-361.

Azagra, Daniel and Cepedello Boiso, M. Uniform aproximation of mappings by smooth mappings with no critical points on Hilbert manifolds, preprint, 2002.

Azagra, Daniel and Deville, Robert; subdifferential Rolles, and Mean value Inequality theorems, Bull. Austral. Math. Soc. 56 (1997), p. 319-329

Barles, G. Solutions de viscosité des equations de Hamilton – Jacobi, Math. Appl. (Paris), Springer-Verlag, 1994.

Carmo, Manfredo.Perdigao do. Geometría Riemanniana. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988-2da edicao.

Crandall, M.G.; Evans, L.C.; Lions, P.L. Some propierties of viscosity solutions to Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984) 487-502.

Crandall, M.G.; ,P.L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983) 1-42.

Crandall, M.G.; Lions, P.L. Solutions de viscosité pour les équations de Hamilton-Ja cobi en dimensión infinite intervenant danslecontrole optimal de problemas d'evolution, C.R. Acad. Sci. Paris 305 (1987) 233-236.

Deimling, Klaus. Nonlinear functional analysis. Springer-Verlag, Berlin 1985.

Deville, Robert. Smooth variational principles and nonsmooth analysis in Banach spaces, in: F.H. Clarke, R.J. Stern (Eds.) Differential Equations and control, Nonlinear Analysis, in: NATO Sci. Ser. C Math. Phys Sci., vol 528, Kluwer Academic, Dordrecht, 1999, pp. 369-405.

Deville, Robert; Godefroy, Gilles; Zizler, Václav. Smoothness and Renormings in Ba nach Spaces With aplications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math, vol 64, 1993.

Deville, Robert. A mean value theorem for nondifferentiable mapping in Banach spaces. Serdica Math. J. 21 (1995), no.1, 59-66.

Ekeland, I. The Hopf-Rinow theorem in infinite dimension, J. Differential Geometry 13 (1978), no 2, 287-301.

Ekeland, I. Nonconvex minimizatión problem, Bull. Amer. Math. Soc. (New serier), vol.1 no. 3 (1979), 443-474.

Klingenberg, Wilhelm. Riemannian Geometry. Walter de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 1. Walter de Gruyter Berlin-Newyork 1982.

Lang, Serge. Fundamentals of differential geometry, Springer-Verlag (Graduate texts in mathematics 191), New York 1999.

Lima, Elong Lages. Variedades diferenciáveis, Publicacoes Matemáticas. Rio de Janeiro, 2007.

Madersen, Abraham. Foundations of Mechanics, second edition, Benjamin-Cummings, Reading, MA, 1980.

Mantegazza, Carlo; Menucci, Andrea Carlo. Hamilton-Jacobi equations and distance functions on Riemannian Manifolds, Appl. Math. Optim. 47 (1), (2003) pp. 1-25.