UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

ESCUELA DE POSGRADO

UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y FORMALES

"BUENA COLOCACIÓN Y PROPIEDAD DE CONTINUACIÓN ÚNICA PARA LA ECUACIÓN BENJAMÍN BONA MAHONY"

Tesis presentada por la Bachiller:
Noelia Noemi Delgadillo Rodriguez
Para optar el Grado Académico de Maestra en Ciencias: Matemáticas, con mención en Matemática Universitaria Superior

ASESOR: Dr. Dugán Paúl Nina Ortiz

AREQUIPA- PERÚ

2019

“BUENA COLOCACIÓN Y PROPIEDAD DE CONTINUACIÓN ÚNICA PARA LA ECUACIÓN BENJAMÍN BONA MAHONY”

Tesis presentada por:

Bach. Noelia Noemí Delgadillo Rodríguez

Jurado dictaminador:

Dr. Jesus Enrique Achire Quispe ________________________________

Mg. Roger Edwar Mestas Chávez ________________________________

Dr. Dugán Paúl Nina Ortiz (asesor) ________________________________

Agradecimientos

A Dios, por darme la vida, cuidarme y protegerme.

A mi familia por su apoyo incondicional, en todo sentido.

Deseo expresar mi agradecimiento a mi asesor de tesis el Dr. Dugán Paúl Nina Ortiz, por sus enseñanzas matemáticas quien me dirigió en la elaboración de este trabajo de investigación.

Resumen

La ecuación de onda larga Benjamín Bona Mahony (BBM):

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$$

se derivó como un modelo para la propagación unidireccional de crestas largas en ondas de agua superficiales. Surgió también, en otros contextos y generalmente se entiende como una alternativa de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV). Consideraremos el Problema de Valor Inicial (PVI) con valor inicial u_0 para $t = 0$, la investigación se hace en su desarrollo posterior para $t > 0$. Se prueba que este problema de valor inicial está bien colocado globalmente en el espacio de Sobolev L^2 de clase H^s con $s \geq 0$. Además, la aplicación que asocia la solución a los datos iniciales dados son suaves.

Por otro lado, si $s < 0$, se demuestra que la correspondencia entre los datos iniciales y las soluciones no pueden ser de clase C^2. Por lo tanto, se concluye que la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM) no puede resolverse mediante la iteración de una aplicación acotada que conduce a un punto fijo en el espacio básico H^s para $s < 0$. Esto nos lleva a suponer que el Problema de Valor Inicial para la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM) no está ni siquiera localmente bien colocada en H^s para valores negativos de s.

En particular, consideraremos la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM) en el toro unidimensional. Probaremos una Propiedad de Continuación Única (UPC) para datos pequeños en $H^1(\mathbb{T})$ no negativos.

Palabras clave: Transformada de Fourier, ecuación Korteweg–de Vries, existencia y unicidad, ecuación Benjamín Bona Mahony y propiedad de continuación única.

ABSTRACT

The regularized long-wave or BBM equation:

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$$

was derived as a model for the unidirectional propagation of long-crested, surface water waves. It arises in other contexts as well, and is generally understood as an alternative to the Korteweg-de Vries equation. Considered here is the Initial-Value Problem wherein u is specified everywhere at a given time $t = 0$, say, and inquiry is then made into its further development for $t > 0$. It is proven that this initial-value problem is globally well posed in the L^2-based Sobolev class H^s if $s \geq 0$. Morever, the map that associates the revelant solution to given initial data is shown to be smooth. On the other hand, si $s < 0$, it is demonstrated that the correspondence between initial data and putative solutions cannot be even of class C^2. Hence, it is concluded that the BBM equation cannot be solved by iteration of a bounded mapping leading to a fixed point in H^s-based spaces for $s < 0$. One is thus led to surmise that the initial-value problem for the BBM equation not even locally well posed in H^s for negative values of s.
In particular, we consider the Benjamín-Bona-Mahony (BBM) equation on the one-dimensional torus. We prove a Unique Continuation Propety (UPC) for mall data in $H^1(\mathbb{T})$ with nonnegative zero means.
Keywords: The Fourier transform, Korteweg–de Vries equation, existence and uniqueness, Benjamín Bona Mahony equation and unique continuation property.

Índice general

Introducción

La propagación de onda larga unidireccional de pequeña amplitud en medios dispersos no lineales a veces se aproximan bien por la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) o su contraparte regularizada, la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM) (ver Bona, Pritchard & Scott (1981); Hammack & Segur (1974); Zabusky & Galvin (1971)). Comenzando en la segunda mitad de 1960 y 1970, la teoría matemática para tales ecuaciones de ondas dispersivas no lineales paso a primer plano como un tema principal dentro del análisis no lineal. Se ha dedicado mucho esfuerzo en varios aspectos de los problemas de valor inicial.

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

o

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \tag{2}$$

con

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{3}$$

Aunque estas no son siempre las formulaciones más relevantes físicamente (ver las discusiones en Bona & Bryant (1973); Bona, Chen, Sun & Zhang (2005); Bona, Chen, Sun & Zhang (2007); Bona, Pritchard & Scott (1981); Bona, Sun & Zhang (2002)). Para la ecuación Kortewerg-de Vries (KdV) (1), la teoría reciente ha demostrado que el Problema de Valor Inicial esta globalmente bien colocado en el espacio de Sobolev L^2 de clase H^s si $s > -3/4$ (ver Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka & Tao (2003)). Este resultado, es claro en el sentido de que debajo del valor de s, el Problema de Valor Inicial no puede ser resuelto por la iteración de Picard, como se muestra en el trabajo reciente de Christ, Colliander & Tao (2003); Kenig, Ponce & Vega (2001); Bourgain (1997); Tzvetkov (1999). La perspectiva a la vista aquí es una teoría similar para el Problema de Valor Inicial en (2) y (3).

Primero, estableceremos que la ecuación (2) esta globalmente bien colocada en todo H^s provisto solo de $s \geq 0$. Sea $\mathcal{U}$ la aplicación que asocia a una función dada $u_0 = u_0(x)$ la solución única $u = u(t, x)$ de (2) con el dato inicial. La prueba de la buena colocación local lleva a la conclusión de que $\mathcal{U}$ es suave como una aplicación de los espacios de Banach relevantes.

En segundo lugar, demostraremos que cuando se considera como una aplicación de H^s para $s < 0$, $\mathcal{U}$ no puede ser incluido en C^2. Por lo tanto, se proyecta que $s = 0$, sea el valor agudo para el cual está bien colocado y se cumple para (2).

Previamente, el problema de valor inicial para (2) es conocido por ser globalmente bien colocado en H^k para enteros $k > 1$ (ver Benjamin, Bona & Mahony (1972)). El argumento para la buena colocación local en L^2 sigue el análisis de los sistemas de Boussinesq por Bona, Chen & Saut (2002). Nuestro resultado se sigue de una elaboración de su argumento usando una descomposición de la longitud de onda corta y larga como en Bourgain (1998).

La analiticidad de la solución es una consecuencia de la teoría de la existencia local, pero parece que no se ha observado en la literatura. Para (1) la analiticidad de la solución se estableció por primera vez por Zhang (1995).

La Propiedad de Continuación Única (UCP) de la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM), cumple con algunas clases X de funciones si, dado cualquier subconjunto abierto no vacío $w \subset \mathbb{T}$, la única solución $u \in X$ de (2) satisface:

$$u(x,t) = 0 \text{ para } (x,t) \in w \times (0,T)$$

es la solución trivial $u \equiv 0$. Esta propiedad es muy importante en la teoría de control, ya que es equivalente a la controlabilidad aproximada para las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) lineales y estas envuelven argumentos clásicos de compacidad y unicidad en la prueba de estabilidad para una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) con disipación localizada.

La Propiedad de Continuación Única (UCP) generalmente se prueba con la ayuda de una estimativa de Carleman (ver Saut & Scheurer (1987)). La Propiedad de Continuación Única (UCP) para la ecuación KdV fue establecido en Zhang (1992) por el enfoque de dispersión inversa en Escauriaza, Kenig, Ponce & Vega (2007); Rosier & Zhang (2006), Saut & Scheurer (1987).

Para la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM) el estudio de la Propiedad de Continuación Única (UCP) está solo en su temprana edad. La razón principal es que ambos x=contante y t=constante son líneas características para (2). Por lo tanto el problema de Cauchy en la Propiedad de Continuación Única (UCP) (asumimos que $u = 0$ para $x \leq 0$ y resolviendo la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM) para $x \geq 0$) es característica, lo que impide aplicar el teorema de Holmgren incluso para la ecuación linealizada. El enfoque de Carleman para la Propiedad de Continuación Única (UCP) de la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM) se desarrolló en Davila & Perla Menzala (1998) y en Yamamoto (2003). Lamentablemente, los teoremas (3.1)-(3.4) en Davila & Perla Menzala

(1998), no son correctos sin suposiciones adicionales, como se notó en Zhang & Zuazua (2003). Por otro lado, la Propiedad de Continuación Única (UCP) en Yamamoto (2003) para la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM) es:

$$u_x - u_{txx} = p\,(x,t)\,u_x + q\,(x,t)\,u; \quad x \in (0,1)\,, t \in (0,T)$$

donde $p \in L^{\infty}\left(0,T,L^{\infty}\left(0,1\right)\right)$ $q \in L^{\infty}\left(0,t,L^{2}\left(0,1\right)\right)$ requiere $u\,(1,t) = u_x\,(1,t) = 0$ para $t \in (0,T)$ y

$$u\,(x,0) = 0 \ \text{ para } \ x \in (0,1) \tag{4}$$

(Note que, sin embargo no se requiere nada para $u(0,t)$). Debido a Bona & Tzvetkov (2009), tal Propiedad de Continuación Única (UCP) no se puede usar en el problema de estabilización. Podemos decir que la ecuación linealizada Benjamín Bona Mahony (BBM) con funciones potenciales depende solo de x. Se demostró en Micu (2001), que la única solución $u \in C\left([0,T]\,;H^{1}\left(0,1\right)\right)$ de la ecuación linealizada Benjamín Bona Mahony (BBM) es:

$$u_t - u_{txx} + u_x = 0 \qquad x \in (0,1)\,, t \in (0,T) \tag{5}$$

$$u\,(0,t) = u\,(1,t) = 0 \qquad\qquad t \in (0,T) \tag{6}$$

cumpliendo $u_x\,(1,t) = 0$ para todo $t \in (0,T)$ es la solución trivial $u \equiv 0$. Vale la pena notar que la prueba de ese resultado se usó fuertemente en el hecho de que las soluciones de (5)-(6) son analíticas en el tiempo. Por otro lado, varios resultados de la Propiedad de Continuación Única (UCP) difíciles basados en el análisis espectral se dan en Zhang & Zuazua (2001-2002) y Zhang & Zuazua (2003), para el sistema

$$u_t - u_{txx} = \left[\alpha\,(x)\,u\right]_x + \beta\,(x)\,u, \qquad x \in (0,1)\,, t \in (0,T) \tag{7}$$

$$u\,(0,t) = u\,(1,t) = 0 \qquad\qquad t \in (0,T) \tag{8}$$

Como se notó en Zhang & Zuazua (2003), la Propiedad de Continuación Única (UCP) falla para (7)-(8) cuando tanto α y β ($\alpha = 1, \beta = 1$) son nulos en algún conjunto abierto $w \in \mathbb{T}$ de modo que la Propiedad de Continuación Única (UCP) depende no solo de la regularidad de las funciones α y β también dependen del conjunto donde son nulos. El enfoque que Bourgain (1997), de Bourgain para la Propiedad de Continuación Única (UCP) de KdV o de la ecuación de Schrodinger no Lineal (NLS) está basada en el hecho de que la transformada de Fourier de una función con soporte compacto se extiende a una función entera de tipo exponencial. La prueba de la Propiedad de Continuación Única (UCP) en Bourgain (1997), se basa en estimaciones de altas frecuencias usando la propiedad intuitiva de que el término no lineal en la fórmula de Duhamel es perturbativa. Como notamos en Mammeri (2009), ese argumento no parece ser aplicable a la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM). En realidad, seguimos la idea de Bourgain para la ecuación linealizada Benjamín Bona Mahony (BBM):

$$u_t - u_{txx} + u_x = 0 \tag{9}$$

sobre $\mathbb{R}$ y asumimos que alguna solución u desaparece para $|x| > 1$ y $t \in (0, T)$ entonces su transformada de Fourier en x, es:

$$\widehat{u}(\xi, t) = \exp\left(\frac{-it\xi}{\xi^2 + 1}\right)\widehat{u}(\xi, 0), \quad \xi \in \mathbb{R}\ t \in (0, T)$$

La consideración de altas frecuencias es inútil aquí. Por continuidad analítica, la ecuación anterior aún se cumple para todo $\xi = \xi_1 + i\xi_2 \in \mathbb{C} - \{\pm i\}$. Escogiendo cualquier $t > 0$ $\xi_1 = 0$ y haciendo $\xi_2 \to 1^-$ inmediatamente inferimos que $\partial_\xi^n \widehat{u}(i, 0) = 0$ para todo $n \geq 0$ así que $\widehat{u}(\cdot, 0)$ por lo tanto $u \equiv 0$. Notar que

$$\partial_\xi^n \widehat{u}(i, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)(-ix)^n e^x dx \tag{10}$$

y que se puede demostrar por inducción en n, que todos los momentos:

$M_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)(-ix)^n e^x dx$, desaparecen en $(0, T)$ así que $u \equiv 0$

No podemos modificar el argumento anterior para probar la Propiedad de Continuación Única (UCP) de la ecuación completa Benjamín Bona Mahony (BBM), como el término no lineal, no tiene ninguna razón para ser perturbado en las frecuencias pequeñas $\xi = \pm i$. Señalamos que un enfoque de momentos, inspirado en el artículo Constantin (2005), que se refiere a la Propiedad de Continuación Única (UCP) de la ecuación Camassa-Holm (ver también Himonas, Misiolek, Ponce & Young Zhou (2007)). Sin embargo, se aplicó en Mammeri (2009), para demostrar la Propiedad de Continuación Única (UCP) para la ecuación de Kadomtsev-Perviashvili (KP)-BBM-II.

Aplicaremos el enfoque de momentos para probar la Propiedad de Continuación Única (UCP) para una ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM) generalizada

$$u_t - u_{txx} + [f(u)]_x = 0$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es suave y no negativo. La elección $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$ da la llamada ecuación Morrison-Meiss-Carey (MMC) (también llamada la ecuación de onda de igual ancho, ver Hamdi, Enright, Schiesser & Gottlieb (2004), Morrison, Meiss & Carey (1984)).

Incorporando una disipación localizada en la ecuación anterior obtenemos la ecuación:

$$u_t - u_{txx} + [f(u)]_x + a(x)u = 0; \quad x \in T$$

cuyas soluciones demostraron que tienden débilmente a 0 en $H^1(\mathbb{T})$ cuando $t \to \infty$. Tengamos en cuenta que se probaron resultados similares en Larkin and Vishnevskii (2008), con una disipación en la frontera.

El enfoque de Bourgains, en su forma analítica original y compleja se puede usar para derivar la Propiedad de Continuación Única (UCP) para la siguiente ecuación de tipo Benjamín Bona Mahony (BBM):

$$u_t - u_{txx} + u_x + (u.u)_x = 0$$

en el cual, el término (no local) $(u.u)_x$ es sustituido por el término no lineal clásico $u.u_x$ en la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM).

Para la ecuación original Benjamín Bona Mahony (BBM) (2) obtenemos una Propiedad de Continuación Única (UCP) para soluciones que se deriven de datos iniciales que son lo suficientemente pequeños en $H^1(\mathbb{T})$ y con valores medios no negativos.

La prueba, que recuerda mucho al principio de invariancia de La Salle, combinara la analiticidad en el tiempo de las soluciones de la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM) la existencia de tres invariantes de movimiento y el uso de alguna función apropiada de Lyapunov.

El presente trabajo se ha estructurado en tres capítulos. En el primer capítulo recopilamos información preliminar para poder estudiar la existencia, unicidad y Propiedad de Continuación Única para la ecuación Benjamín Bona Mahony.

En el segundo capítulo se estudiará la buena colocación de la ecuación Benjamín Bona Mahony en el espacio H^s; para $s \geq 0$.

Finalmente, en el tercer capítulo se estudiará la Propiedad de Continuación Única en el toro unidimensional.

El objetivo general del presente trabajo es: Estudiar la buena colocación de la ecuación Benjamín Bona Mahony y su Propiedad de Continuación Única.

Mientras que los objetivos especificos son:

- Conocer conceptos básicos de espacios de Sobolev, análisis funcional y teoría de semigrupos para las ecuaciones de evolución en derivadas parciales.
- Estudiar la buena colocación de la ecuación Benjamín Bona Mahony en $H^s(\mathbb{T})$.
- Estudiar la Propiedad de Continuación Única de la ecuación Benjamín Bona Mahony en $H^s(\mathbb{T})$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos algunas definiciones básicas e importantes para el desarrollo del presente trabajo.

1.1. Desigualdades importantes

A continuación, presentaremos algunas desigualdades que serán de ayuda en el desarrollo posterior de este trabajo.

Proposición 1.1 *(Desigualdad de Young) Sean a, b, p y q números positivos tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Entonces se cumple la siguiente desigualdad*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.1}$$

Demostración. La aplicación $x \to e^x$ es convexa, así tenemos que

$$ab = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Luego

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

■

Lema 1.1 *(Desigualdad de Young con ϵ) Para a, b, ϵ positivos, se cumple que*

$$ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^q$$

donde $C_\epsilon = (\epsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$

Demostración. Aplicar la desigualdad de Young en

$$ab = \left((\epsilon p)^{\frac{1}{p}}\, a\right)\left(\frac{b}{(\epsilon p)^{\frac{1}{p}}}\right)$$

■

Proposición 1.2 *Sean dos números reales $a, b \geq 0$. Para todo $s \geq 0$, existen constantes positivas m_s y M_s dependiendo apenas de s, tales que*

$$m_s\left(a^s + b^s\right) \leq (a+b)^s \leq M_s\left(a^s + b^s\right) \tag{1.2}$$

Demostración. Si $a = 0$ no hay nada que probar. Asumamos $a > 0$, la desigualdad (1.2) es equivalente a la desigualdad

$$m_s\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^s\right] \leq \left(1 + \frac{b}{a}\right)^s \leq M_s\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^s\right] \tag{1.3}$$

Por lo tanto, es suficiente probar que existen constantes positivas m_s y M_s tales que

$$m_s\left(1 + r^s\right) \leq (1+r)^s \leq M_s\left(1 + r^s\right) \tag{1.4}$$

para todo $r > 0$. En efecto, consideremos la función

$$F(r) = \frac{(1+r)^s}{1+r^s}$$

Observe que para todo $r, s > 0$ tenemos que $1 \leq (1+r)^s$ y $r^s \leq (1+r)^s$. Luego, $1 + r^s \leq 2(1+r)^s$, consecuentemente

$$\frac{1}{2} \leq \frac{(1+r)^s}{1+r^s} \tag{1.5}$$

Por otro lado, para $r > 1$ se tiene $(1+r)^s \leq (r+r)^s = (2r)^s$. Por tanto,

$$(1+r)^s \leq 2^s\left(1 + r^s\right), \text{ esto es, } \frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq 2^s$$

La función $F(r)$ es continua en $[0, 1]$ y no se anula en ese intervalo, luego, existe $\mu_s = \max\limits_{r \in [o,1]}\left\{\frac{(1+r)^s}{1+r^s}\right\}$. Tomando $M_s = \min\left\{2^s, \mu_s\right\}$, vemos que

$$\frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq M_s \tag{1.6}$$

de las desigualdades (1.5) y (1.6) concluimos que

$$\frac{1}{2} \leq F(r) \leq M_s$$

■

Proposición 1.3 *(Desigualdad de Gronwall) Sea $f : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ una función continua no negativa. Supongamos además que existen constantes no negativas a y b tales que*

$$f(t) \leq b + a \int_{t_0}^{t} f(s)ds \tag{1.7}$$

para todo $t_o \leq t \leq T$. Entonces, vale la desigualdad $f(t) \leq be^{a(t-t_0)}$, para todo $t_o \leq t \leq T$.

Demostración. Sea $F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$. Si $t \in [t_0, T]$, entonces por el teorema fundamental del cálculo y por (1.7) tenemos

$$F'(t) \leq f(t) \leq b + aF(t)$$

Integrando esta desigualdad en $[t, t_0]$ obtenemos

$$\frac{1}{a} \ln\left(\frac{b + aF(t)}{b}\right) \leq t - t_0$$

Por lo tanto, $f(t) \leq b + aF(t) \leq be^{a(t-t_0)}$. ■

1.2. Elementos de análisis funcional

Ahora daremos algunas definiciones de análisis funcional, así como la definición de los espacios $L^p(I)$, donde I es un intervalo de recta o $I = \mathbb{R}$.

Definición 1.1 *Sean $1 \leq p \leq \infty$ e $I \subseteq \mathbb{R}$. Denotaremos por $L^p(I)$ el conjunto de todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ medibles según Lebesgue, tales que*

$$\|f\|_{L^p(I)} = \begin{cases} \left(\int_I |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty, & si\ 1 \leq p < \infty, \\ \text{ínf}\{r : |f(x)| \leq r,\ c.t.p.\ x \in I\} < \infty, & si\ p = \infty \end{cases} \tag{1.8}$$

Si $I = \mathbb{R}$ denotamos $\|\cdot\|_{L^p} = \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

Los espacios $L^p(I)$ son espacios de Banach y en particular $L^2(I)$ es un espacio de Hilbert con relación al producto interno

$$\langle u, v\rangle_{L^2(I)} = \int_I u(x)\, v(x)\, dx$$

Ahora enunciaremos un resultado importante.

Teorema 1.1 *(Desigualdad de Hölder) Sean $p, q \geq 1$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, I un intervalo o $\mathbb{R}$. Si $f \in L^p(I)$, $g \in L^q(I)$, entonces $fg \in L^1(I)$ y vale la desigualdad*

$$\|fg\|_{L^1(I)} \leq \|f\|_{L^p(I)} \|g\|_{L^q(I)} \tag{1.9}$$

Demostración. Si $p = 1$ entonces $q = \infty$, $p = \infty$ de donde $q = 1$ tenemos

$$\int_I |f(x)\, g(x)|\, dx = \int_I |f(x)| \sup_{x \in I} |g(x)|\, dx \leq \|g\|_\infty \int_I |f(x)|\, dx$$

$$\int_I |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \|g\|_\infty \|f\|_1 \tag{1.10}$$

Veamos el caso $1 < p < \infty$. Debemos recordar la desigualdad de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \text{ para todo } a, b \geq 0$$

Considere $a = |f(x)|$, $b = |g(x)|$ entonces

$$|f(x)\, g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q$$

Integrando tenemos

$$\int_I |fg|\, dx \leq \frac{1}{p} \underbrace{\int_I |f(x)|^p\, dx}_{<\infty} + \frac{1}{q} \underbrace{\int_I |g(x)|^q\, dx}_{<\infty} \tag{1.11}$$

Luego $fg \in L^1(I)$.

Ahora, en lugar de considerar f usamos λf , con $\lambda > 0$

$$\lambda \int_I |fg|\, dx \leq \frac{\lambda^p}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|g\|_q^q$$

Luego

$$\int_I |fg|\, dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{\lambda q} \|g\|_q^q \tag{1.12}$$

Tomemos

$$\frac{\lambda^{p-1}}{p} = \frac{\|g\|_q}{2\|f\|_p^{p-1}} \text{ entonces } \lambda^{p-1} = \frac{p\|g\|_q}{2\|f\|_p^{p-1}}$$

$$\lambda = \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{\|g\|_q^{\frac{1}{1-p}}}{\|f\|_p} \text{ entonces } \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{\|f\|_p}{\|g\|_q^{\frac{1}{p-1}}}$$

de donde

$$\frac{1}{\lambda q}\|g\|_q^q = \frac{1}{q}\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{1-p}} \frac{\|f\|_p}{\|g\|_q^{\frac{1}{p-1}}}\|g\|_q^q \tag{1.13}$$

Reemplazando (1.13) en (1.12) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_I |fg|\,dx &\leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q\lambda}\|g\|_q^q \\
&< \frac{1}{2}\|f\|_p\|g\|_q + \frac{1}{2}\|f\|_p\|g\|_q^{q-\frac{1}{p-1}} \\
&= \frac{1}{2}\|f\|_p\|g\|_q + \frac{1}{2}\|f\|_p\|g\|_q^{\frac{pq-q-1}{p-1}} \\
&= \|f\|_p\|g\|_q
\end{aligned}$$

Estamos usando el hecho que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ implica $p = pq - q$. ■

Teorema 1.2 *(Desigualdad de interpolación) Suponga $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, con $p < q$ entonces $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ para todo $r \in [p, q]$. Además*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Demostración. Note que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{p}{\theta}} + \frac{1}{\frac{q}{1-\theta}} \text{ entonces } 1 = \frac{1}{\frac{p}{r\theta}} + \frac{1}{\frac{q}{r(1-\theta)}}$$

Llamemos $p' = \frac{p}{r\theta'}$, $q' = \frac{q}{r(1-\theta)}$ entonces $1 = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}$.

Por otro lado, dado que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $f^{r\theta} \in L^{\frac{p}{r\theta}}(\mathbb{R}^n) = L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

Analogamente, dado que $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces $f^{(1-\theta)r} \in L^{\frac{q}{(1-\theta)r}}(\mathbb{R}^n) = L^{q'}(\mathbb{R}^n)$. Aplicando el teorema de Hölder para p', q' obtenemos

$$|f|^{r\theta}|f|^{(1-\theta)r} = |f|^r \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Así,

$$\||f|^r\|_1 \leq \left\||f|^{r\theta}\right\|_{p'} \left\||f|^{(1-\theta)r}\right\|_{q'}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|f\|_r^r &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{r\theta p'}\, dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{(1-\theta)rq'}\, dx\right)^{\frac{1}{q'}} \\
\|f\|_r^r &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p}\, dx\right)^{\frac{r\theta}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{q}\, dx\right)^{\frac{r(1-\theta)}{q}} \\
\|f\|_r &\leq \|f\|_p^{\theta} \|f\|_q^{1-\theta}
\end{aligned}$$

■

Definición 1.2 *(funciones débilmente continuas) Sean X espacio de Banach y $T > 0$. Definimos el espacio de las funciones débilmente continuas como el espacio vectorial de las (clases de) funciones $L^\infty([0,T];X)$ tal que, $u : [0,T] \to X$ es una aplicación $t \to \langle \varphi, u(t) \rangle$ es continua en $[0,T]$ de $\mathbb{R}$, para todo $\varphi \in X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Este espacio sera denotado por $C_\omega([0,T];X)$.*

A continuación enunciaremos un resultado importante cuya demostración se encuentra en Rudin (1979).

Teorema 1.3 *(Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles sobre X, y supongamos que*

a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq \infty$ *para todo* $x \in X$.

b) $f_n \to f(x)$ *cuando* $n \to \infty$, *para todo* $x \in X$.

Entonces f es medible, y

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu \text{ cuando } n \to \infty$$

Teorema 1.4 *Si $1 \leq p \leq \infty$ y $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$, con límite f, entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión que converge puntualmente casi en todo punto a f.*

1.3. Convergencia en un espacio normado

Sea N un espacio normado con norma $\|\cdot\|_N$. Por N' denotamos el dual topológico de N, que es el conjunto de todos los funcionales lineales y continuos definidos en N. Luego en N' definimos la norma

$$\|f\|_{N'} = \sup\{|\langle f, \xi\rangle|\,; \xi \in N; \|\xi\| = 1\}$$

con la cual N' es un espacio de Banach. Ahora podemos introducir las siguientes definiciones de convergencia.

Definición 1.3 *(Convergencia fuerte) Decimos que la sucesión $(\xi_n)_{n\geq 1} \subset N$ converge fuertemente a ξ en N o simplemente $(\xi_n)_{n\geq 1}$ converge a ξ en N, y denotamos $\xi_n \to \xi$ en N cuando*

$$\|\xi_n - \xi\|_N \to 0$$

Definición 1.4 *(Convergencia débil) Decimos que $(\xi_n)_{n\geq 1} \subset N$ converge débilmente a ξ en N, y denotamos $\xi_n \rightharpoonup \xi$ cuando*

$$\langle f, \xi_n\rangle \to \langle f, \xi\rangle\,,\ \textit{para todo}\ \ f \in N'$$

Ahora, sean $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos de N' y $f \in N'$.

Definición 1.5 *(Convergencia débil*) Decimos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge débil estrella a f en N', denotamos $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en N' cuando*

$$\langle f_n, \xi\rangle \to \langle f, \xi\rangle\,,\ \textit{para todo}\ \ \xi \in N$$

Es posible definir una topología en N llamada topología débil que induce la convergencia débil enunciada en la definición (1.4). También se puede definir una topología en N' llamada topología débil* que induce la convergencia débil*. Cuando se procede de esta forma, las convergencias numéricas usadas en las definiciones anteriores pasan a ser una consecuencia de la manera como las topologías son definidas.

Uno de los motivos para definir la topología débil* es el teorema de Alaoglu. Si $dim N' = \infty$ se sabe que $\overline{B}_{N'}(0,1)$ no es compacta en la topología usual de N'. Sin embargo, se tiene el siguiente teorema cuya demostración se encuentra en Oliveira (2008).

Teorema 1.5 *(Alaoglu) Si N es un espacio normado, entonces la bola cerrada $\overline{B}_{N'}(0,1)$ es compacta en la topología débil*.*

Las relaciones principales entre estas convergencias serán indicadas en la siguiente proposición cuya demostracion se encuentra en Oliveira (2008).

Proposición 1.4 *Sean $(\xi_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos en N, $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos en N', $\xi \in N$, y $f \in N'$. Se cumple:*

i) Si $\xi_n \to \xi$ en N entonces $\xi_n \rightharpoonup \xi$ en N,

ii) Si $\xi_n \rightharpoonup \xi$ en N entonces $\|\xi\|$ es limitada y $\|\xi\| \leq \liminf_n \|\xi\|$,

iii) Si $\xi_n \rightharpoonup \xi$ en N y $f_n \to f$ en N' entonces $\langle f_n, \xi_n \rangle \to \langle f, \xi \rangle$,

iv) Si $f_n \rightharpoonup f$ en N' entonces $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en N',

v) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en N' y $\xi_n \to \xi$ en N , entonces $\langle f_n, \xi_n \rangle \to \langle f, \xi \rangle$,

vi) Si N es un espacio de Hilbert entonces $\xi_n \to \xi$ en N si y solamente si $\xi_n \rightharpoonup \xi$ en N y $\|\xi_n\| \to \|\xi\|$.

1.4. Distribuciones

Enunciaremos algunas distribuciones que nos serán útiles.

Definición 1.6 *Una función real f de clase C^∞ definida en $\mathbb{R}$ está en el espacio de Schwartz si para todo par de números enteros no negativos m y n existe una constante $C_{m,n}$ tal que*

$$p_{m,n}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^m f^{(n)}(x) \right| \leq C_{m,n} < \infty \tag{1.14}$$

Denotaremos por $S(\mathbb{R})$ al conjunto de las funciones que pertenecen al espacio de Schwartz.

Definición 1.7 *Decimos que una sucesión $(\varphi_j)_{j \geq 1} \subset S(\mathbb{R})$ converge a cero, si para todo $m, n \in \mathbb{N}_0$ tenemos*

$$p_{m,n}(\varphi_j) \to 0 \text{ cuando } j \to \infty$$

Si $\varphi \in S(\mathbb{R})$ decimos que la sucesión $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ de elementos en $S(\mathbb{R})$ converge a φ en $S(\mathbb{R})$, cuando la sucesión $(\varphi_j - \varphi)_{j \geq 1}$ converge a cero en el sentido dado en la definición (1.7).

Las formas lineales definidas en $S(\mathbb{R})$ continuas en el sentido de la convergencia definida en $S(\mathbb{R})$, se denominan distribuciones temperadas. El espacio vectorial de todas las distribuciones temperadas con la convergencia puntual de sucesiones será representado por $S'(\mathbb{R})$. Así

$$\lim_{j \to \infty} T_j = T \text{ en } S'(\mathbb{R}) \text{ si } \lim_{j \to \infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Ahora enunciamos un resultado importante para estimar derivadas de funciones en $L^p(\mathbb{R})$ la cual nos será útil durante el desarrollo posterior del trabajo cuya demostración se encuentra en Friedman (1976).

Proposición 1.5 *(Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg). Sean $q, r \in [1, +\infty)$ y además $j, m \in \mathbb{N}_0$, tales que $0 \leq j \leq m$. Entonces*

$$\left\| f^{(j)} \right\|_{L^p} \leq c\,(j, m, q, r, \theta)\, \| f^m \|_{L^q}^{\theta}\, \| f \|_{L^r}^{1-\theta} \tag{1.15}$$

para todo $\theta \in \left[\frac{1}{m}, 1\right]$ y p satisfaciendo

$$\frac{1}{p} = j + \theta \left(\frac{1}{q} - m \right) + (1 - \theta) \frac{1}{r}$$

En seguida enunciaremos un resultado cuya demostración se encuentra en Evans (2010).

Teorema 1.6 *Sea $1 \leq p \leq \infty$. La aplicación inclusión*

$$i : S(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$$

$$\varphi \to i(\varphi) = \varphi$$

es continua y densa, esto es,

i) $S(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$,

ii) $\overline{S(\mathbb{R})} = L^p(\mathbb{R})$, *donde la clausura es considerada en la norma* $\|\cdot\|_{L^p}$,

iii) *Existen constantes positivas $C_{m,n}, M, N, C := \sup\{C_{m,n} : 1 \leq m \leq M; 1 \leq n \leq N\}$ tales que*

$$\|\varphi\|_{L^p} \leq C \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} p_{m,n}(\varphi)\,, \text{ para cada } \varphi \in S(\mathbb{R}) \tag{1.16}$$

1.5. La transformada de Fourier

Esta transformada es una herramienta muy útil para resolver ecuaciones en derivadas parciales. La idea es transformar un problema complicado en otro más fácil de resolver y luego obtener la solución del problema original a través de la transformada de Fourier inversa de la solución del problema transformado.

Definición 1.8 *Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, se define formalmente su transformada de Fourier como la función de variable real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definida como:*

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx, \; \xi \in \mathbb{R} \tag{1.17}$$

Observación 1.1 *La definición anterior es formal en el sentido de que la integral que aparece en dicha definición no existe para un f cualquiera. La convergencia de dicha integral está garantizada en caso de ser f absolutamente integrable, es decir, si consideramos el espacio:*

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty \right\}$$

entonces la transformada de Fourier de f está bien definida siempre que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Recordemos que $L^1(\mathbb{R})$, equipado de la norma

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

es un espacio de Banach. En realidad, la integral que aparece en (1.17) no se extiende en sentido de Riemann impropio sino en el sentido de Lebesgue.

A continuación enunciamos algunas de las propiedades básicas de la transformada de Fourier en el espacio de Schwartz dada por Grafakos (2008).

Proposición 1.6 *Sean f, g en $S(\mathbb{R})$ y $\in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ y $t > 0$, entonces se cumple:*

i) $\left\| \widehat{f} \right\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$,

ii) $\widehat{f + g} = \widehat{f} + \widehat{g}$,

iii) $\widehat{bf} = b\widehat{f}$,

iv) $\left(f^{(m)}\right)(\xi) = (2\pi i \xi)^m \widehat{f}(\xi)$,

v) $\widehat{f} \in S(\mathbb{R})$.

Además, podemos enunciar algunas propiedades adicionales para la transformada de Fourier.

a) Translación cambio de escala: Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, entonces la función $g(x) = f(ax + b)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ y además,

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\xi b}{a}} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

b) Formula de Modulación: Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces la función $e^{iax} f \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$[\widehat{e^{iax} f(x)}](\xi) = \widehat{f}(\xi - a)$$

Enunciaremos algunos teoremas cuyas demostraciones pueden encontrar en Rudin (1979).

Teorema 1.7 *Supongamos que $f \in L^1$, y que α y λ son números reales.*

a) *Si $g(x) = f(x)\, e^{i\alpha x}$, entonces $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t-\alpha)$,*

b) *Si $g(x) = f(x-\alpha)$, entonces $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t)\, e^{i\alpha t}$,*

c) *Si $g \in L^1$ y $h = f * g$, entonces $\widehat{h}(t) = \widehat{f}(t)\,\widehat{g}(t)$,*

Por tanto, la transformada de Fourier convierte la mutiplicación por un caracter de traslación, y viceversa, y convierte convoluciones en productos puntuales.

d) *Si $g(x) = \overline{f(-x)}$, entonces $\widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$,*

e) *Si $g(x) = f(x/\lambda)$ y $\lambda > 0$, entonces $\widehat{g}(t) = \lambda \widehat{f}(\lambda t)$,*

f) *Si $g(x) = -ixf(x)$ y $g \in L^1$, entonces $\widehat{f}$ es diferenciable y $\widehat{f}'(t) = \widehat{g}(t)$.*

Teorema 1.8 *Para cualquier función f sobre $\mathbb{R}$ y todo $y \in \mathbb{R}$, sea f la trasladada de f definida mediante*

$$f_y(x) = f(x-y), \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.18}$$

Si $1 \leq p < \infty$ y si $f \in L^p$, la aplicación

$$y \to f_y \tag{1.19}$$

es una aplicación uniformemente continua de $\mathbb{R}$ en $L^p(\mathbb{R})$.

Proposición 1.7 *Si $f \in L^1$, entonces*

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\, \widehat{f}(t)\, e^{ixt} dm(t)$$

Teorema 1.9 *Si $g \in L^\infty$ y g es continua en un punto x, entonces*

$$\lim_{\lambda \to 0} (g * h_\lambda)(x) = g(x)$$

Teorema 1.10 *Si $1 \leq p < \infty$ y si $f \in L^p$, entonces*

$$\lim_{\lambda \to 0} \|f * h_\lambda - f\|_p = 0 \tag{1.20}$$

Teorema 1.11 *(Teorema de inversión) Si $f \in L^1$ y $\widehat{f} \in L^1$, y si*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\, e^{ixt} dm(t), \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.21}$$

entonces $g \in C_0$ y $f(x) = g(x)$ en casi todo punto (c.t.p.).

1.5.1. Producto de convolución

Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se define el producto de convolución de f y g como

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

siempre que la integral anterior exista. Una condición suficiente para la existencia de la convolución de dos funciones es que una de ellas este en $L^1(\mathbb{R})$ y la otra en $L^p(\mathbb{R})$ para algún $1 \leq p \leq \infty$. Luego aplicando la transformada de Fourier se tiene que

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = 2\pi \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi)$$

Hemos visto anteriormente que el dominio de la transformada de Fourier es el espacio de funciones $L^1(\mathbb{R})$. Ahora consideramos el espacio

$$C_{\infty}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ continua y } \underset{|x| \to \infty}{Lim} f(x) = 0 \right\}$$

el cual equipado con la norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup \{ |f(x)| : x \in \mathbb{R} \}$$

es un espacio de Banach. El resultado que sigue, establece que la transformada de Fourier del espacio $L^1(\mathbb{R})$ está contenida en $C_{\infty}(\mathbb{R})$.

A continuación enunciaremos el lema de Riemann-Lebesgue cuya prueba se encuentra en Rudin (1979).

Lema 1.2 *(Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f} \in C_{\infty}(\mathbb{R})$. Además,*

$$\left\| \widehat{f} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1$$

Ahora nos ocuparemos del problema de recuperar la función f a partir de su transformada de Fourier $\widehat{f}$. Para ello, dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ se define su transformada de Fourier inversa como

$$\overset{\vee}{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(\xi)\, d\xi$$

Teorema 1.12 *(Plancherel) Se puede asociar a cada $f \in L^2$ una función $\widehat{f} \in L^2$ tal que se verifican las siguientes propiedades:*

a) *Si $f \in L^1 \cap L^2$, entonces $\widehat{f}$ es la transformada de Fourier de f definida previamente.*

b) *Para toda $f \in L^2$, $\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \|f\|_2$.*

c) *La aplicación $f \to \widehat{f}$ es un isomorfismo de espacio de Hilbert de L^2 sobre L^2.*

d) *Existe la siguiente relación simétrica entre f y $\widehat{f}$; si*

$$\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ixt}dm(x) \qquad y \quad \psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(t)e^{ixt}dm(t)$$

entonces $\left\|\varphi_A - \widehat{f}\right\|_2 \to 0$ y $\|\psi_A - f\|_2 \to 0$ cuando $A \to \infty$.

Demostración. En efecto, nuestro primer objetivo es la relación

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \|f\|_2 \qquad \left(f \in L^1 \cap L^2\right) \tag{1.22}$$

Fijamos $f \in L^1 \cap L^2$, ponemos $\widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, y definimos $g = \left(f * \widetilde{f}\right)$. Entonces:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,\overline{f(-y)}dm(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\,\overline{f(y)}dm(y) \tag{1.23}$$

o

$$g(x) = (f_{-x},\ f) \tag{1.24}$$

donde el producto interior se toma en el espacio de Hilbert L^2 y f_{-x} denota una trasladada de f, como en el teorema (1.8). De ese teorema, $x \to f_{-x}$ es una aplicación continua de $\mathbb{R}$ en L^2, y la continuidad del producto interior implica en consecuencia que g es una función continua. La desigualdad de Schwarz muestra que

$$|g(x)| \leq \|f_{-x}\|_2\,\|f\|_2 = \|f\|_2^2 \tag{1.25}$$

de modo que g está acotada. Además $g \in L^1$ porque $f \in L^1$ y $\widetilde{f} \in L^1$. Como $g \in L^1$, podemos aplicar la proposición (1.7)

$$(g * h_\lambda)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\,\widehat{g}(t)\,dm(t) \tag{1.26}$$

puesto que g es continua y acotada, el teorema (1.9) expresa que

$$\lim_{\lambda\to 0}(g*h_\lambda)(0)=g(0)=\|f\|_2^2 \tag{1.27}$$

en el inciso d) del teorema 1.7 permite afirmar que $\widehat{g}=\left|\widehat{f}\right|^2\geq 0$, y como $H(\lambda t)$ crece hacia 1 cuando $\lambda\to 0$, el teorema de convergencia monotona proporciona

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda t)\,\widehat{g}(t)\,dm(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(t)\right|^2 dm(t) \tag{1.28}$$

entonces (1.26), (1.27), y (1.28) muestran que $\widehat{f}\in L^2$ y que verifica (1.22).

Para cualquier $A>0$, sea f_A el producto de f y de la función característica del intervalo $[-A,A]$. Si $f\in L^2$, entonces $\|f_A-f\|_2\to 0$ cuando $A\to\infty$. Además $f_A\in L^1\cap L^2$, y si φ_A se define como en d), tenemos $\varphi_A=\widehat{f_A}$, como $\{f_A\}$ es una sucesión de Cauchy en L^2, la relación (1.27) muestra que $\{\varphi_A\}$ es una sucesión de Cauchy en L^2 y como L^2 es completo, $\{\varphi_A\}$ converge a un elemento de L^2 cuando $A\to\infty$, que llamaremos $\widehat{f}$. Notemos que si $f\in L^1\cap L^2$, entonces $\varphi_A(t)$ converge puntualmente a la transformada de Fourier de f previamente definida, y este límite puntual coincide en c.t.p. con el límite en L^2 (teorema 1.4).

El dominio de la aplicación $f\to\widehat{f}$ se ha extendido ahora de $L^1\cap L^2$ a L^2. Más aun, (1.27) implica que $\|\varphi_A\|_2=\|f_A\|_2$, así que

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2=\lim_{A\to\infty}\|\varphi_A\|_2=\lim_{A\to\infty}\|f_A\|_2=\|f\|_2 \tag{1.29}$$

Hemos demostrado, pues a), b) y la primera mitad de d).

Introduzcamos la notación provisional de Φf en lugar de $\widehat{f}$. Entonces Φf es el límite de L^2, de las funciones φ_A, si $f\in L^2$, y Φ es una isometría de L^2 en L^2. Para $g\in L^2$, definamos análogamente Ψg como el límite de L^2 de las funciones

$$\int_{-A}^{A}g(t)\,e^{ixt}dm(t) \tag{1.30}$$

Entonces Ψ es una isometría de L^2 en L^2, puesto que $(\Psi g)(x)=(\Phi f)(-x)$. Si tanto f como $\widehat{f}$ están en $L^2\cap L^2$, se deduce del teorema 1.11 que

$$\Psi\Phi f=f \tag{1.31}$$

por la proposición (1.7), $f*h_\lambda$ satisface estos requisitos si $f\in L^1\cap L^2$ y $\lambda>0$. Por tanto,

$$\Psi\Phi(f*h_\lambda)=f*h_\lambda \tag{1.32}$$

cuando $\lambda \to 0$, $\|f * h_\lambda - f\|_2 \to 0$ (teorema 1.10), y como $\Psi\Phi$ es una isometría, obtenemos (1.31) para toda $f \in L^1 \cap L^2$. Como $L^1 \cap L^2$ es denso en L^2, (1.31) se verifica para toda $f \in L^2$. Esto demuestra la segunda mitad de d).

Pero la relación $\Psi\Phi g = g$ es también valida entonces para toda $g \in L^2$, puesto que los papeles de los operadores Φ y Ψ pueden obviamente intercambiarse. Esto dice, si $f = \Psi g$ entonces $g = \widehat{f}$. La aplicación $f \to \widehat{f}$ aplica, por tanto, L^2 sobre L^2.

Finalmente, la identidad

$$4f\overline{g} = |f+g|^2 - |f-g|^2 + i\,|f+ig|^2 - i\,|f-ig|^2 \tag{1.33}$$

muestra que toda isometría de L^2 sobre L^2 también preserva los productos interiores. En otras palabras, se verifica la formula de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\,\overline{\widehat{g}(t)}dm(t)$$

si $f \in L^2$ y $g \in L^2$.

Esto proporciona c) y completa la demostración. ■

Observación 1.2 *Como $L^1 \cap L^2$ es denso en L^2, las propiedades a) y b) determinan la aplicación $f \to \widehat{f}$ de manera única. La propiedad d) puede llamarse el teorema de Inversión en L^2.*

1.6. Espacios de Sobolev

Fijando $1 \leq p \leq \infty$, para k un entero no negativo, definimos ahora cierto espacio de funciones, cuyos miembros tienen derivada en el sentido de las distribuciones de varios ordenes pertenecientes a espacios $L^p(\mathbb{R})$.

Definición 1.9 *El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R})$ consiste de todas las funciones $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cada entero m con $m \leq k$, $D^m u$ existe en el sentido de las distribuciones perteneciendo a $L^p(\mathbb{R})$.*

Si $u \in W^{k,p}(\mathbb{R})$ definimos su norma por:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{m \leq k} \int_{-\infty}^{\infty} (D^m u(x))^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} : (1 \leq p \leq \infty) \\ \sum\limits_{m \leq k} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} ess\, |D^m u(x)|\, ; (p = \infty) \end{cases}$$

Definición 1.10 *Sea* $(u_m)_{m\geq 1}$, $u \in W^{k,p}(\mathbb{R})$. *Decimos que* $(u_m)_{m\geq 1}$ *converge para* u *en* $W^{k,p}(\mathbb{R})$, *escribimos*

$$u_m \to u, \ \ \text{en } W^{k,p}(\mathbb{R})$$

si

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R})} = 0$$

Enunciaremos el teorema de espacio de Sobolev como espacio de funciones cuya demostración puede encontrarse en Evans (2010).

Teorema 1.13 *(Espacio de Sobolev como espacio de funciones) Para cada* $k \geq 1$ *y* $1 \leq p \leq \infty$. *El espacio de Sobolev* $W^{k,p}(\mathbb{R})$ *es un espacio de Banach.*

El caso particular, $p = 2$ es útil en las aplicaciones y en este caso el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R})$ es representado por $H^k(\mathbb{R})$. El espacio $H^k(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar dado por

$$\langle u, v\rangle_{H^k} = \sum_{m\leq k} \langle D^m u, D^m v\rangle_{L^2}$$

para todo $u, v \in H^k(\mathbb{R})$ y se denomina espacio de Sobolev de orden k.

Definición 1.11 *Denotamos por* $W_0^{k,p}(\mathbb{R})$ *la cerradura de* $C_0^\infty(\mathbb{R})$ *en* $W^{k,p}(\mathbb{R})$.

Así, $u \in W_0^{k,p}(\mathbb{R})$ si y solo si existe una sucesión de funciones $(u_m)_{m\geq 1} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(\mathbb{R})$.

En el caso $p = 2$ vamos a denotar por $H_0^k(\mathbb{R}) = W_0^{k,2}(\mathbb{R})$.

Definición 1.12 *Sean* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $1 \leq q \leq \infty$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Representamos por* $W^{-k,q}(\mathbb{R})$ *al dual topológico de* $W^{k,p}(\mathbb{R})$.

El dual topológico de $H^k(\mathbb{R})$ se denota por $H^{-k}(\mathbb{R})$. A seguir otra caracterización de los espacios $H^m(\mathbb{R})$, m entero positivo.

En seguida enunciaremos algunas proposiciones cuyas demostraciones pueden encontrarse en Medeiros & Milla (2000).

Proposición 1.8 $H^m(\mathbb{R})$ *coincide con* $\left\{u \in S'(\mathbb{R}) ; \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R})\right\}$. *Definimos*

$$|||u|||_m = \left\| \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \widehat{u} \right\|_{L^2}$$

la aplicación $u \to |||u|||_m$ *de* $H^m(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ *es una norma equivalente a la norma de Sobolev* $\|.\|_{H^m}$.

Proposición 1.9 *$H^m(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert y $S(\mathbb{R})$ esta continuamente inmerso en $H^m(\mathbb{R})$, siendo allí denso.*

Sea $m \geq 0$ e $H^{-m}(\mathbb{R}) = (H^m(\mathbb{R}))'$ el dual de $H^m(\mathbb{R})$. De la proposición anterior resulta que:

$$S(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^m(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{-m}(\mathbb{R}) \hookrightarrow S'(\mathbb{R})$$

donde $\hookrightarrow$ representa la inmersión continua.

Denotamos por $\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R})}$ la norma de una forma lineal continua $f \in H^{-s}(\mathbb{R})$, esto es,

$$\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R})} = \sup\left\{|\langle f, u\rangle| : u \in H^s(\mathbb{R}), \|u\|_{H^s(\mathbb{R})} = 1\right\}$$

Proposición 1.10 *Son verdaderas las siguientes afirmaciones:*

i) $H^{-s}(\mathbb{R}) = \left\{f \in S'(\mathbb{R}) : \left(1+|x|^2\right)^{\frac{-s}{2}} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})\right\}$,

ii) $\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R})} = \left\|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{-s}{2}} \widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$ *para toda $f \in H^{-s}(\mathbb{R})$.*

1.6.1. Espacios $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$

Ahora definiremos los espacios $H^s(\mathbb{R}^n)$, cuando s es un real positivo. Consideremos la función $J_m = \left(1+\|x\|^2\right)^{m/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Notemos que $\widehat{u}$ estara representando la transformada de Fourier de u y $\overset{\vee}{u}$ la transformada de Fourier inversa.

La siguente proposición proporciona la norma en el espacio $H^s(\mathbb{R}^n)$ cuya demostración se encuentra en Medeiros & Milla (2008).

Proposición 1.11 *Si $H^m(\mathbb{R}^n)$ coincide con $\left\{u \in S'(\mathbb{R}^n) : \left(1+\|x\|^2\right)^{m/2}, \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$ y definiendo*

$$|||u|||_m = \left\|\left(1+\|x\|^2\right)^{m/2} \widehat{u}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

la aplicación $u \to |||u|||_m$ de $H^m(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$ es una norma equivalente a la norma de Sobolev $\|u\|_m$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y s real no negativo, sea $J_s = \left(1+\|x\|^2\right)^{s/2}$, semejante a J_m donde m es un entero no negativo. Se define $H^s(\mathbb{R}^n)$ como un espacio vectorial

$$\left\{u \in S'(\mathbb{R}^n) : \left(1+\|x\|^2\right)^{s/2}, \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

con producto escalar definido por:

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\|x\|^2\right)^s \widehat{u}(x)\widehat{v}(x)dx$$

cuya norma está dada por:

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^s |\widehat{u}(x)|^2 \, dx$$

1.7. Fórmula de Cauchy

Dado un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$, decimos que $f \in F(\Omega)$ es una función holomorfa en Ω, cuando f es derivable en todo punto de Ω. Denotamos por $H(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω. Sabemos que toda función holomorfa es continua, es decir, $H(\Omega) \subset C(\Omega)$, la inclusión que siempre es estricta. Pensemos por ejemplo, en la restricción a Ω de la función parte real. Por el carácter local del concepto de derivada, dicha función no es derivable en ningún punto de Ω.

De dicho carácter local deducimos que la holomorfía es una propiedad local, es decir, una propiedad que se puede comprobar localmente.

Sea $\Omega = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, donde el conjunto de índices Λ es arbitrario y, para cada $\lambda \in \Lambda$, U_λ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Para $f \in F(\Omega)$ y $\lambda \in \Lambda$ sea f_λ la restricción de f a U_λ. Entonces, $f \in H(\Omega)$ si, y solo si, $f_\lambda \in H(U_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Definición 1.13 *Si $r > 0$ y a es un número complejo,*

$$D(a, r) = \{z : |z - a| < r\}$$

es el disco circular abierto de centro a y radio r. $\overline{D}(a; r)$ es la adherencia de $D(a, r)$, y

$$D'(a, r) = \{z : 0 < |z - a| < r\}$$

es el disco perforado con centro en a y radio r.

Fórmula de Cauchy: Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in H(\Omega)$. Dado $a \in \Omega$, y sea $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. Se tiene entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw, \text{ para todo } z \in D(a, r)$$

Fórmula de Cauchy para las derivadas: Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in H(\Omega)$. Dado $a \in \Omega$, sea $r \in \mathbb{R}^+$, se tiene entonces

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(w - z)^{k+1}} dw, \text{ para todo } z \in D(a, r), \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

1.8. El problema de Cauchy

Ahora enunciamos algunos resultados principales de existencia y unicidad de solución del siguiente Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{aligned} y\prime &= f(x,y) \\ y(x_0) &= \mu \end{aligned} \tag{1.34}$$

donde $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e y es una función desconocida de x.

Se dice que $y(x)$ es una solución de (1.34) en un intervalo I tal que $x_0 \in I$ si $y(x)$ es función derivable en I, con $y\prime(x) = f(x, y(x))$, para todo $x \in I$ e $y(x_0) = \mu$.

Para asegurar que existe la solución y la unicidad del problema de Cauchy enunciaremos el siguiente teorema cuya demostración puede encontrarse en Rudin (1979).

Teorema 1.14 *(Existencia y unicidad) Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en el rectangulo $R = \{(x,y) \,/\, |x - x_0| \leq a,\ \ |y-\mu| \leq b\}$ y*

$$|f\,(x, y_1) - f\,(x, y_2)| < L\,|y_1 - y_2|$$

Entonces, el problema (1.34) admite una única solución $y(x)$ en $[x_0 - h, x_0 + h]$ donde $h = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ y M=cota de $|f(x,y)|$ sobre R^2.

1.9. Teoría de Semigrupos

Definición 1.14 *Sea X un espacio de Banach. Una familia uniparamétrica $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de operadores lineales acotados de X en X es un semigrupo de operador lineal acotado en X si:*

i) $T(0) = I$, donde I es la aplicación identidad del espacio X.

ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$, para todo $t, s \geqslant 0$ (propiedad de semigrupo).

Un semigrupo de operadores lineales acotados, $T(t)$, es uniformemente continuo si

$$\underset{t\to 0}{Lim}\, \|T(t) - t\| = 0 \tag{1.35}$$

El operador lineal A definido por:

$$D(A) = \left\{ x \in X : \underset{t\to 0}{Lim} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \tag{1.36}$$

y

$$Ax = \underset{t \to 0}{Lim} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^{+}T(t)x}{dt} \mid_{t=0} \text{ para } x \in D(A) \tag{1.37}$$

es el generador infinitesimal del semigrupo $T(t)$, $D(A)$ es el dominio de A.

1.9.1. El Problema de Valor Inicial no homogéneo

Consideremos el siguiente Problema de Valor Inicial no homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t) \\ \qquad u(0) = x \end{cases} \tag{1.38}$$

donde $f : [0, T) \to X$. Asuminos que A es un generador infinitesimal de un semigrupo C_0 a $T(t)$ de modo que la ecuación homogénea correspondiente, es decir, la ecuación con $f = 0$, tiene una solución única para cada valor inicial $x \in D(A)$.

Definición 1.15 *Una función $u : [0, T] \to X$ es una solución (clásica) de (1.38) sobre $[0, T)$; si u es continua en $[0, T)$, y continuamente diferenciable en $(0, T)$, $u(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$ y (1.38) se satisface en $[0, T)$.*

Sea $T(t)$ el semigrupo C_0 generado por A y sea u una solución de (1.38). Entonces la función X evaluada $g(s) = T(t - s)u(s)$ es diferenciable para $0 < s < t$ y

$$\frac{dg}{ds} = T(t - s)f(s) \tag{1.39}$$

Si $f \in L^1(0, T, X)$ entonces $T(t - s)f(s)$ es integrable, e integrando (1.39) desde 0 hasta t tenemos

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t - s)f(s)ds$$

A continuación, definiremos el significado de buena colocación para el problema de Cauchy asociado a una ecuación de evolución abstracta.

Sea X un espacio de Banach con norma $\|\cdot\| \in I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de la recta. Sea

$$\begin{aligned} u \quad &: \quad I \to X \\ t \quad &\to \quad u(\cdot, t) \end{aligned}$$

Definimos $C(I, X) = \{u : I \to X : \ u(\cdot, t)\text{, continua y limitada en } I\}$, y su norma

$$\|u\|_{C(I,X)} = \sup_{t \in I} \|u(\cdot, t)\|$$

Analogamente, definimos

$$C^1(I,X) = \{u : I \to X : \ u(\cdot,t), \partial_t u(\cdot,t), \text{ continua y limitada en } I\}$$

y su norma

$$\|u\|_{C^1(I,X)} = \max\left\{\sup_{t\in I}\|u(\cdot,t)\|, \sup_{t\in I}\|\partial_t u(\cdot,t)\|\right\}$$

Definición 1.16 *(Buena colocación) Dados X e Y espacios de Banach y $T_0 \in (0,\infty)$, decimos que el problema de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t u(t) = F(t, u(t)) \in X \\ u(0) = \phi \in Y \end{array}\right. \tag{1.40}$$

donde $F : [0, T_0] \times Y \to X$ es continua, es localmente bien puesto si

1. *Existe $T \in (0, T_0]$ y una función $u \in C([0,T]; Y)$ tal que $u(0) = \phi$ y la ecuación diferencial se satisface en el sentido que*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(t, u(t))\right\|_X = 0, \text{ para todo } t \in [0,T]$$

donde las derivadas en 0 y T son calculadas por la derecha e izquierda respectivamente;

2. *El problema (1.40) tiene como máximo una solución en $C([0,T]; Y)$;*

3. *La aplicación $\phi :\to u$ es continua. Mas precisamente, sean $\phi_n \in Y$, $n \geq 1$, tales que $\phi_n \xrightarrow{Y} \phi$, y sean $u_n \in C([0,T_n]; Y)$ correspondientes soluciones. Para $T \in (0, T_0)$, entonces las soluciones u_n pueden ser extendidas al intervalo $[0,T]$ para todo n suficientemente grande y*

$$\lim_{n\to\infty}\sup\|u_n(t) - u(t)\|_Y = 0$$

Si cualquiera de estas condiciones no es satisfecha, el problema es llamado mal puesto. Finalmente, si $F(t,\cdot)$ está definida en $[0,\infty)$ y (a), (b), y (c) son validas en $[0,T]$, para todo $T > 0$ diremos que (1.40) es bien puesto globalmente.

Capítulo 2

Buena colocación de la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM)

2.1. Buena colocación en H^s con s≥0

Como fue mencionado, en la introducción se conoce que el Problema de Valor Inicial en (2)-(3) esta globalmente bien colocado en H^k para cualquier entero $k = 1, 2, \ldots$. Una aplicación directa de la teoría de interpolación no lineal (ver Bona & Scott (1976)), extiende este resultado a H^s para cualquier $s \geq 1$. Así nuestro interés recae en el rango $0 \leq s \leq 1$.

Notación 2.1 *Denotamos por* $\widehat{\cdot}$ *o* $\mathcal{F}$ *la transformada de Fourier y por* $\mathcal{F}^{-1}$ *a la transformada de Fourier inversa. En caso que la variable en cualquier lado de esta transformación necesite énfasis, la notación* $\mathcal{F}_{x \to \xi}$ *o* $\mathcal{F}_{(x,t)\to(\xi,\tau)}$ *será empleada, en general la norma en el espacio de Banach* X *es denotado por* $\|.\|_X$. *Así, el símbolo* $\|.\|_{H^S}$ *es la norma en el espacio de Sobolev* L^2 *de* $H^s = H^s(\mathbb{R})$. *La notación* $A \approx B$ *significa que existe una constante* $c \geq 1$ *tal que* $\frac{1}{c}|A| \leq |B| \leq c|A|$. *Para cualquier positivo* A *y* B, *la notación* $A \lesssim B$ *(respectivamente* $A \gtrsim B$*) significa que existe una constante positiva* c *tal que* $A \leq cB$ *(respectivamente* $A \geq cB$*). El símbolo* $\langle \xi \rangle$ *denota* $\left(1+\xi^2\right)^{1/2}$. *La función característica de un intervalo* $I \subset \mathbb{R}$ *se escribe* $\mathbf{1}_I$. *La convolución sobre* $\mathbb{R}$ *de dos funciones* f *y* g *se escribe* $f * g$. *El único producto interno que interviene en nuestro análisis es el de* L^2. *Si* $f, g \in L^2$ *entonces* $\langle f, g\rangle$ *es el producto interno en* L^2 *de* f *y* g.

2.1.1. Estimación bilineal

Ahora probaremos dos desigualdades que nos seran útiles (ver Bona, Chen & Saut (2004)).

Lema 2.1 *Sean* $u, v \in H^s(\mathbb{R})$ $s \geq 0$. *Entonces:*

$$\|\varphi(D_x)(uv)\|_{H^s} \lesssim \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s} \tag{2.1}$$

Donde $\varphi(\xi) = \dfrac{\xi}{1+\xi^2}$ y $\varphi(D_x)$ es el operador multiplicador de Fourier definido por:

$$\widehat{\varphi(D_x)}u(\xi) = \varphi(\xi)\widehat{u}(\xi)$$

Demostración. Primero demostraremos la siguiente desigualdad

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \langle\xi\rangle^S}{(1+\xi^2)\langle\xi_1\rangle^s \langle\xi-\xi_1\rangle^s} \widehat{u}(\xi_1)\widehat{v}(\xi-\xi_1)\overline{\widehat{w}(\xi)} d\xi d\xi_1\right| \lesssim \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\|w\|_{L^2} \tag{2.2}$$

En efecto, como $\langle\xi\rangle^s \leq \langle\xi_1\rangle^s \langle\xi-\xi_1\rangle^s$ tenemos que

$$\begin{aligned}
& \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \langle\xi\rangle^S}{(1+\xi^2)\langle\xi_1\rangle^s \langle\xi-\xi_1\rangle^s} \widehat{u}(\xi_1)\widehat{v}(\xi-\xi_1)\overline{\widehat{w}(\xi)} d\xi d\xi_1\right| \\
\leq & \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{(1+\xi^2)} \widehat{u}(\xi_1)\widehat{v}(\xi-\xi_1)\overline{\widehat{w}(\xi)} d\xi d\xi_1\right| \\
\leq & \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi_1)\widehat{v}(\xi-\xi_1) \frac{\xi}{(1+\xi^2)} \overline{\widehat{w}(\xi)} d\xi d\xi_1\right|
\end{aligned}$$

Luego, definimos $w_1(\xi) = \dfrac{\xi}{(1+\xi^2)}\overline{\widehat{w}(\xi)}$ y $u_1(\xi) = \widehat{u}(-\xi)$ tal que

$$\begin{aligned}
& \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \langle\xi\rangle^s}{(1+\xi^2)\langle\xi_1\rangle^s \langle\xi-\xi_1\rangle^s} \widehat{u}(\xi_1)\widehat{v}(\xi-\xi_1)\overline{\widehat{w}(\xi)} d\xi d\xi_1\right| \\
\leq & \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi_1)\widehat{v}(\xi-\xi_1) w_1(\xi) d\xi_1 d\xi\right| \\
\leq & \left|\int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{u} * \widehat{v}) w_1(\xi) d\xi\right| \\
= & \left|\langle \widehat{u} * \widehat{v}, w_1\rangle\right| \\
= & \left|\langle u_1 * w_1, \widehat{v}\rangle\right|
\end{aligned}$$

Luego, aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, desigualdad de Young y el teorema de Plancherel, así como $\|u_1(\xi)\| = \|\widehat{u}(-\xi)\| = \|\widehat{u}\|$ y

$$\|w_1\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\xi}{(1+\xi^2)}\overline{\widehat{w}(\xi)}\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \leq \left\|\overline{\widehat{w}}\right\|_{L^2} = \|\widehat{w}\|_{L^2}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
|\langle u_1 * w_1, \widehat{v}\rangle| &\leq \|u_1 * w_1\|_{L^2} \|\widehat{v}\|_{L^2} \\
&\leq \|u_1\|_{L^2} \|w_1\|_{L^2} \|\widehat{v}\|_{L^2} \\
&\leq C \|\widehat{u}\|_{L^2} \|\widehat{v}\|_{L^2} \|\widehat{w}\|_{L^2} \\
&\leq C \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \|w\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Ahora expresamos $\varphi(D_x)(uv)$ en términos de la transformada de Fourier,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(D_x)(uv)\|_{H^s} &= \left\|\left(1+\xi^2\right)^{s/2} \varphi(\widehat{D_x)(uv})\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\xi^2\right)^{s/2} \varphi(\widehat{D_x)(uv})\overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi\right| \\
&= \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\xi^2\right)^{s/2} \varphi(\xi)\widehat{(uv)}\overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi\right| \\
& \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\xi^2\right)^{s/2} \frac{\xi}{(1+\xi^2)} \left(\widehat{u} * \widehat{v}\right) \overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi\right|
\end{aligned}$$

Luego, como $\langle\xi\rangle^s \leq \langle\xi_1\rangle^s \langle\xi-\xi_1\rangle^s$,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(D_x)(uv)\|_{H^s} &= \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^s \frac{\xi}{(1+\xi^2)}\widehat{u}(\xi_1)\,\widehat{v}(\xi-\xi_1)\,\overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi_1 d\xi\right| \\
&\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi_1\rangle^s \langle\xi-\xi_1\rangle^s \frac{\xi}{(1+\xi^2)}\widehat{u}(\xi_1)\,\widehat{v}(\xi-\xi_1)\,\overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi_1 d\xi\right| \\
&\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi_1\rangle^s \,\widehat{u}(\xi_1)\,\langle\xi-\xi_1\rangle^s\,\widehat{v}(\xi-\xi_1)\,\frac{\xi}{(1+\xi^2)}\overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi_1 d\xi\right| \\
&\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi_1\rangle^s \,\widehat{u}(\xi_1)\,\langle\xi-\xi_1\rangle^s\,\widehat{v}(\xi-\xi_1)\,w_1(\xi)\,d\xi_1 d\xi\right|
\end{aligned}$$

Así, por (2.2), tenemos

$$\begin{aligned}
\|\varphi(D_x)(uv)\|_{H^s} &\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \|\langle\cdot\rangle^s \widehat{u}\|_{L^2} \|\langle\cdot\rangle^s \widehat{v}\|_{L^2} \|w_1\|_{L^2} \\
&\leq C \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \|\widehat{u}\|_{H^s} \|\widehat{v}\|_{H^s} \|w\|_{L^2} \\
&\leq C \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|\varphi(D_x)(uv)\|_{H^s} \lesssim \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s}$$

■

Observación 2.1 *La estimación (2.2) no es válida para $s < 0$. Si $\widehat{u}$ es como la función característica en el intervalo $[N-1, N+1]$; $\widehat{v}$ la función característica en el intervalo $[-N-1, -N+1]$ y $\widehat{\omega}(\xi)$ la función característica del intervalo $[-1,1]$ en (2.2). Entonces, el lado izquierdo de (2.2) se comporta como N^{-2s} mientras que el lado derecho es una constante independiente de N. Por lo tanto, si $s < 0$, no importa cuán grande sea la constante implícita, (2.2) falla para $N \gg 1$.*

Lema 2.2 *Sean $f \in H^r(\mathbb{R})$ y $g \in H^s(\mathbb{R})$ para algún r y s con $0 \leq s \leq r$ y $\frac{1}{2} < r$. Entonces, $\varphi(D_x)fg \in H^{s+1}(\mathbb{R})$ y una constante $C = C(r,s)$ tal que*

$$\|\varphi(D_x)(fg)\|_{H^{s+1}(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{H^r(\mathbb{R})} \|g\|_{H^s(\mathbb{R})} \tag{2.3}$$

donde φ es como en el lema (2.1).

Demostración. Como $\frac{1}{2} < r$ y $0 \leq s \leq r$ donde los elementos de $H^r(\mathbb{R})$ son multiplicadores en $H^s(\mathbb{R})$, lo cual se verifica haciendo cumplir la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{H^s(\mathbb{R})} &= \left\| \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{(fg)} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\xi^2\right)^{s/2} \widehat{(fg)} \overline{\widehat{w}\left(\xi\right)} d\xi \right| \\
&= \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\xi^2\right)^{s/2} \left(\widehat{f} * \widehat{g}\right) \overline{\widehat{w}\left(\xi\right)} d\xi \right| \\
&= \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^s \widehat{f}\left(\xi_1\right) \widehat{g}\left(\xi-\xi_1\right) \overline{\widehat{w}\left(\xi\right)} d\xi_1 d\xi \right|
\end{aligned}$$

En efecto, como $\langle\xi\rangle^s \leq \langle\xi_1\rangle^s \langle\xi-\xi_1\rangle^s$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|fg\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi_1\rangle^s \langle\xi-\xi_1\rangle^s \widehat{f}(\xi_1)\,\widehat{g}(\xi-\xi_1)\,\overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi_1 d\xi \right| \\
&\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi_1\rangle^s \widehat{f}(\xi_1) \langle\xi-\xi_1\rangle^s \widehat{g}(\xi-\xi_1)\,\overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi_1 d\xi \right|
\end{aligned}
$$

Además, $0 \leq s \leq r$ tenemos $\langle\xi\rangle^s \leq \langle\xi\rangle^r$, luego

$$
\begin{aligned}
\|fg\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi_1\rangle^r \widehat{f}(\xi_1) \langle\xi-\xi_1\rangle^s \widehat{g}(\xi-\xi_1)\,\overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi_1 d\xi \right| \\
&\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left\| \langle\xi\rangle^r \widehat{f} \right\|_{L^2} \|\langle\xi\rangle^s \widehat{g}\|_{L^2} \|\widehat{w}\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|fg\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left\| \widehat{f} \right\|_{H^r} \|\widehat{g}\|_{H^s} \|w\|_{L^2} \\
&\leq C\,\|f\|_{H^r(\mathbb{R})} \|g\|_{H^s(\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\|fg\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C\,\|f\|_{H^r(\mathbb{R})} \|g\|_{H^s(\mathbb{R})}
$$

donde $\varphi(D_x)$ suaviza exactamente una derivada en L^2 del espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$.

Así,

$$
\begin{aligned}
\|\varphi(D_x)(fg)\|_{H^{s+1}(\mathbb{R})} &= \left\| \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s+1}{2}} \widehat{\varphi(D_x)(fg)} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\xi^2\right)^{s/2} \left(1+\xi^2\right)^{1/2} \widehat{\varphi(D_x)(fg)}\,\overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi \right| \\
&= \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\xi^2\right)^{s/2} \left(1+\xi^2\right)^{1/2} \varphi(\xi) \left(\widehat{fg}\right) \overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi \right| \\
&= \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\xi^2\right)^{s/2} \left(1+\xi^2\right)^{1/2} \frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)} \left(\widehat{f}*\widehat{g}\right) \overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi \right| \\
&= \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^s \langle\xi\rangle \frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)} \left(\widehat{f}*\widehat{g}\right) \overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi \right|
\end{aligned}
$$

Para $s \geq 0$ y $\langle\xi\rangle^s \leq \langle\xi_1\rangle^s \langle\xi-\xi_1\rangle^s$, $w_2(\xi) = \dfrac{\langle\xi\rangle\,\xi}{(1+\xi^2)}\overline{\widehat{w}(\xi)}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi(D_x)(fg)\|_{H^{s+1}(\mathbb{R})} &\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi-\xi_1\rangle^s\langle\xi\rangle\frac{\xi}{(1+\xi^2)}\widehat{f}(\xi_1)\,\widehat{g}(\xi-\xi_1)\,\overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi_1 d\xi\right| \\
&= \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi_1\rangle^s\widehat{f}(\xi_1)\langle\xi-\xi_1\rangle^s\widehat{g}(\xi-\xi_1)\frac{\langle\xi\rangle\,\xi}{(1+\xi^2)}\overline{\widehat{w}(\xi)}d\xi_1 d\xi\right| \\
&\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi_1\rangle^s\widehat{f}(\xi_1)\langle\xi-\xi_1\rangle^s\widehat{g}(\xi-\xi_1)\,w_2(\xi)\,d\xi_1 d\xi\right|
\end{aligned}$$

Además, $0 \leq s \leq r$ tenemos que $\langle\xi\rangle^s \leq \langle\xi\rangle^r$,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(D_x)(fg)\|_{H^{s+1}(\mathbb{R})} &\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi_1\rangle^r\widehat{f}(\xi_1)\langle\xi-\xi_1\rangle^s\widehat{g}(\xi-\xi_1)\,w_2(\xi)\,d\xi_1 d\xi\right| \\
&\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1}\left\|\langle\cdot\rangle^r\widehat{f}\right\|_{L^2}\|\langle\cdot\rangle^s\widehat{g}\|_{L^2}\|w_2\|_{L^2} \\
&\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1}\left\|\langle\cdot\rangle^r\widehat{f}\right\|_{L^2}\|\langle\cdot\rangle^s\widehat{g}\|_{L^2}\|\widehat{w}\|_{L^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\varphi(D_x)(fg)\|_{H^{s+1}(\mathbb{R})} &\leq \sup_{\|w\|_{L^2}\leq 1}\left\|\widehat{f}\right\|_{H^r}\|\widehat{g}\|_{H^s}\|w\|_{L^2} \\
&\leq C\,\|f\|_{H^r}\|g\|_{H^s}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|\varphi(D_x)(fg)\|_{H^{s+1}(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_{H^r}\|g\|_{H^s}$$

■

2.1.2. Buena colocación local

Sabiendo que

$$\begin{aligned}
u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} &= 0 \\
u(x,0) &= u_0(x)
\end{aligned}$$

despejando, tenemos

$$u_t - u_{xxt} = -u_x - uu_x$$

Pero esta ecuación podemos escribirla de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \partial_t u_{xx} &= -\left(\partial_x u + u\partial_x u\right)\\
\partial_t \left(u - u_{xx}\right) &= -\left(\partial_x u + \frac{1}{2}\partial_x u^2\right)\\
\partial_t \left(I - \partial_x^2\right) u &= -\left(\partial_x\right)\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)\\
\partial_t u &= \left(I - \partial_x^2\right)^{-1}\left(-\partial_x\right)\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)\\
\partial_t u &= -\left(I - \partial_x^2\right)^{-1}\partial_x\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)
\end{aligned}$$

Multiplicamos por i a la última ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}
i\partial_t u &= -i\left(I - \partial_x^2\right)^{-1}\partial_x\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)\\
i\partial_t u &= -i\left(I - \partial_x^2\right)^{-1}\partial_x u + \frac{1}{2}\left(-i\left(I - \partial_x^2\right)^{-1}\partial_x\right)u^2
\end{aligned}$$

donde

$$\varphi(D_x) = -i\left(I + (i\partial_x)^2\right)^{-1}\partial_x$$

Luego, podemos escribir las ecuaciones (2)-(3) en la forma

$$\left\{\begin{array}{c} iu_t = \varphi(D_x)u + \frac{1}{2}\varphi(D_x)u^2 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{array}\right. \tag{2.4}$$

Sea $S(t) = exp(-it\varphi(D_x))$, que es el grupo unitario que define la evolución libre asociada; es decir, $S(t)u_0$ resuelve el Problema de Valor Inicial lineal

$$\left\{\begin{array}{c} iu_t = \varphi(D_x)u \\ u(0,x) = u_0(x) \end{array}\right. \tag{2.5}$$

Entonces, (2.4) puede ser reescrita por la ecuación integral

$$u(t,x) = S(t)u_0(x) - \frac{i}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t',x)dt' = A\left(u,u_0\right)(x,t) \tag{2.6}$$

Esta última ecuación integral se puede resolver localmente en el tiempo realizando una iteración de Picard en el espacio X_T^s de funciones continuas en $[-T,T]$ con valores en H^s

equipado de la norma usual

$$\|u\|_{X_T^s} = \sup_{t\in[-T,T]} \|u\,(t,\cdot)\|_{H^s}$$

La norma H^s está claramente preservada por la evolución libre ya que su símbolo tiene un valor absoluto igual a 1. Así, para cualquier $t \geq 0$ y $s \in \mathbb{R}$

$$\|S(t)u_0\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}$$

Luego, para cualquier $T > 0$

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0(x)\|_{X_T^s} &= \sup_{t\in[-T,T]} \|S(t)u_0(x)\|_{H^s} \\ &= \sup_{t\in[-T,T]} \|u_0(x)\|_{Hs} \end{aligned}$$

Así, $S(t)$ es una isometría en X_T^s

$$\|S(t)u_0(x)\|_{X_T^s} = \|u_0(x)\|_{X_T^s}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0(x)\|_{X_T^s} &= \|u_0(x)\|_{X_T^s} = \|u_0(x)\|_{H^s} \\ \|S(t)u_0(x)\|_{X_T^s} &= \|u_0(x)\|_{H^s} \end{aligned}$$

Luego, tomando norma en el espacio X_T^s a la ecuación (2.6) tenemos

$$\begin{aligned} \|u(t,x)\|_{X_T^s} &= \left\| S(t)u_0(x) - \frac{i}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t',x)dt' \right\|_{X_T^s} \\ &\leq \|S(t)u_0(x)\|_{X_T^s} + \left\| \frac{i}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t',x)dt' \right\|_{X_T^s} \end{aligned}$$

El segundo término en el lado derecho de la ecuación (2.6) puede estar limitado al usar de nuevo el hecho de que $S(t)$ es un operador unitario en $H^s(\mathbb{R})$ para cada valor de su argumento y el lema (2.1).

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{i}{2} \int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t',x)dt' \right\|_{X_T^s} &= \frac{1}{2} \sup_{t\in[-T,T]} \left\| \int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t',x)dt' \right\|_{H^s} \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{t\in[-T,T]} \int_0^t \left\| S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t',x) \right\|_{H^s} dt' \\
&= \frac{1}{2} \sup_{t\in[-T,T]} \int_0^t \left\| \varphi(D_x)u^2(t',x) \right\|_{H^s} dt'
\end{aligned}$$

Por ser $S(t)$ una isometría conseguimos que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{i}{2} \int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t',x)dt' \right\|_{X_T^s} &\leq \frac{1}{2} \sup_{t\in[-T,T]} \int_0^t C_s \left\| u \right\|_{H^S} \left\| u \right\|_{H^s} dt' \\
&\leq \frac{1}{2} C_s \int_0^T \left(\sup_{t\in[-T,T]} \left\| u \right\|_{H^s} \left\| u \right\|_{H^s} \right) dt' \\
&\leq \frac{1}{2} C_s \int_0^T \left(\sup_{t\in[-T,T]} \left\| u \right\|_{H^s} \right)^2 dt'
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} C_s T \left\| u \right\|_{X_T^s}^2$$

Luego,

$$\frac{1}{2} \left\| \int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t',x)dt' \right\|_{X_T^s} \leq \frac{1}{2} C_s T \left\| u \right\|_{X_T^s}^2 \tag{2.7}$$

donde C_s es una constante que depende solo de s. De manera similar se obtiene

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{i}{2} \int_0^t S(t-t')\varphi(D_x) \left(u^2(t',x) - v^2(t',x) \right) dt' \right\|_{X_T^s} \\
= &\ \frac{1}{2} \sup_{t\in[-T,T]} \left\| \int_0^t S(t-t')\varphi(D_x) \left(u^2(t',x) - v^2(t',x) \right) dt' \right\|_{H^s} \\
\leq &\ \frac{1}{2} \sup_{t\in[-T,T]} \int_0^t \left\| \varphi(D_x) \left(u^2(t',x) - v^2(t',x) \right) \right\|_{H^s} dt' \\
\leq &\ \frac{1}{2} \sup_{t\in[-T,T]} \int_0^t \left\| \varphi(D_x) \left(u(t',x) - v(t',x) \right) \left(u(t',x) + v(t',x) \right) \right\|_{H^s} dt'
\end{aligned}$$

Usando el lema (2.1) tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\left(u^2(t',x)-v^2(t',x)\right)dt'\right\|_{X^s}\\
\leq\ &\frac{1}{2}\sup_{t\in[-T,T]}\int_0^t \|\varphi(D_x)\|_{H^S}\|u(t',x)-v(t',x)\|_{H^s}\|u(t',x)+v(t',x)\|_{H^s}\,dt'\\
\leq\ &\frac{1}{2}\sup_{t\in[-T,T]}\int_0^t C_s\|u(t',x)-v(t',x)\|_{H^S}\|u(t',x)+v(t',x)\|_{H^s}\,dt'\\
\leq\ &\frac{1}{2}C_s\int_0^T\left(\sup_{t\in[-T,T]}\|u(t',x)-v(t',x)\|_{H^S}\sup_{t\in[-T,T]}\|u(t',x)+v(t',x)\|_{H^s}\right)dt'\\
\leq\ &\frac{1}{2}C_sT\|u-v\|^2_{X_T^s}\|u+v\|^2_{X_T^s}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2}\left\|\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\left(u^2(t',x)-v^2(t',x)\right)dt'\right\|_{X_T^s}\leq\frac{1}{2}C_sT\|u-v\|^2_{X_t^s}\|u+v\|^2_{X_t^s}\tag{2.8}$$

Estas desigualdades implican el siguiente resultado local de buena colocación.

Teorema 2.1 *Fijando $s\geq 0$. Para algún $u_0\in H^s(\mathbb{R})$ existe un $T=T(u_0)>0$ y una solución única $u\in X_T^s$ del problema del valor inicial para (2)-(3), el tiempo máximo de existencia $T=T_s$ ya que la solución tiene la propiedad de:*

$$T_s\geq\frac{1}{4C_s\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}}\tag{2.9}$$

donde la constante positiva C_s depende solo de s. Para $R>0$, sea B_R denota la bola de radio R centrado en el origen en $H^s(\mathbb{R})$ y sea $T=T(R)>0$ denota un tiempo de existencia uniforme para (2)-(3) con $u_0\in B_R$. Entonces la correspondencia $u_0\to u$ que asocia a u_0 la solución u de (2)-(3) con valor inicial u_0 es una aplicación analítica real de B_R a X_T^s.

Demostración. La existencia, unicidad y el límite inferior en el tiempo de existencia se siguen del principio de la aplicación de contracción aplicado a la bola cerrada B_M centrada en el origen en X_T^s.

Sea la aplicación: $A: H^s\times X_T^s\to X_T^s$ definida en la ecuación (2.6) de la siguiente forma:

$$A(u,u_0)(x,t)=S(t)u_0(x)-\frac{i}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t',x)dt'$$

Luego, tomando norma en el espacio X_T^s a ambos miembros de la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\|A(u,u_0)\|_{X_T^s} &= \left\| S(t)u_0(x) - \frac{i}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t',x)dt' \right\|_{X_T^s} \\
\|A(u,u_0)\|_{X_T^s} &\leq \|S(t)u_0(x)\|_{X_T^s} + \left\| \frac{i}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t',x)dt' \right\|_{X_T^s}
\end{aligned}$$

Luego, usando los resultados del lema (2.1) tenemos

$$\|A(u,u_0)\|_{X_T^s} \leq \|u_0(x)\|_{X_T^s} + \frac{1}{2}C_sT\|u\|_{X_T^s}^2$$

entonces

$$\|u_0(x)\|_{X_T^s} \leq \frac{M}{2} \text{ y } \frac{1}{2}C_sT\|u\|_{X_T^s}^2 \leq \frac{M}{2}$$

Por otro lado, sea $R = M = 2\|u_0(x)\|_{X_T^s}$,

$$\frac{1}{2}C_sT\|u\|_{X_T^s}^2 = \frac{1}{2}C_ST\|u\|_{X_T^s}\|u\|_{X_T^s}$$

Supongamos que $2C_sT\|u_0(x)\|_{X_T^s} \leq 1$ tenemos $C_sT \leq \dfrac{1}{2\|u_0(x)\|_{X_T^s}}$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}C_sT\|u\|_{X_T^s}^2 &\leq \frac{1}{2}\frac{1}{\left(2\|u_0\|_{X_T^s}\right)}\|u\|_{X_T^s}\|u\|_{X_T^s} \quad \text{como } u \in B_M; \|u-0\|_{X_T^s} < R \\
&\leq \frac{1}{4}\frac{1}{\|u_0\|_{X_T^s}}R.R \\
&\leq \frac{1}{4\|u_0\|_{X_T^s}}R^2 = \frac{R}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\|A(u,u_0)\|_{X_T^s} &\leq \|u_0(x)\|_{X_T^s} + \frac{1}{2}C_sT\|u\|_{X_T^s}^2 \\
&\leq \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M \\
\|A(u,u_0)\|_{X_T^s} &\leq M
\end{aligned}$$

La aplicación A en (2.6) es una aplicación de B_M en B_M.

Se dice que A verifica la condición de Lipschitz, es decir,

$$\begin{aligned}
& \|A(u_1,u_0)-A(u_2,u_0)\|_{X_T^s} \\
= & \sup_{t\in[-T,T]} \|A(u_1,u_0)-A(u_2,u_0)\|_{H^s} \\
= & \sup_{t\in[-T,T]} \left\| -\frac{i}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u_1^2(t',x)dt' + \frac{i}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u_2^2(t',x)dt' \right\|_{H^s} \\
= & \sup_{t\in[-T,T]} \frac{1}{2}\left\| \int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)[u_1^2(t',x)-u_2^2(t',x)]dt' \right\|_{H^s}
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\|A(u_1,u_0)-A(u_2,u_0)\|_{X_T^s} &= \sup_{t\in[-T,T]} \frac{1}{2}\left\| \int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)(u_1-u_2)(u_1+u_2)(t',x)dt' \right\|_{H^s} \\
&\leq \sup_{t\in[-T,T]} \frac{1}{2}\int_0^t \|S(t-t')\|_{H^S}\|\varphi(D_x)\|_{H^S}\|(u_1-u_2)(u_1+u_2)\|_{H^s}\,dt' \\
&\leq \sup_{t\in[-T,T]} \frac{1}{2}\int_0^t \|\varphi(D_x)\|_{H^S}\|u_1-u_2\|_{H^S}\|u_1+u_2\|_{H^s}\,dt'
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\|A(u_1,u_0)-A(u_2,u_0)\|_{X_T^s} &\leq \sup_{t\in[-T,T]} \frac{1}{2}\int_0^t C_S\|u_1-u_2\|_{H^S}\|u_1+u_2\|_{H^s}\,dt' \\
&\leq \sup_{t\in[-T,T]} \frac{1}{2}C_S T\|u_1-u_2\|_{H^S}\|u_1+u_2\|_{H^s} \\
&\leq \frac{1}{2}C_S T(\sup_{t\in[-T,T]}\|u_1-u_2\|_{H^S}\sup_{t\in[-T,T]}\|u_1+u_2\|_{H^S}) \\
&\leq \frac{1}{2}C_S T\|u_1-u_2\|_{X_T^S}\|u_1+u_2\|_{X_T^S},
\end{aligned}$$

Pero

$$\|u_1+u_2\|_{X_T^s} \leq \|u_1\|_{X_T^s}+\|u_2\|_{X_T^s} \leq \frac{R}{2}+\frac{R}{2} = R$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|A(u_1,u_0)-A(u_2,u_0)\|_{X_T^s} &\leq \frac{1}{2}C_s TR\|u_1-u_2\|_{X_T^s} \\
&\leq \frac{1}{2}C_s TR\|u_1-u_2\|_{X_T^s},\ \text{luego } 0<C_sTR<1
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|A(u_1,u_0)-A(u_2,u_0)\|_{X_T^s} \leq \frac{1}{2}C_s TR\|u_1-u_2\|_{X_T^s}$$

entonces A se dice que es lipschitziana (contracción). Así, A tiene un punto fijo único que se ve y comprende una solución de (2)-(3) en el intervalo $[0, T]$.

Ahora, veremos el problema de uniformidad para la aplicación de la solución de $\mathcal{U}$. Este resultado es local en el sentido de que, si se puede establecer T suficientemente pequeño, en general es cierto debido a la singularidad de las soluciones del Problema de Valor Inicial y la propiedad del semigrupo. Sea $\Lambda : H^s \times X_T^s \to X_T^s$ definida como

$$\Lambda(u_0, v(t)) = v(t) - S(t)u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)v^2(t')dt'$$

donde la variable espacial x ha sido suprimida. Por el lema (2.1), A es una aplicación suave de $H^s \times X_T^s$ en X_T^s para $s \geq 0$. Sea $\Lambda(u_0, u(t)) = 0$, es decir, el cual supone que $u(t)$ es la solución de (2) con datos iniciales u_0, tomando $v(t) = u(t)$ tenemos

$$\Lambda(u_0, u(t)) = u(t) - S(t)u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t')dt'$$

Entonces el derivado de Frechet de Λ con respecto a la segunda variable es calculado para la aplicación lineal

$$Lh + r(h) = \Lambda(u_0, u(t) + h) - \Lambda(u_0, u(t))$$

Luego,

$$\begin{aligned} Lh + r(h) &= (u(t) + h) - S(t)u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)[u(t') + h]^2 dt' \\ &\quad -u(t) + S(t)u_0 + \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t')dt' \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} Lh + r(h) &= h - \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)[u(t') + h]^2 dt' + \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u^2(t')dt' \\ &= h - \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)[u^2(t') + 2u(t')h + h^2 - u^2(t')]dt' \\ &= h - \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)[2u(t')h + h^2]dt' \\ &= h - \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)[2u(t')h]dt' - \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)h^2 dt' \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} L &= 1-\frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)2u(t')dt' \\ r(h) &= -\left(\frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)h^2dt'\right) \end{aligned}$$

Luego,

$$Lh = \Lambda_u'(u_0,u(t))[h] = h - \int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u(t')h(t')dt'$$

tomando norma en el espacio X_T^s ambos lados de la ecuación anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \|\Lambda_u'(u_0,u(t))[h]\|_{X_T^S} &= \left\|h-\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u(t')h(t')dt'\right\|_{X_T^s} \\ &\leq \|h\|_{X_T^s} + \left\|\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u(t')h(t')dt'\right\|_{X_T^s} \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \left\|\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u(t')h(t')dt'\right\|_{X_T^s} &= \sup_{t\in[-T,T]}\left\|\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u(t')h(t')dt'\right\|_{H^s} \\ &\leq \sup_{t\in[-T,T]}\int_0^t \|S(t-t')\varphi(D_x)u(t')h(t')\|_{H^s}dt' \\ &\leq \sup_{t\in[-T,T]} C_sT\|u(t')\|_{H^s}\|h(t')\|_{H^s} \\ &\leq C_sT(\sup_{t\in[-T,T]}\|u(t')\|_{H^s})(\sup_{t\in[-T,T]}\|h(t')\|_{H^s}) \\ &\leq C_sT\|u\|_{X_T^s}\|h\|_{X_T^s} \end{aligned}$$

donde

$$\left\|\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)u(t')h(t')dt'\right\|_{X_T^s} \lesssim T\|u\|_{X_T^s}\|h\|_{X_T^s}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|\Lambda_u'(u_0,u(t))[h]\|_{X_T^s} &\leq \|h\|_{X_T^s} + C_sT\|u\|_{X_T^s}\|h\|_{X_T^s} \\ &\leq \|h\|_{X_T^s}\left(1+C_sT\|u\|_{X_T^s}\right) \end{aligned}$$

Se deduce que para T suficientemente pequeño $\Lambda_u'(u_0,u(t))$ es invertible ya que es de la forma $I+K$ y que,

$$\|K\|_{B(X_T^s,X_T^s)} < 1$$

donde $B(X_T^s,X_T^s)$ es el espacio de Banach de operadores lineales acotados en X_T^s. Así la segunda afirmación del teorema (2.1) se deriva del teorema de la función implícita. ■

Observación 2.2 *El argumento de suavidad de la aplicación de flujo $\mathcal{U}$ es bastante general y puede encontrarse en muchos contextos particulares(ver Bekiranov (1996), Kenig, Ponce & Vega (1996-2001), Bona, Sun & Zhang (2002), Zhang (1995)). Sin embargo, cada vez que se resuelve una Ecuación Diferencial Parcial en un marco funcional adecuado mediante un esquema de iteración de Picard aplicado a una formulación de una ecuación integral, automáticamente se obtiene una fuerte información de regularidad en la aplicación de flujo correspondiente. Esto está en contraste con los métodos y resultados para Ecuaciones Diferenciales Parciales cuasi lineales que proporcionan la existencia local, singularidad y continuidad de la aplicación de flujo, pero esta aplicación de flujo puede carecer de uniformidad, de hecho, puede que ni siquiera sea uniformemente continua en conjuntos acotados.*

2.1.3. Buena colocación global

Ahora veremos que la teoría local se extiende utilizando una descomposición de alta y baja frecuencia. El resultado es un teorema global de buena colocación satisfactoria.

Teorema 2.2 *En el teorema (2.1), el valor de T puede tomarse arbitrariamente grande y por lo tanto, el problema de Cauchy para (2)-(3) esta globalmente bien colocado en H^s, para cualquier $s \geq 0$.*

Demostración. Fijamos $T > 0$. El objetivo es mostrar que corresponde a cualquier dato inicial $u_0 \in H^s$ hay una solución única u de (2) que esta en X_T^s y que u depende continuamente sobre u_0. Debido al teorema (2.1), este resultado es claro para los datos que son lo suficientemente pequeños en H^s. Además, como dependencia continua, unicidad y dependencia analítica de los datos de la aplicación de flujo son todas propiedades que son locales en el tiempo, el problema es probar la existencia de una solución correspondiente a los datos iniciales de tamaño arbitrario. Fijamos $u_0 \in H^s$ y sea $N \gg 1$ tal que

$$\int_{|\xi| \geq N} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 \, d\xi \lesssim T^{-2} \tag{2.10}$$

Tales valores de N existen desde que $\langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{u_0}(\xi)|^2$ es una función L^1. Con N fijado como arriba, definimos

$$v_0(x) = \int_{|\xi| \geq N} e^{ix\xi} \widehat{u_0}(\xi) d\xi$$

Usando el teorema (2.1), la solución $v \in X_T^s$ de (2) tiene como dato inicial v_0. Dividimos el dato inicial u_0, en dos partes como

$$u_0 = v_0 + w_0$$

y consideramos el Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} w_t - w_{xxt} + w_x + w.w_x + (vw)_x = 0 \\ w(0,x) = w_0(x) \end{cases} \tag{2.11}$$

Si hay una solución de (2.11) en X_T^s entonces $v + w$ será una solución de (2) en X_T^s y el resultado será establecido. Observe que $w_0 \in H^1(\mathbb{R})$. El análogo de la ecuación integral (2.6) en este contexto se puede resolver localmente en el tiempo en X_T^s para valores pequeños de s, por el mismo tipo de la aplicación de contracción utilizado para probar el teorema (2.1). La función v se fija y haciendo uso del lema (2.2) con $r = 1$. Si tenemos una limitación en la norma H^1 de w, mostrando que está limitada en el intervalo $[-T, T]$.

Multiplicamos la primera ecuación en (2.11) por w e integramos sobre la línea real $\mathbb{R}$ conseguimos

$$\begin{aligned} 0 &= ww_t - w.w_{xxt} + w.w_x + w^2.w_x + w(vw)_x \\ 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(ww_t - w.w_{xxt} + w.w_x + w^2.w_x + w(vw)_x \big)\, dx \end{aligned}$$

Haciendo los cálculos de forma separada tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} ww_t dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} w^2 dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w.w_x dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{d}{dx} w^2 dx = \frac{1}{2} w^2 \mid_{-\infty}^{\infty} = 0$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} w^2.w_x dx &= w^3 \mid_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 2w.w_x dx = 0 - 2\int_{-\infty}^{\infty} w.w_x dx \\ &= -2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{d}{dx} w^2 dx = \frac{1}{2} w^2 \mid_{-\infty}^{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(vw)_x dx = (vw)w \mid_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} w_x(vw) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} w_x(vw) dx$$

Luego,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(ww_t - w.w_{xxt} + w.w_x + w^2.w_x + w(vw)_x\right)dx\\
0 &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}w^2dx - \left(-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}w_x^2dx\right) + 0 + 0 - \int_{-\infty}^{\infty}w_x(vw)dx\\
0 &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}w^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}w_x^2 - w_x(vw)\right)dx\\
0 &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(w^2 + w_x^2\right)\right)dx - \int_{-\infty}^{\infty}w_x(vw)dx
\end{aligned}$$

A priori w es ahora proporcionado lo que implica que el resultado de la existencia local continua es válida en cualquier intervalo de tiempo durante el cual $\|v(t,\cdot)\|_{L^2}$ permanece finito, y en particular en $[-T, T]$.

Después de integrar por partes aparece la identidad

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(w(t,x)^2 + w_x^2(t,x)\right)dx\right) - \int_{-\infty}^{\infty}v(t,x)w(t,x)w_x(t,x)dx \tag{2.12}$$

Luego,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\left(w^2 + w_x^2\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty}w_x(vw)dx$$

Usando la desigualdad de Hölder, conseguimos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{\infty}w_x(vw)dx\right| &= \int_{-\infty}^{\infty}|w_x(vw)|\,dx\\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}|v|\,|w.w_x|\,dx\\
&\leq \|v\|_{L^2}\|w.w_x\|_{L^2} = \|v\|_{L^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|ww_x|^2\,dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{\infty}w_x(vw)dx\right| &= \|v\|_{L^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|w|^2\,|w_x|^2\,dx\right)^{1/2}\\
&= \|v\|_{L^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|w|\,|w_x|\,|w|\,|w_x|\,dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{\infty} w_x(vw)dx\right| &\leq \|v\|_{L^2}\left(\sup_{\mathbb{R}}|w|\,|w_x|\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|w|\,|w_x|\,dx\right)^{1/2} \\
&\leq C\|v\|_{L^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|w|^2}{2}+\frac{|w_x|^2}{2}dx\right)^{1/2} \\
&\leq C\|v\|_{L^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|w|^2+|w_x|^2\,dx\right)^{1/2} \\
\left|\int_{-\infty}^{\infty} w_x(vw)dx\right| &\leq C\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}\|w\|_{H^1(\mathbb{R})}^2
\end{aligned}$$

Debido a las desigualdades de Sobolev y Hölder, la estimación es

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} v(t,x)w(t,x)w_x(t,x)dx\right| \lesssim \|w(t,\cdot)\|_{H^1}^2\|v(t,\cdot)\|_{L^2} \tag{2.13}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{H^1}^2 &\leq C\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}\|w\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \\
\frac{d}{dt}\|w\|_{H^1}^2 &\leq C\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}\|w\|_{H^1(\mathbb{R})}^2
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Gronwall para derivadas tenemos

$$\begin{aligned}
\|w\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &\leq \exp\left(\int_0^t\|v\|_{L^2}\,dt'\right)\|w\,(0,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \\
\|w\|_{H^1(\mathbb{R})} &\leq \|w_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\left(\exp\left(\int_0^t\|v\|_{L^2}\,dt'\right)\right)^{1/2} \\
\|w\|_{H^1(\mathbb{R})} &\leq \|w_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\exp\left(\int_0^t\|v\|_{L^2}\,dt'\right)
\end{aligned}$$

de donde

$$\|w(t,\cdot)\|_{H^1} \lesssim \|w_0\|_{H^1}\exp\left(\int_0^t\|v(t',\cdot)\|_{L^2}\,dt'\right) \tag{2.14}$$

La ecuación (2.14) nos permite deducir que $w(t)$ existe al menos en el intervalo de tiempo $[-T,T]$. Las justificaciones de estos pasos formales se realizan mediante la regularización, para soluciones suaves. Entonces terminamos usando el resultado de dependencia continua para inferir que (2.14) sigue siendo válido en el límite donde pierde la suavidad. ∎

2.2. Mala colocación local en H^2; $s < 0$

En esta sección, se establece un resultado de mala colocación que indica la agudeza de los teoremas (2.1) y (2.2). Este resultado sugiere que no se puede esperar obtener a través de argumentos de iteración, incluso soluciones locales de la ecuación BBM para datos en H^s si $s < 0$ (no se puede garantizar que haya solución para $s < 0$).

La demostración del siguiente teorema se realizara en varios pasos. El análisis gira sobre la relación aritmética explicita.

$$\frac{\xi_1}{1+\xi^2} + \frac{\xi-\xi_1}{1+(\xi-\xi_1)} - \frac{\xi}{1+\xi^2} = \frac{\xi\xi_1(\xi-\xi_1)\left(\xi-\xi_1\xi+\xi_1^2+3\right)}{(1+\xi_1)^2\left(1+(\xi-\xi_1)^2\right)\left(1+\xi_1^2\right)} := \theta(\xi;\xi_1) \quad (2.15)$$

para el simbolo φ.

Teorema 2.3 *Para cualquier $s < 0$, $T > 0$ la aplicación flujo Φ establecido en los teoremas (2.1) y (2.2) no es de clase C^2 de H^s en X_T^s .*

2.2.1. Reducción del teorema (2.3) para refutar una estimación bilineal

Considere el problema de Cauchy

$$\begin{cases} iu_t = \varphi(D_x)u + \frac{1}{2}\varphi(D_x)u^2 \\ u(0,x) = \eta u_0(x) \end{cases} \quad (2.16)$$

donde $\eta > 0$ es un parámetro. Como en (2.6) escribimos (2.16), una ecuación integral

$$u(t,x) = \eta S(t)u_0(x) - i\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\left(\frac{u^2(t',x)}{2}\right)dt'$$

donde como antes, $S(t) = exp(-it\varphi(D_x))$ es el grupo unitario que define la solución de la ecuación lineal BBM. La solución de la ecuación (2.16) es una función de tres variables

$u = u(\eta, t, x)$. Así, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial \eta}(0,t,x) \\
= \ & Lim_{k\to 0}\frac{u\left((0,t,x)+k\left(1,0,0\right)\right)-u\left(0,t,x\right)}{k} \\
= \ & Lim_{k\to 0}\frac{u\left(k,t,x\right)-u\left(0,t,x\right)}{k} \\
= \ & Lim_{k\to 0}\frac{kS(t)u_0(x)-i\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\left(\frac{u^2(t',x)}{2}\right)dt'+i\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\left(\frac{u^2(t',x)}{2}\right)dt'}{k} \\
= \ & Lim_{k\to 0}\left[\frac{kS(t)u_0(x)}{k}\right]
\end{aligned}
$$

entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(0,t,x) = S(t)u_0(x) := u_1\left(t,x\right)$$

Así, $u\left(0,t,x\right)=0$. Además la primera derivada formal de $u\left(\eta,t,x\right)$ con respecto a η con $\eta = 0$ es:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(0,t,x) = S\left(t\right)u_0\left(x\right) := u_1\left(t,x\right)$$

Además,

$$u(\eta,t,x) = \eta S(t)u_0(x) - i\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\left(\frac{u^2(\eta,t',x)}{2}\right)dt'$$

y calculamos la primera derivada,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \eta}(\eta,t,x) &= S(t)u_0(x) - i\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\frac{u^2(\eta,t',x)}{2}\right)dt' \\
&= S(t)u_0(x) - \frac{i}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\left[2u\left(\eta,t',x\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\eta,t',x\right)\right]dt'
\end{aligned}
$$

Luego la segunda derivada será

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\eta,t,x) &= \frac{\partial}{\partial \eta}\left(-\frac{i}{2}\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\left[2u\left(\eta,t',x\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\eta,t',x\right)\right]dt'\right) \\
&= -i\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\frac{\partial}{\partial \eta}\left[u\left(\eta,t',x\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\eta,t',x\right)\right]dt' \\
&= -i\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\left[\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\eta,t',x\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\eta,t',x\right)+u\left(\eta,t',x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\eta,t',x\right)\right]dt' \\
&= -i\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\eta,t',x\right)\right)^2+u\left(\eta,t',x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\eta,t',x\right)\right]dt'
\end{aligned}
$$

Si $\eta = 0$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(0,t,x) &= -i\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}(0,t',x)\right)^2 + u(0,t',x)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(0,t',x)\right]dt' \\
&= -i\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\left[u_1^2(t,x)+0\right]dt' \\
&= -2i\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\frac{u_1^2(t,x)}{2}dt' := u_2(t,x)
\end{aligned}
$$

Así, tomando norma a $u_2(t,x)$ en el espacio X_T^s tenemos

$$
\begin{aligned}
\|u_2(t,x)\|_{X_T^s} &= \left\|-2i\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\frac{u_1^2(t,x)}{2}dt'\right\|_{X_T^s} \\
&= \sup_{t\in[-T,T]}\left\|-2i\int_0^t S(t-t')\varphi(D_x)\frac{u_1^2(t,x)}{2}dt'\right\|_{H^1} \\
&\leq \sup_{t\in[-T,T]}\int_0^t \left\|S(t-t')\varphi(D_x)u_1^2(t,x)\right\|_{H^1}dt' \\
&\leq \sup_{t\in[-T,T]} C_sT\|u_1(t,x)\|_{H^1}^2 \\
&= C_sT\|S(t)u_0(x)\|_{X_T^s}^2 \\
&= C_sT\|u_0(x)\|_{X_T^s}^2 \\
\|u_2(t,x)\|_{X_T^s} &\leq C_sT\|u_0(x)\|_{X_T^s}^2
\end{aligned}
$$

Si se supone que la aplicación $\mathcal{U}$ existe y es de clase C^2 de H^s a X_T^s entonces la estimación

$$
\|u_2\|_{X_T^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s}^2 \tag{2.17}
$$

necesariamente se cumple. La estrategia usada para probar el teorema (2.3), es encontrar un u_0 tal que (2.17) falla si $s < 0$, nos importa saber cuan pequeño podria ser $T > 0$.

2.2.2. La elección de u_0 y una representación para u_2

Sea u_0 definida a través de su transformada de Fourier de la siguiente manera:

$$
\widehat{u}_0(\xi) = \gamma^{-1/2}N^{-s}\left(\mathbf{1}_{I_1}(\xi) + \mathbf{1}_{I_2}(\xi)\right)
$$

donde $I_1 = [-N-\gamma; -N+\gamma]$ y $I_2 = [N-\gamma; N+\gamma]$. Aquí, la constante positiva N es grande y la constante positiva γ es pequeña. La relación entre N y γ serán fijadas ahora. Está claro que $\|u_0\|_{H^s} \approx 1$. Además, notar que u_0 tiene valor real puesto que es una función real par.

Aplicando la inversa de la transformada de Fourier a $\widehat{u}_0(\xi)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_0^{\vee}(\xi) &= \gamma^{-1/2}N^{-s}\left(\mathbf{1}_{I_1}(\xi)+\mathbf{1}_{I_2}(\xi)\right)^{\vee} \\
u_0 &= \gamma^{-1/2}N^{-s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\left(\mathbf{1}_{I_1}(\xi)+\mathbf{1}_{I_2}(\xi)\right)d\xi \\
&= \gamma^{-1/2}N^{-s}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\mathbf{1}_{I_1}(\xi)\,d\xi+\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\mathbf{1}_{I_2}(\xi)\,d\xi\right) \\
&= \gamma^{-1/2}N^{-s}\left(\int_{I_1} e^{ix\xi}d\xi+\int_{I_2} e^{ix\xi}d\xi\right) \\
u_0(t,x) &= \gamma^{-1/2}N^{-s}\int_{\xi\in I_1\cup I_2} e^{ix\xi}d\xi
\end{aligned}$$

Además,

$$\|u_0\|_{H^s}\approx 1$$

A partir de (2.11), consideremos la siguiente ecuación lineal,

$$u_t+u_x-u_{xxt}=0 \tag{2.18}$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación anterior tenemos

$$\widehat{[u_t]}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}u_t dx=\widehat{u}_t$$

Además,

$$\begin{aligned}
\widehat{[u_x]}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\frac{\partial u}{\partial x}dx=\frac{1}{2\pi}\left[ue^{-ix\xi}\mid_{-\infty}^{\infty}+i\xi\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-ix\xi}dx\right] \\
&= i\xi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-ix\xi}dx=i\xi\widehat{u}
\end{aligned}$$

Luego

$$\widehat{[u_{xxt}]}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}u_{xxt}dx=(i\xi)^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-ix\xi}dx=(i\xi)^2\,\widehat{u}_t$$

Reeemplazando en (2.18) tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \widehat{u}_t+i\xi\widehat{u}-i^2\xi^2\widehat{u}_t=\left(1+\xi^2\right)\widehat{u}_t+i\xi\widehat{u} \\
\widehat{u}_t &= \frac{-i\xi}{\left(1+\xi^2\right)}\widehat{u} \\
\frac{d}{dt}\widehat{u} &= \frac{-i\xi}{\left(1+\xi^2\right)}\widehat{u}
\end{aligned}$$

Por separación de variables tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\widehat{u}}d\widehat{u} &= \frac{-i\xi}{\left(1+\xi^{2}\right)}dt \\
\widehat{u} &= Ce^{\frac{-i\xi}{\left(1+\xi^{2}\right)}t}
\end{aligned}$$

Pero

$$u\left(0,x\right) = u_0(x)$$

y

$$\widehat{u}\left(t,\xi\right) = Ce^{\frac{-i\xi}{\left(1+\xi^{2}\right)}t}$$

Si, $t=0$ entonces $\widehat{u}\left(0,\xi\right) = C = \widehat{u}_0\left(\xi\right)$ luego,

$$\widehat{u}\left(t,\xi\right) = \widehat{u}_0\left(\xi\right)e^{\frac{-i\xi}{\left(1+\xi^{2}\right)}t}$$

Además,

$$\varphi\left(\xi\right) = \frac{\xi}{\left(1+\xi^{2}\right)}$$

Por tanto,

$$\widehat{u}_1\left(t,\xi\right) = \widehat{u}_0\left(\xi\right)e^{-it\varphi(\xi)}$$

Luego, aplicando la transformada inversa de Fourier, tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_1^{\vee}\left(t,\xi\right) &= \left(\widehat{u}_0\left(\xi\right)e^{-it\varphi(\xi)}\right)^{\vee} \\
u_1\left(t,x\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\left(e^{-it\varphi(\xi)}\widehat{u}_0\left(\xi\right)\right)dx \\
&= \gamma^{-1/2}N^{-s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi-it\varphi(\xi)}\left[\gamma^{-1/2}N^{-s}\left(\mathbf{1}_{I_1}\left(\xi\right)+\mathbf{1}_{I_2}\left(\xi\right)\right)\right]dx \\
&= \gamma^{-1/2}N^{-s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi-it\varphi(\xi)}\left(\mathbf{1}_{I_1}\left(\xi\right)+\mathbf{1}_{I_2}\left(\xi\right)\right)dx \\
u_1\left(t,x\right) &= \gamma^{-1/2}N^{-s}\int_{\xi\in I_1\cup I_2} e^{ix\xi-it\varphi(\xi)}\left(\mathbf{1}_{I_1}\left(\xi\right)+\mathbf{1}_{I_2}\left(\xi\right)\right)dx
\end{aligned}$$

Por tanto, considere la primera iteración u_1 como una función de N, γ y s. Porque

$$\begin{aligned}
u_1\left(t,x\right) &= \gamma^{-1/2}N^{-s}\int_{\xi\in I_1\cup I_2} e^{ix\xi-it\varphi(\xi)}dx \\
u_1\left(t,x\right) &= S(t)u_0(x) \quad \text{donde} \quad S(t) = exp(-it\varphi(D_x))
\end{aligned}$$

esto es inmediato hasta un factor de 2π, que

$$u_1(t,x) = \gamma^{-1/2} N^{-s} \int_{\xi \in I_1 \cup I_2} \exp(ix\xi - it\varphi(\xi))\, d\xi$$

y su transformada de Fourier está dada como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{x\to\xi}(u_1)(t,\xi) &= \exp(-it\varphi(\xi))\, \widehat{u}_0(\xi) \\ \widehat{u}_1(t,\xi) &= e^{-it\varphi(\xi)} \widehat{u}_0(\xi) \end{aligned}$$

Para calcular u_2 el siguiente lema técnico es útil.

Lema 2.3 *Sea $F(t,x)$ dado y defina $v(t,x)$ por*

$$v(t,x) = \int_0^t S(t-t')\, F(t',x)\, dt'$$

donde $S(t) = \exp(-it\varphi(D_x))$. Entonces, formalmente v puede ser expresado de la siguiente manera

$$v(t,x) = \frac{1}{4i\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix\xi - it\varphi(\xi)) \frac{e^{it(\tau+\varphi(\xi))} - 1}{\tau + \varphi(\xi)} \widehat{F}(\tau,\xi)\, d\tau d\xi$$

Demostración. Para la demostración del lema (2.3), definimos

$$v(t,x) = \int_0^t S(t-t')\, F(t',x)\, dt'$$

donde $S(t) = \exp(-it\varphi(D_x))$. Usando la propiedad de semigrupos para $S(t-t')$ en $v(t,x)$, tenemos

$$v(t,x) = S(t) \int_0^t S(-t')\, F(t',x)\, dt' \tag{2.19}$$

Definimos $H(t',x) = S(-t')\, F(t',x)$ y $\widehat{H} = \mathcal{F}_{t'\to\tau}(H)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t H(t',x)\, dt' &= \int_0^t \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t'} \widehat{H}(\tau,x)\, d\tau dt' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t e^{i\tau t'} \widehat{H}(\tau,x)\, dt' d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t e^{i\tau t'} dt' \right) \widehat{H}(\tau,x)\, d\tau \end{aligned}$$

$$\int_0^t H(t',x)\, dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\tau t'}}{i\tau} \Big|_0^t \right) \widehat{H}(\tau,x)\, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau t} - 1}{i\tau} \widehat{H}(\tau,x)\, d\tau$$

Luego reeemplazando en (2.19) tenemos

$$\int_0^t H(t',x)\,dt' = \int_0^t S(-t')\,F(t',x)\,dt' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau t}-1}{i\tau}\widehat{H}(\tau,x)\,d\tau$$

$$\int_0^t S(-t')\,F(t',x)\,dt' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau t}-1}{i\tau}\widehat{H}(\tau,x)\,d\tau \tag{2.20}$$

Ambos lados de (2.20) desaparecen para $t=0$, y la derivada del lado derecho con respecto a t es $H(t,x)$ por la fórmula de la inversa de la transformada de Fourier. Definimos G por $G(t,t',x) = S(t-t')\,F(t',x)$, entonces

$$\begin{aligned}
v(t,x) &= \int_0^t S(t-t')\,F(t',x)\,dt' \\
&= \int_0^t G(t,t',x)\,dt' \\
&= \int_0^t \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t'}\widehat{G}(t,\tau,x)\,d\tau dt' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^t e^{i\tau t'}dt'\right)\widehat{G}(t,\tau,x)\,d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{i\tau t'}}{i\tau}\,\Big|_0^t\right)\widehat{G}(t,\tau,x)\,d\tau \\
v(t,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau t}-1}{i\tau}\widehat{G}(t,\tau,x)\,d\tau
\end{aligned}$$

Usando (2.19), (2.20) y el hecho de que $S(t)$ es para cada t, un operador multiplicador de Fourier, llegamos a la representación

$$\begin{aligned}
v(t,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i+\tau}-1}{i\tau}\mathcal{F}_{t'\to\tau}(G)(t,\tau,x)\,d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau t}-1}{i\tau}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}\widehat{G}(t,\tau,\xi)\,d\xi\right)d\tau
\end{aligned}$$

para v. La fórmula de la inversa de la transformada de Fourier con respecto a x, entonces se cumple

$$\begin{aligned}
v(t,x) &= \frac{1}{4i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i+\tau}-1}{\tau}\mathcal{F}_{(t',x)\to(\tau,\xi)}(G)(t,\tau,\xi)\,e^{ix\xi}d\tau d\xi \qquad (2.21)\\
&= \frac{1}{4i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i+\tau}-1}{\tau}e^{ix\xi}\widehat{G}(t,\tau,\xi)\,d\xi d\tau
\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$G(t,t',x) = S(t-t')\,F(t',x)$$

y aplicando la transformada de Fourier tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{G}(t,t',x) &= \widehat{S(t-t')F}(t',x) \\
&= e^{-i\varphi(\xi)(t-t')}\widehat{F}(t',\xi) \\
&= e^{-i\varphi(\xi)t}e^{i\varphi(\xi)t'}\widehat{F}(t',\xi)
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{t'\to\tau}\left\{\widehat{G}(t,t',\xi)\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it'\tau}e^{-i\varphi(\xi)t}e^{i\varphi(\xi)t'}\widehat{F}(t',\xi)\,dt' \\
&= \frac{e^{-i\varphi(\xi)t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it'\tau}e^{i\varphi(\xi)t'}\widehat{F}(t',\xi)\,dt' \\
&= \frac{e^{-i\varphi(\xi)t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it'(\tau-\varphi(\xi))}\widehat{F}(t',\xi)\,dt'
\end{aligned}$$

Ahora, esta claro que

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(G)(t,t',\xi) = \exp(-i(t-t')\varphi(\xi))\,\mathcal{F}_{x\to\xi}(F)(t',\xi)$$

Y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{(t,x)\to(\tau,\xi)}(G)(t,\tau,\xi) &= e^{-it\varphi(\xi)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it'(\tau-\varphi(\xi))}\mathcal{F}_{x\to\xi}(F)(t',\xi)\,dt' \\
&= e^{-it\varphi(\xi)}\widehat{F}(\tau-\varphi(\xi),\xi)
\end{aligned}$$

entonces

$$\widehat{G}(t,\tau,\xi) = e^{-i\varphi(\xi)t}\widehat{F}(\tau-\varphi(\xi),\xi) \tag{2.22}$$

Luego, sustituyendo (2.22) en (2.21) tenemos

$$\begin{aligned}
v(t,x) &= \frac{1}{4i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i+\tau}-1}{\tau}e^{ix\xi}\widehat{G}(t,\tau,\xi)\,d\xi d\tau \\
&= \frac{1}{4i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i+\tau}-1}{\tau}e^{ix\xi}e^{-i\varphi(\xi)t}\widehat{F}(\tau-\varphi(\xi),\xi)\,d\tau d\xi \\
&= \frac{1}{4i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i+\tau}-1}{\tau}e^{ix\xi-i\varphi(\xi)t}\widehat{F}(\tau-\varphi(\xi),\xi)\,d\tau d\xi
\end{aligned}$$

Luego, definimos $\tau_1 = \tau - \varphi(\xi)$ obtenemos

$$v(t,x) = \frac{1}{4i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(\tau_1+\varphi(\xi))}-1}{\tau_1+\varphi(\xi)}e^{i(x\xi-t\varphi(\xi))}\widehat{F}(\tau_1,\xi)\,d\tau d\xi$$

■

A partir de la solución de la ecuación (2.16) definimos

$$u_2(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(0,t,x) = -2i\int_0^t S(t-t')\,\varphi(D_x)\left(\frac{u_1(t',x)}{2}\right)dt'$$

Luego,

$$u_2(t,x) = -i\int_0^t S(t-t')\,\varphi(D_x)\,u_1^2(t',x)\,dt'$$

Aplicando el lema (2.3) a $u_2(t,x)$ obtenemos

$$\begin{aligned} u_2(t,x) &= -i\left(\frac{1}{4i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi - t\varphi(\xi))}\frac{e^{it(\tau+\varphi(\xi))}-1}{\tau+\varphi(\xi)}\widehat{\varphi(D_x)\,u_1^2}(t',x)dt'd\xi\right) \\ & -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi - t\varphi(\xi))}\frac{e^{it(\tau+\varphi(\xi))}-1}{\tau+\varphi(\xi)}\varphi(\xi)\,\widehat{u}_1^2(\tau,\xi)\,d\tau d\xi \\ & -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi - t\varphi(\xi))}\frac{e^{it(\tau+\varphi(\xi))}-1}{\tau+\varphi(\xi)}\varphi(\xi)\left(\widehat{u}_1 * \widehat{u}_1\right)(\tau,\xi)\,d\tau d\xi \end{aligned}$$

Debido al lema (2.3) podemos definir

$$\widehat{u}_1(\tau,\xi) = \delta(\tau+\varphi(\xi))\,\widehat{u}_0(\xi)$$

donde la convolución de $(\widehat{u}_1 * \widehat{u}_1)$ será de la forma

$$\begin{aligned} \left(\widehat{u}_1 * \widehat{u}_1\right)(\tau,\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}_1(\xi-\xi_1)\,\widehat{u}_1(\xi_1)\,d\xi_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau+\varphi(\xi-\xi_1))\,\widehat{u}_0(\xi-\xi_1)\,\delta(\tau+\varphi(\xi_1))\,\widehat{u}_0(\xi_1)\,d\xi_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau+\varphi(\xi-\xi_1))\,\delta(\tau+\varphi(\xi_1))\,\widehat{u}_0(\xi-\xi_1)\,\widehat{u}_0(\xi_1)\,d\xi_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau+\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi-\xi_1))\,\widehat{u}_0(\xi-\xi_1)\,\widehat{u}_0(\xi_1)\,d\xi_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau+\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi-\xi_1))\,\gamma^{-\frac{1}{2}}N^{-s} \\ & \quad \left(\mathbf{1}_{I_1}(\xi_1)+\mathbf{1}_{I_2}(\xi_1)\right)\gamma^{-\frac{1}{2}}N^{-s}\left(\mathbf{1}_{I_1}(\xi-\xi_1)+\mathbf{1}_{I_2}(\xi-\xi_1)\right)d\xi_1 \\ &= \gamma^{-1}N^{-2s}\int_{\xi_1\in I_1\cup I_2;\xi-\xi_1\in I_1\cup I_2}\delta(\tau+\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi-\xi_1))\,d\xi_1 \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en $u_2(t,x)$ tenemos

$$\begin{aligned} u_2(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi - t\varphi(\xi))}\frac{e^{it(\tau+\varphi(\xi))}-1}{\tau+\varphi(\xi)}\varphi(\xi)\gamma^{-1}N^{-2s} \\ & \quad \int_{\xi_1\in I_1\cup I_2;\xi-\xi_1\in I_1\cup I_2}\delta(\tau+\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi-\xi_1))\,d\xi_1 d\tau d\xi \\ &= \gamma^{-1}N^{-2s}\int_{\xi_1\in I_1\cup I_2;\xi-\xi_1\in I_1\cup I_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi-t\varphi(\xi))}\varphi(\xi) \\ & \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(\tau+\varphi(\xi))}-1}{\tau+\varphi(\xi)}\delta(\tau+\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi-\xi_1))\,d\tau d\xi d\xi_1 \end{aligned}$$

Sea $m=\tau+\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi-\xi_1)$ y $dm=d\tau$.

Reemplazando en $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(\tau+\varphi(\xi))}-1}{\tau+\varphi(\xi)}\delta(\tau+\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi-\xi_1))\,d\tau$, tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(\tau+\varphi(\xi))}-1}{\tau+\varphi(\xi)}\delta(\tau+\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi-\xi_1))\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it[m-\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi-\xi_1)+\varphi(\xi)]}-1}{m-\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi-\xi_1)+\varphi(\xi)}\delta(m)\,dm \\ &= \frac{e^{it[-\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi-\xi_1)+\varphi(\xi)]}-1}{-\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi-\xi_1)+\varphi(\xi)} \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(\tau+\varphi(\xi))}-1}{\tau+\varphi(\xi)}\delta(\tau+\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi-\xi_1))\,d\tau = \frac{e^{-it\theta(\xi,\xi_1)}-1}{-\theta(\xi,\xi_1)}$$

Luego,

$$\begin{aligned} u_2(t,x) &= \gamma^{-1}N^{-2s}\int_{\xi_1\in I_1\cup I_2;\xi-\xi_1\in I_1\cup I_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi-t\varphi(\xi))}\varphi(\xi)\frac{e^{-it\theta(\xi,\xi_1)}-1}{-\theta(\xi,\xi_1)}d\xi d\xi_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\gamma^{-1}N^{-2s}e^{-it\varphi(\xi)}\varphi(\xi)\int_{\xi_1\in I_1\cup I_2;\xi-\xi_1\in I_1\cup I_2}\frac{e^{-it\theta(\xi,\xi_1)}-1}{-\theta(\xi,\xi_1)}d\xi_1 d\xi \end{aligned}$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{x\to\xi}u_2(t,x) &= \gamma^{-1}N^{-2s}e^{-it\varphi(\xi)}\varphi(\xi)\int_{\xi_1\in I_1\cup I_2;\xi-\xi_1\in I_1\cup I_2}\frac{e^{-it\theta(\xi,\xi_1)}-1}{-\theta(\xi,\xi_1)}d\xi_1 d\xi \\
&= \gamma^{-1}N^{-2s}e^{-it\varphi(\xi)}\varphi(\xi) \\
&\quad \left\{\int_{A_1(\xi)}\frac{e^{-it\theta(\xi,\xi_1)}-1}{-\theta(\xi,\xi_1)}d\xi_1+\int_{A_2(\xi)}\frac{e^{-it\theta(\xi,\xi_1)}-1}{-\theta(\xi,\xi_1)}d\xi_1\right\} \\
&= \gamma^{-1}N^{-2s}e^{-it\varphi(\xi)}\varphi(\xi)\int_{A_1(\xi)}\frac{e^{-it\theta(\xi,\xi_1)}-1}{-\theta(\xi,\xi_1)}d\xi_1 \\
&\quad +\gamma^{-1}N^{-2s}e^{-it\varphi(\xi)}\varphi(\xi)\int_{A_2(\xi)}\frac{e^{-it\theta(\xi,\xi_1)}-1}{-\theta(\xi,\xi_1)}d\xi_1 \\
&= g_1(t,\xi)+g_2(t,\xi)
\end{aligned}$$

donde

$$A_1(\xi)=\{\xi_1:\xi_1\in I_1,\xi-\xi_1\in I_1 \text{ o } \xi_1\in I_2,\xi-\xi_1\in I_2\}$$

y

$$A_2(\xi)=\{\xi_1:\xi_1\in I_1,\xi-\xi_1\in I_2 \text{ o } \xi_1\in I_2,\xi-\xi_1\in I_1\}$$

Sea $f_j=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(g_j),\ \ j=1,2$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\{\mathcal{F}_{x\to\xi}u_2(t,x)\} &= \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\{g_1(t,\xi)+g_2(t,\xi)\} \\
u_2(t,x) &= f_1(t,x)+f_2(t,x)
\end{aligned}$$

Luego, tomando norma tenemos

$$\begin{aligned}
\|u_2(t,x)\|_{H^s(\mathbb{R})} &= \|f_1(t,x)+f_2(t,x)\|_{H^s} \\
&\leq \|f_1(t,x)\|_{H^s}+\|f_2(t,x)\|_{H^s}
\end{aligned}$$

Así

$$\|u_2(t,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})}\approx\|f_1(t,\cdot)\|_{H^s}+\|f_2(t,\cdot)\|_{H^s} \tag{2.23}$$

2.2.3. Demostración del teorema (2.3)

Como veremos momentáneamente, con una elección adecuada de γ y N, la principal contribución en la norma de $u_2(t,\cdot)$ en $H^s(\mathbb{R})$ surge de f_2. Si $\xi_1\in I_1$ y $\xi-\xi_1\in I_2$ o $\xi_1\in I_2$ y $\xi-\xi_1\in I_1$, entonces $|\xi_1|\simeq|\xi-\xi_1|\approx N$ y $|\xi|\leq 2\gamma$. Una examinación de la fórmula para θ en (2.15) junto con el orden de magnitud anterior revela que $|\theta(\xi-\xi_1)|\lesssim\gamma$. Sea $0<\epsilon\ll 1$ y sea $\gamma=N^{-\epsilon}$, con esta elección, si $\xi_1\in I_1$ y $\xi-\xi_1\in I_2$ o $\xi_1\in I_2$ y $\xi-\xi_1\in I_1$

se tiene

$$\left|\frac{e^{-it\theta(\xi,\xi_1)}-1}{\theta(\xi,\xi_1)}+it\right| \lesssim \gamma t^2$$

previsto de $N \gg 1$. Se sigue que

$$\begin{aligned}
\|f_2(t,\cdot)\|_{H^s} &\gtrsim |t|\,\gamma^{-1}N^{-2s}\left\{\int_{|\xi|\approx\gamma}|\varphi(\xi)|^2\langle\xi\rangle^{2s}\gamma^2 d\xi\right\}^{1/2}\\
&\gtrsim |t|\,\gamma^{-1}N^{-2s}\gamma\left\{\int_{|\xi|\approx\gamma}|\xi|^2\,d\xi\right\}^{1/2}\\
&\gtrsim |t|\,\gamma^{-1}N^{-2s}\gamma\gamma^{\frac{3}{2}}\\
&= |t|\,N^{-2s}N^{-\frac{3}{2}\epsilon}
\end{aligned}$$

El camino ahora está preparado para contradecir la desigualdad en (2.17). Supongamos que la aplicación de flujo $\mathcal{U}$ es C^2 como una aplicación de $H^s(\mathbb{R})$ a $C([0,T];H^s(\mathbb{R}))$ para algún $s<0$ y algún $T>0$. Entonces (2.17) se cumple para tales valores de s y T fijamos un valor no cero de t en $[-t,t]$, luego usando (2.23) y el reciente derivado con cota inferior para $\|f_2(t,\cdot)\|_{H^s}$ se ve que

$$1 \gtrsim \|u_0\|^2_{H^s} \gtrsim \|u_2\|^2_{X^s_T} \gtrsim \|u_2(t,\cdot)\|_{H^s} \gtrsim \|f_2(t,\cdot)\|_{H^s} \gtrsim N^{-2s}N^{-\frac{3}{2}\epsilon}$$

Ya que $s<0$ podemos hacer que $\|u_2(t,\cdot)\|_{H^s}$ sea más grande que cualquier número real positivo fijo tomando primero $\epsilon>0$ lo suficientemente pequeño y luego elegimos lo suficientemente grande. Esta contradicción refuta la validez de (2.17) y la prueba del teorema (2.3) está completa.

Capítulo 3

Propiedad de Continuación Única para la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM) en un dominio periódico

En este capítulo recordaremos algunos datos útiles sobre BBM (la buena colocación global, invarianza del movimiento, analíticidad en el tiempo). Además, estableceremos la Propiedad de Continuidad Única (UCP) para la BBM.

3.1. Buena colocación, analiticidad en el tiempo e invariantes del movimiento

Para cualquier $s \geq 0$, $H^s(\mathbb{T})$ denota el espacio de Sobolev

$$H^s(\mathbb{T}) = \left\{ u : \mathbb{T} \to \mathbb{R};\ \|u\|_{H^s} := \left\| \left(1 - \partial_x^2\right)^{s/2} u \right\|_{L^2(T)} < \infty \right\}$$

y su dual se denota por $H^{-s}(\mathbb{T})$.

Consideremos el problema de valor inicial

$$u_t - u_{txx} + u_x + u.u_x = 0, \ \ x \in \mathbb{T}, t \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{3.2}$$

Sea $A = -\left(1 - \partial_x^2\right)^{-1} \partial_x \in \mathcal{L}\left(H^s(\mathbb{T}); H^{s+1}(\mathbb{T})\right)$ (para cualquier $s \in \mathbb{R}$) y $w(t) = e^{tA}$

para $t \in \mathbb{R}$. Ponemos (3.1)-(3.2) en su forma integral

$$u(t) = w(t)\, u_0 + \int_0^t w(t-s)\, A\left(\frac{u^2}{2}\right)(s)\, ds \tag{3.3}$$

para $s \geq 0$ y $T > 0$. Sea

$$X_T^s = C\left([-T, T]; H^s(\mathbb{T})\right)$$

Notamos que para $u \in X_T^s$, u resuelve (3.1) en $D'\left(-T, T; H^{s-2}(\mathbb{T})\right)$ y (3.2) si, y solo si, cumple (3.3) para todo $t \in [-T, T]$.

A continuación enunciamos un teorema importante cuya demostración puede encontrarse en Bona & Tzvetkov (2009) y Roumegoux (2010).

Teorema 3.1 *Sea $s \geq 0$, $u_0 \in H^s(\mathbb{T})$ y $T > 0$. Entonces existe una solución única $u \in X_T^s$ de (3.1)-(3.2) (o equivalentemente (3.3)). Además, para cualquier $R > 0$, la aplicación $u_0 \to u$ es analítica real desde $B_R(H^s(\mathbb{T}))$ en X_T^s.*

Algunas propiedades adicionales se recopilan en el siguiente resultado.

Proposición 3.1 *Para $u_0 \in H^1(\mathbb{T})$ la solución $u(t)$ del (PVI) (3.1)-(3.2) satisface $u \in C^\omega(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{T}))$. Además, los tres términos integrales*

$$\int_{\mathbb{T}} u dx; \quad \int_{\mathbb{T}} \left(u^2 + u_x^2\right) dx; \int_{\mathbb{T}} \left(u^3 + 3u^2\right) dx$$

son invariantes del movimiento (es decir, permanecen constante en el tiempo).

Demostración. Empezaremos con las invariantes del movimiento. Si $u_0 \in H^1(\mathbb{T})$ entonces $u \in X_T^1$ para todo $T > 0$.

Partimos de las ecuaciones (3.1)-(3.2), de donde obtenemos

$$\begin{aligned}
u_t - u_{txx} + u_x + u.u_x &= 0, \;\; x \in T, \;\; t \in \mathbb{R} \text{ con } u(x,0) = u_0(x) \\
u_t - u_{txx} &= -u_x - u.u_x \\
\partial_t u - \partial_t u_{xx} &= -\left(\partial_x u + u\partial_x u\right) \\
\partial_t \left(u - u_{xx}\right) &= -\left(\partial_x u + \frac{1}{2}\partial_x u^2\right) \\
\partial_t \left(I - \partial_x^2\right) u &= -\left(\partial_x\right)\left(u + \frac{1}{2}u^2\right) \\
\partial_t u &= \left(I - \partial_x^2\right)^{-1} \left(-\partial_x\right)\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)
\end{aligned}$$

Así,

$$u_t = -\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}\partial_x\left(u+\frac{u^2}{2}\right) \in X_T^2$$

Por lo tanto, todos los términos en (3.1) pertenecen a X_T^0.

Luego, integrando sobre el toro en la ecuación (3.1) tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} (u_t - u_{txx} + u_x + u.u_x)\, dx \\
0 &= \int_0^{2\pi} u_t dx - \int_0^{2\pi} u_{txx} dx + \int_0^{2\pi} u_x dx + \int_0^{2\pi} u.u_x dx \\
0 &= \int_0^{2\pi} u_t dx - u_{tx} \mid_0^{2\pi} + u \mid_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\frac{d}{dx} u^2 dx \\
0 &= \int_0^{2\pi} u_t dx - 0 + 0 + \frac{1}{2} u^2 \mid_0^{2\pi} \\
0 &= \int_0^{2\pi} u_t dx
\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}} u dx = 0$$

Ahora si multiplicamos por u a la ecuación (3.1) e integramos sobre el toro tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} \left(u.u_t - u.u_{txx} + u.u_x + u^2.u_x\right) dx \\
0 &= \int_0^{2\pi} u.u_t dx - \int_0^{2\pi} u.u_{txx} dx + \int_0^{2\pi} u.u_x dx + \int_0^{2\pi} u^2.u_x dx \\
0 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} u^2 dx - \left(u.u_{tx} \mid_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} u_x u_{tx} dx\right) + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\frac{d}{dx} u^2 dx + \int_0^{2\pi} u^2 u_x dx \\
0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} u^2 dx + \int_0^{2\pi} u_x u_{tx} dx + \frac{1}{2} u^2 \mid_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} u^2 u_x dx \\
0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} u^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} u_x^2 dx \\
0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} \left(u^2 + u_x^2\right) dx
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}} \left(u^2 + u_x^2\right) dx = 0$$

Ahora, para el último invariante de movimiento, (siguiendo Olver (1979)) integramos sobre el toro, conseguimos

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{3}(u+1)^3\right)_t - \left(u_t^2 - u_{xt}^2 + (u+1)^2 u_{xt} - \frac{1}{4}(u+1)^4\right)_x \\
0 &= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{3}(u+1)^3\right)_t - \left(u_t^2 - u_{xt}^2 + (u+1)^2 u_{xt} - \frac{1}{4}(u+1)^4\right)_x\right] dx \\
0 &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (u+1)_t^3\, dx - \int_0^{2\pi} \left(u_t^2 - u_{xt}^2 + (u+1)^2 u_{xt} - \frac{1}{4}(u+1)^4\right)_x dx \\
0 &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}(u+1)^3\, dx - \int_0^{2\pi} \left(u_t^2\right)_x dx + \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \left(u_{xt}^2\right)_x dx - \int_0^{2\pi} \left((u+1)^2 u_{xt}\right)_x dx + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left((u+1)^4\right)_x dx
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}(u+1)^3\, dx - \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx}\left(u_t^2\right) dx + \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx}\left(u_{xt}^2\right) dx - \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx}\left[(u+1)^2 u_{xt}\right] dx + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dx}(u+1)^4\, dx \\
0 &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}(u+1)^3\, dx - u_t^2\,\Big|_0^{2\pi} + u_{xt}^2\,\Big|_0^{2\pi} - (u+1)^2 u_{xt}\,\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}(u+1)^4\,\Big|_0^{2\pi} \\
0 &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}(u+1)^3\, dx
\end{aligned}$$

Pero $(u+1)^3 = (u^3 + 3u^2 + 3u + 1)$, integrando tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\left(u^3 + 3u^2 + 3u + 1\right) dx \\
0 &= \frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} \left(u^3 + 3u^2\right) dx + \frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} (3u+1)\, dx \\
0 &= \frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} \left(u^3 + 3u^2\right) dx
\end{aligned}$$

ya que $\left(\frac{d}{dt}\right)\int_{\mathbb{T}} (3u+1)\, dx = 0$, pues $\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}} u dx = 0$.

Probamos ahora que $u \in C^{\omega}(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{T}))$. Ya que $u \in C^1(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{T}))$ es suficiente verificar que para cualquier $u_0 \in H^1(\mathbb{T})$ hay algunos números $b > 0$, $M > 0$ y alguna sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$ en $H^1(\mathbb{T})$ con

$$\|u_n\|_{H^1} \leq \frac{M}{b^n}; \quad n \geq 0 \tag{3.4}$$

tal que

$$u(t) = \sum_{n\geq 0} t^n u_n \quad t \in (-b, b) \tag{3.5}$$

Note que la convergencia de la serie (3.5) en $H^1(\mathbb{T})$ es uniforme en el intervalo $[-rb; rb]$ para cada $r < 1$. En realidad, demostraremos que puede extenderse como una función analítica en $D_b := \{z \in \mathbb{C} : |z| < b\}$ del espacio $H^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) := H^1(\mathbb{T}; \mathbb{C})$ dotado con la misma norma

$$\left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u_k} e^{ikx} \right\|_{H^1} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(1 + |k|^2\right) |\widehat{u_k}|^2 \right)^{1/2}$$

Adaptamos la prueba clásica de la analiticidad del flujo para una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) con un campo de vectores analíticos a nuestro marco de dimensión infinita (ver Hochschild (1965)). Para $u \in H^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, sea

$$Au = -\left(1 - \partial_x^2\right)^{-1} \partial_x u \text{ y } f(u) = A\left(u + u^2\right).$$

Ya que $|k| \leq \dfrac{(k^2+1)}{2}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\|A\|_{\mathcal{L}\left(H^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})\right)} \leq \frac{1}{2}$.

Elegimos una constante positiva C_1 tal que

$$\left\|u^2\right\|_{H^1} \leq C_1 \|u\|^2_{H^1} \quad \text{para todo} \quad u \in H^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$$

Definimos por inducción en q una sucesión (u^q) de funciones analíticas de $\mathbb{C}$ a $H^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ que converge uniformemente en D_T para $T > 0$ lo suficientemente pequeño, hasta una solución de la ecuación integral

$$u(z) = u_0 + \int_{[0,z]} f(u(\zeta))\, d\zeta = u_0 + \int_0^1 f(u(sz))\, z ds$$

Sea $u^0(z) = u_0$ para $z \in \mathbb{C}$,

$$u^{q+1}(z) = u_0 + \int_{[0,z]} f(u^q(\zeta))\, d\zeta, \text{para } q \geq 0; z \in \mathbb{C}$$

■

Afirmación 3.1 $u^q(z) = \sum_{n\geq 0} z^n v_n^q$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$ *y para alguna sucesión* (v_n^q) *en* $H^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ *con* $\|v_n^q\|_{H^1} \leq \dfrac{M(q,b)}{b^n}$ *para todo* $q, n \in \mathbb{N},\ b > 0$.

En efecto, por inducción sobre q, tenemos

El resultado para $q=0$, así,

$$\begin{aligned} u^0(z) &= \sum_{n\geq 0} z^n v_n^0 \\ u^0(z) &= z^0 v_0^0 + z^1 v_1^0 + z^2 v_2^0 + ... + z^k v_k^0 + ... \end{aligned}$$

Pero $u_0 = u^0(z)$, luego de

$$u_0 = v_0^0 + z^1 v_1^0 + z^2 v_2^0 + ... + z^k v_k^0 + ...$$

tenemos $v_0^0 = u_0$ y $v_n^0 = 0$, para $n \geq 1$.

Como $v_0^0 = u_0 \in H^1(\mathbb{T})$; existe $b > 0$, $M > 0$ para la sucesión $(v_n^0)_{n\geq 0}$ en $H^1(\mathbb{T})$, tal que

$$\left\|v_n^0\right\|_{H^1} \leq \frac{M(0,b)}{b^n},\ n \geq 0$$

donde $M(0,b) = \|u_0\|_{H^1}$.

Ahora, asumimos que la afirmación (3.1) es verdadera para $q \geq 0$. Entonces, para algún $r \in (0,1)$ y algún $b > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \|z^n v_n^q\|_{H^1} &= |z|^n \|v_n^q\|_{H^1} \leq |z|^n \frac{M(q,b)}{b^n} = M(q,b)\left(\frac{|z|}{b}\right)^n \\ &\leq M(q,b) r^n, \text{ para } \ |z| \leq rb \end{aligned}$$

Así, la serie $\sum\limits_{n\geq 0} z^n v_n^q$ converge absolutamente en $H^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, uniformemente para $z \in \overline{D_{rb}}$.

Lo mismo vale para la serie

$$\sum_{n\geq 0} z^n \left(\sum_{0\leq l\leq n} v_l^q v_{n-1}^q\right)$$

se sigue que

$$\begin{aligned} f(u^q(\zeta)) &= A\left(u^q(\zeta) + u^q(\zeta)^2\right) \\ &= A\left(\sum_{n\geq 0} \zeta^n v_n^q + \left(\sum_{n\geq 0} \zeta^n v_n^q\right)^2\right) \\ &= A\left(\sum_{n\geq 0} \zeta^n v_n^q + \sum_{n\geq 0} \zeta^n \left(\sum_{0\leq l\leq n} v_l^q v_{n-l}^q\right)\right) \end{aligned}$$

converge uniformemente para $\zeta \in \overline{D_{rb}}$. Así,

$$\begin{aligned}
u^{q+1}(z) &= u_0 + \int_{[0,z]} f\left(u^q(\zeta)\right) d\zeta \\
&= u_0 + \int_{[0,z]} A\left(\sum_{n\geq 0}\zeta^n v_n^q + \sum_{n\geq 0}\zeta^n\left(\sum_{0\leq l\leq n} v_l^q v_{n-l}^q\right)\right) d\zeta \\
&= u_0 + \int_{[0,z]} \sum_{n\geq 0}\zeta^n A\left(v_n^q + \sum_{0\leq l\leq n} v_l^q v_{n-l}^q\right) d\zeta \\
&= u_0 + \sum_{n\geq 0}\left(\int_{[0,z]}\zeta^n d\zeta\right) A\left(v_n^q + \sum_{0\leq l\leq n} v_l^q v_{n-l}^q\right) \\
&= u_0 + \sum_{n\geq 0}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right) A\left(v_n^q + \sum_{0\leq l\leq n} v_l^q v_{n-l}^q\right)
\end{aligned}$$

Tomemos $m = n + 1$, ahora tenemos

$$\begin{aligned}
u^{q+1}(z) &= u_0 + \sum_{m-1\geq 0}\left(\frac{z^m}{m}\right) A\left(v_{m-1}^q + \sum_{0\leq l\leq m-1} v_l^q v_{m-1-l}^q\right) \\
&= u_0 + \sum_{m\geq 1}\left(z^m\right)\frac{1}{m} A\left(v_{m-1}^q + \sum_{0\leq l\leq m-1} v_l^q v_{m-1-l}^q\right) \\
&= u_0 + \sum_{m\geq 1}\left(z^m\right)\frac{1}{m} A\left(v_{m-1}^q + \sum_{0\leq l\leq m-1} v_l^q v_{m-1-l}^q\right) \\
&= \sum_{m\geq 0} z^m v_m^{q+1}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
v_0^{q+1} &= u_0 \\
v_m^{q+1} &= \frac{1}{m} A\left(v_{m-1}^q + \sum_{0\leq l\leq m-1} v_l^q v_{m-1-l}^q\right) \text{ para } m \geq 1
\end{aligned}$$

Se sigue que para $m \geq 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\|v_m^{q+1}\right\|_{H^1} &= \left\|\frac{1}{m} A\left(v_{n-1}^q + \sum_{0\leq l\leq m-1} v_l^q v_{m-1-l}^q\right)\right\|_{H^1} \\
&\leq \left|\frac{1}{m}\right| \|A\| \left\|v_{m-1}^q + \sum_{0\leq l\leq m-1} v_l^q v_{m-1-l}^q\right\|_{H^1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left\| v_m^{q+1} \right\|_{H^1} &\leq \frac{1}{m} \|A\| \left(\left\| v_{m-1}^q \right\|_{H^1} + \left\| \sum_{0 \leq l \leq m-1} v_l^q v_{m-1-l}^q \right\|_{H^1} \right) \\
&\leq \frac{1}{m} \|A\| \left(\frac{M(q,b)}{b^{m-1}} + C_1 m \frac{M^2(q,b)}{b^{m-1}} \right) \\
&\leq \frac{M(q+1,b)}{b^m}
\end{aligned}
$$

desde que $\left\| v_{m-1}^q \right\|_{H^1} \leq \dfrac{M(q,b)}{b^{m-1}}$ y $\left\| \sum_{0 \leq l \leq m-1} v_l^q v_{m-1-l}^q \right\|_{H^1} \leq C_1 m \dfrac{M^2(q,b)}{b^{m-1}}$. Además, tomamos $M(q+1,b) = \sup \left\{ \|u_0\|_{H^1} ;\ b \|A\| \left(M(q,b) + C_1 M^2(q,b) \right) \right\}.$

Así, la afirmación (3.1) queda probada.

Afirmación 3.2 *Sea* $T := \left(2 \|A\| \left(1 + 4C_1 \|u_0\|_{H^1} \right) \right)^{-1}$. *Entonces*
$\|u^q - u\|_{L^\infty\left(\overline{D_T}; H^1_{\mathbb{C}}(\mathbf{T})\right)} \to 0$ *cuando* $q \to \infty$ *para algún* $u \in C\left(\overline{D_T}; H^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})\right)$.
En efecto, sea $Z_T = C\left(\overline{D_T}; H^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})\right)$ *que está dotado con la norma* $|||v||| = \sup_{|z| \leq T} \|v(z)\|_{H^1}$.

Sea $R > 0$, y para $v \in B_R = \{ v \in Z_T; |||v||| \leq R \}$, tenemos que

$$
(\Gamma v)(z) = u_0 + \int_{[0,z]} f(v(\zeta))\, d\zeta
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
|||\Gamma v||| &= \sup_{|z| \leq T} \|\Gamma v(z)\|_{H^1} \\
|||\Gamma v||| &= \sup_{|z| \leq T} \left\| u_0 + \int_{[0,z]} f(v(\zeta))\, d\zeta \right\|_{H^1} \\
&\leq \sup_{|z| \leq T} \left(\|u_0\|_{H^1} + \int_{[0,z]} \|f(v(\zeta))\|_{H^1} |d\zeta| \right)
\end{aligned}
$$

$$
|||\Gamma v||| \leq \sup_{|z| \leq T} \left(\|u_0\|_{H^1} + \int_{[0,z]} \left\| A\left(v(\zeta) + v^2(\zeta) \right) \right\|_{H^1} |d\zeta| \right)
$$

Tomemos $\gamma(t) : [0,1] \to \mathbb{C}$ con $\gamma(t) = 0 + zt$; $t \in [0,1]$ y $\gamma'(t) = z$ donde

$$\int\limits_{[0,z]} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

entonces,

$$\int\limits_{[0,z]} |d\zeta| = \int_0^1 |zdt| = |z|\,[t]_0^1 = |z|$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|||\Gamma v||| &\leq \sup_{|z|\leq T} \|u_0\|_{H^1} + \sup_{|z|\leq T} \left\|A\left(v(z) + v^2(z)\right)\right\|_{H^1} \sup_{|z|\leq T} \int\limits_{[0,z]} |d\zeta| \\
&\leq \|u_0\|_{H^1} + \sup_{|z|\leq T} \|A\| \left\|v(z) + v^2(z)\right\|_{H^1} \sup_{|z|\leq T} \int_0^1 |zdt| \\
&\leq \|u_0\|_{H^1} + \sup_{|z|\leq T} \|A\| \left(\|v(z)\|_{H^1} + C_1 \|v(z)\|_{H^1}^2\right) \sup_{|z|\leq T} |z|\,[t]_0^1 \\
&\leq \|u_0\|_{H^1} + \|A\| \left(|||v||| + C_1 |||v|||^2\right) T
\end{aligned}$$

Como $|||v||| \leq R$, tenemos

$$|||\Gamma v||| \leq \|u_0\|_{H^1} + T\,\|A\| \left(R + C_1 R^2\right)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|||\Gamma v_1 - \Gamma v_2||| &= \sup_{|z|\leq T} \|\Gamma v_1(z) - \Gamma v_2(z)\|_{H^1} \\
&= \sup_{|z|\leq T} \left\| u_0 + \int\limits_{[0,z]} f(v_1(\zeta))\,d\zeta - u_0 - \int\limits_{[0,z]} f(v_2(\zeta))\,d\zeta \right\|_{H^1} \\
&= \sup_{|z|\leq T} \left\| \int\limits_{[0,z]} \left(f(v_1(\zeta)) - f(v_2(\zeta))\right) d\zeta \right\|_{H^1} \\
&= \sup_{|z|\leq T} \left\| \int\limits_{[0,z]} \left(A\left[v_1(\zeta) + v_1^2(\zeta)\right] - A\left[v_2(\zeta) + v_2^2(\zeta)\right]\right) d\zeta \right\|_{H^1} \\
&= \sup_{|z|\leq T} \left\| \int\limits_{[0,z]} A\left[(v_1(\zeta) - v_2(\zeta)) + \left(v_1^2(\zeta) - v_2^2(\zeta)\right)\right] d\zeta \right\|_{H^1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|||\Gamma v_1 - \Gamma v_2||| &\leq \|A\| \sup_{|z|\leq T} \int\limits_{[0,z]} \left\|\left(v_1(\zeta) - v_2(\zeta)\right) + \left(v_1^2(\zeta) - v_2^2(\zeta)\right)\right\|_{H^1} |d\zeta| \\
&\leq \|A\| \sup_{|z|\leq T} \int\limits_{[0,z]} \left(\|v_1(\zeta) - v_2(\zeta)\|_{H^1} + \left\|v_1^2(\zeta) - v_2^2(\zeta)\right\|_{H^1}\right) |d\zeta| \\
&\leq \|A\| \sup_{|z|\leq T} \left(\|v_1(z) - v_2(z)\|_{H^1} + \left\|v_1^2(z) - v_2^2(z)\right\|_{H^1}\right) \sup_{|z|\leq T} \int\limits_{[0,z]} |d\zeta| \\
&\leq \|A\| \sup_{|z|\leq T} \left(\|v_1(z) - v_2(z)\|_{H^1} + \|(v_1(z) - v_2(z))(v_1(z) + v_2(z))\|_{H^1}\right) T \\
&\leq T\|A\| \sup_{|z|\leq T} \left(\|v_1(z) - v_2(z)\|_{H^1} + C_1 \|v_1(z) + v_2(z)\|_{H^1} \|v_1(z) - v_2(z)\|_{H^1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|||\Gamma v_1 - \Gamma v_2||| &\leq T\|A\| \sup_{|z|\leq T} \|v_1(z) - v_2(z)\|_{H^1} \left(1 + C_1 \left(\|v_1(z)\|_{H^1} + \|v_2(z)\|_{H^1}\right)\right) \\
&\leq T\|A\| \sup_{|z|\leq T} \|v_1(z) - v_2(z)\|_{H^1} \left(1 + C_1 \left(|||v_1||| + |||v_2|||\right)\right)
\end{aligned}$$

Como v_1,$v_2 \in B_R$, tenemos,

$$|||\Gamma v_1 - \Gamma v_2||| \leq T\|A\| \, |||v_1 - v_2||| \, (1 + 2RC_1)$$

Tomamos $R = 2\|u_0\|_{H^1}$ y $T = (2\|A\|(1 + 2C_1 R))^{-1}$, tal que

$$|||\Gamma v||| \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2}$$

Así, Γ aplica la bola cerrada B_R en la bola cerrada B_R. Además,

$$|||\Gamma v_1 - \Gamma v_2||| \leq \frac{1}{2} |||v_1 - v_2|||$$

lo cual muestra que Γ es una contracción en B_R.

Por el teorema de punto fijo, existe u en Z_T tal que la sucesión (u^q), que es dado por la iteración de Picard tiene como límite $u \in Z_T$ y cumple,

$$u = \Gamma(u) = u_0 + \int\limits_{[0,z]} f(u(\zeta)) \, d\zeta; \quad |z| \leq T$$

donde,

$$u = u_0 + \int\limits_{[0,z]} f(u(\zeta)) \, d\zeta; \quad |z| \leq T$$

En particular, $u \in C^1([-T;T]; H^1(\mathbb{T}))$ (el $u^q(z)$ toma valores reales por $z \in \mathbb{R}$) y este satisface $u_t = f(u)$ sobre $[-T, T]$ junto con $u(0) = u_0$; es decir, u resuelve (3.1)-(3.2) en la clase $C^1([-T;T]; H^1(\mathbb{T})) \subset X_T^1$.

Afirmación 3.3 *$u(z) = \sum\limits_{n \geq 0} z^n v_n$, para $|z| < T$, donde $v_n = \lim_{q \to \infty} v_n^q$ para cada $n \geq 0$.*

De la afirmación (3.1), inferimos que para todo $n \geq 1$.

$$v_n^q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=T} z^{-n-1} u^q(z)\, dz$$

Sea $\gamma(t) = Te^{it}$; $t \in [0, 2\pi]$ y $\gamma'(t) = iTe^{it}$ luego,

$$\int\limits_{|z|=T} \left|z^{-n-1}\right| |dz| = \int_0^{2\pi} \left|\left(Te^{it}\right)^{-n-1}\right| \left|iTe^{it}\right| dt = \int_0^{2\pi} T^{-n-1} T dt = 2\pi T^{-n}$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\|v_n^p - v_n^q\|_{H^1} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=T} z^{-n-1} u^p(z)\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=T} z^{-n-1} u^q(z)\, dz \right\|_{H^1} \\
&= \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \left\| \int\limits_{|z|=T} z^{-n-1} \left(u^p(z) - u^q(z)\right) dz \right\|_{H^1} \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=T} \left|z^{-n-1}\right| \|u^p(z) - u^q(z)\|_{H^1} |dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|z| \leq T} \|u^p(z) - u^q(z)\|_{H^1} \int\limits_{|z|=T} \left|z^{-n-1}\right| |dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} |||u^p - u^q||| \, 2\pi T^{-n} \\
&\leq T^{-n} |||u^p - u^q|||
\end{aligned}$$

De la afirmación (3.2), inferimos que (v_n^q) es una sucesión de Cauchy en $H_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$, en efecto,

$$\begin{aligned}
\|v_n^p - v_n^q\|_{H^1} &\leq T^{-n} |||u^p - u^q||| = T^{-n} |||u^p - u + u - u^q||| \\
&\leq T^{-n} \left(|||u^p - u||| + |||u - u^q|||\right)
\end{aligned}$$

Si $p > q$ y $q \to \infty$ entonces $\|v_n^p - v_n^q\| \to 0$. Sea v_n que denota el límite en $H_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$. Note que $\|v_n^p - v_n^q\|_{H^1} \leq T^{-n} |||u^p - u^q|||$, cuando $p \to \infty$, tenemos

$$\|v_n - v_n^q\|_{H^1} \leq T^{-n} |||u - u^q|||$$

y así, la serie $\sum\limits_{n\geq 0} z^n v_n$ es convergente para $|z| < T$. Además, para $|z| < rT$ con $r < 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n\geq 0} z^n \left(v_n - v_n^q\right) \right\|_{H^1} &\leq \sum_{n\geq 0} |z^n| \, \|v_n - v_n^q\|_{H^1} \\
&\leq \sum_{n\geq 0} |z|^n \, T^{-n} \, |||u - u^q||| \\
&\leq \sum_{n\geq 0} (rT)^n \, T^{-n} \, |||u - u^q||| \\
&= |||u - u^q||| \sum_{n\geq 0} r^n \\
&= |||u - u^q||| \, \frac{1}{1-r} \\
&= (1-r)^{-1} \, |||u - u^q|||
\end{aligned}$$

y luego $u^q(z) = \sum\limits_{n\geq 0} z^n v_n^q \to \sum\limits_{n\geq 0} z^n v_n$ en Z_{rT} cuando $q \to \infty$. De aquí

$$u(z) = \sum_{n\geq 0} z^n v_n; \text{ para } |z| < T$$

lo que prueba la proposición (3.1).

3.2. Propiedad de Continuación Única para la BBM

En esta sección probaremos la Propiedad de Continuación Única (UCP) para la ecuación BBM para soluciones pequeñas con valores medios no negativos.

Teorema 3.2 *Sea $u_0 \in H^1(\mathbb{T})$ tal que*

$$\int_{\mathbb{T}} u_0(x)\, dx \geq 0 \tag{3.6}$$

Asuminos que la solución u de (3.1)-(3.2) satisface

$$u(x,t) = 0 \text{ para todo } (x,t) \in \omega \times (0,T) \tag{3.7}$$

donde $\omega \in \mathbb{T}$, es un conjunto abierto no vacío y $T > 0$, entonces $u \equiv 0$.

Demostración. Identificando $\mathbb{T}$ con $(0, 2\pi)$ de tal manera que $(2\pi - \varepsilon, 2\pi) \cup (0, \varepsilon) \subset \omega$ para algún $\varepsilon > 0$, esto es posible cada vez que tomamos el origen de coordenadas dentro de ω. Como $u \in C^{\omega}\left(\mathbb{R}; H^{1}\left(\mathbb{T}\right)\right)$ por la proposición (3.1) tenemos que $u\left(x,\cdot\right) \in C^{\omega}\left(\mathbb{R}\right)$ para todo $x \in \mathbb{T}$. De (3.7) tenemos

$$u\left(x,t\right) = 0 \text{ para } \quad \left(x,t\right) \in \omega \times \mathbb{R} \tag{3.8}$$

Sea la función

$$v\left(x,t\right) = \int_{0}^{x} u\left(y,t\right) dy$$

entonces, $v \in C^{\omega}\left(\mathbb{R}; H^{2}\left(0,2\pi\right)\right)$, donde

$$\begin{aligned}
v_t &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^x u\left(y,t\right) dy\right) = \int_0^x \frac{d}{dt} u\left(y,t\right) dy = \int_0^x u_t\left(y,t\right) dy \\
v_x &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^x u\left(y,t\right) dy\right) = u\left(x,t\right) \\
v_{txx} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\int_0^x u\left(y,t\right) dy\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dx}\left(u\left(x,t\right)\right)\right) = u_{tx}\left(x,t\right)
\end{aligned}$$

Luego, integrando (3.1) sobre $(0,x)$, y utilizando las identidades de arriba, tenemos

$$\begin{aligned}
v_t - v_{txx} + v_x + \frac{u^2}{2} &= \int_0^x u_t\left(y,t\right) dy - u_{tx}\left(x,t\right) + u\left(x,t\right) + \frac{u^2}{2} \\
&= \int_0^x \left[u_t\left(y,t\right) - u_{txx}\left(y,t\right) + u_x\left(y,t\right) + u.u_x\left(y,t\right)\right] dy \\
&= \int_0^x 0 dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

Así, v satisface

$$v_t - v_{txx} + v_x + \frac{u^2}{2} = 0 \text{ ; con } x \in (0{,}2\pi) \tag{3.9}$$

Luego,

$$v_t = v_{txx} - v_x - \frac{u^2}{2}$$

Definimos

$$I\left(t\right) = \int_0^{2\pi} v\left(x,t\right) dx$$

Note que $I \in C^{\omega}\left(\mathbb{R}\right)$. Integrando (3.9) sobre $(0{,}2\pi)$ y con (3.6) se tiene

$$\begin{aligned}
I_t\left(t\right) &= \int_0^{2\pi} v_t\left(x,t\right) dx \\
I_t\left(t\right) &= \int_0^{2\pi} \left[v_{txx}\left(x,t\right) - v_x\left(x,t\right) - \frac{u^2}{2}\left(x,t\right)\right] dx
\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} v_{txx}(x,t)\,dx &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx} v_{tx}(x,t)\,dx = v_{tx}(2\pi,t) - v_{tx}(0,t) = 0\\ \int_0^{2\pi} v_x(x,t)\,dx &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx} v(x,t)\,dx = v(x,t)\mid_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} u(y,t)\,dy\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left[v_{txx}(x,t) - v_x(x,t) - \frac{u^2}{2}(x,t)\right]dx &= -\int_0^{2\pi} u(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} u^2(x,t)\,dx\\ &= -\int_0^{2\pi} u_0(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} u^2(x,t)\,dx\end{aligned}$$

Luego,

$$I_t = -\int_0^{2\pi} u_0(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |u(x,t)|^2\,dx \leq 0$$

Pues, $\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{0}}^{2\pi} u(x,t)\,dx = 0$, de donde $\int_{\mathbf{0}}^{2\pi} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbf{0}}^{2\pi} u(x,0)\,dx = \int_{\mathbf{0}}^{2\pi} u_0(x)\,dx$. Como $\|u(t)\|_{H^1} = \|u_0\|_{H^1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $v \in L^\infty(\mathbb{R}; H^2(0,2\pi))$ e $I \in L^\infty(\mathbb{R})$. Se deduce que la función I tiene límite finito cuando $t \to \infty$, que denotamos por l. De la acotación de $\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{T})}$ para $t \in \mathbb{R}$, inferimos la existencia de una sucesión $t_n \nearrow +\infty$ tal que

$$u(t_n) \rightharpoonup \widetilde{u}_0 \ en\ H^1(\mathbb{T}) \tag{3.10}$$

para algún $\widetilde{u}_0 \in H^1(\mathbb{T})$. Sea $\widetilde{u}$ que denota la solución de PVI para la BBM correspondiente al dato inicial $\widetilde{u}_0$, es decir, $\widetilde{u}$ resuelve

$$\widetilde{u}_t - \widetilde{u}_{txx} + \widetilde{u}_x + \widetilde{u}.\widetilde{u}_x = 0,\ x \in \mathbb{T},\ \ t \in \mathbb{R}$$

$$\widetilde{u}(x,0) = \widetilde{u}_0(x)$$

Elegimos algún $s \in \left(\frac{1}{2},1\right)$. Como $u(t_n) \to \widetilde{u}_0$ fuertemente en $H^s(\mathbb{T})$, inferimos del teorema (3.1) que

$$u(t_n + \cdot) \to \widetilde{u} \text{ en } C([0,1]; H^s(\mathbb{T})) \tag{3.11}$$

Se sigue de (3.8) y (3.11) y el hecho que $\widetilde{u} \in C^\omega(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{T}))$ que

$$\widetilde{u}(x,t) = 0 \text{ para } \ (x,t) \in \omega \times \mathbb{R}$$

de (3.10) y la invarianza de $\int_0^{2\pi} u(x,y)\,dy$, esto es, $\int_0^{2\pi} u(x,t_n)\,dx = \int_0^{2\pi} u(x,t)\,dx$

Haciendo $t_n \to +\infty$, tenemos

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{u}_0(x)\, dx = \int_0^{2\pi} u_0(x)\, dx$$

Sea $\widetilde{v}(x,t) = \int_0^x \widetilde{u}(y,t)\, dy$ y $\widetilde{I}(t) = \int_0^{2\pi} \widetilde{v}(x,t)\, dx$. Entonces,

$$\widetilde{I}_t = -\int_0^{2\pi} \widetilde{u}_0(x)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\widetilde{u}(x,t)|^2\, dx$$

$$\widetilde{I}_t = -\int_0^{2\pi} u_0(x)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\widetilde{u}(x,t)|^2\, dx \leq 0 \tag{3.12}$$

Así, $\widetilde{I}$ es decreciente. Luego de (3.11) deducimos que

$$I(t_n) \to \widetilde{I}(0); \quad I(t_n+1) \to \widetilde{I}(1)$$

Ya que

$$lim_{n\to\infty} I(t_n) = lim_{n\to\infty} I(t_n+1) = l$$

tenemos que $\widetilde{I}(0) = \widetilde{I}(1)$. Combinado con (3.12) se cumple que

$$\widetilde{u}(x,t) = 0, \ (x,t) \in \mathbb{T} \times [0,1]$$

en particular, $\widetilde{u}_0 = 0$. De (3.10) inferimos que

$$\int_0^{2\pi} \left(u^3(x,t_n) + 3u^2(x,t_n)\right) dx \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

donde $\int_0^{2\pi} (u^3(x,t_n) + 3u^2(x,t_n))\, dx \to \int_0^{2\pi} (\widetilde{u}_0^3(x) + 3\widetilde{u}_0^2(x))\, dx = 0$; como $\int_0^{2\pi} (u^3 + 3u^2)\, dx$ es una cantidad conservada, tenemos que

$$\int_0^{2\pi} \left(u^3 + 3u^2\right) dx = \int_0^{2\pi} \left(u_0^3 + 3u_0^2\right) dx = \int_0^{2\pi} (u_0(x) + 3)\, |u_0(x,t)|^2\, dx = 0$$

Así,

$$\int_0^{2\pi} (3 + u_0(x))\, |u_0(x)|^2\, dx = 0$$

lo cual implica que $u = 0$. ■

Conclusiones

1. La ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM) es globalmente bien colocada en el espacio H^s con $s \geq 0$, las soluciones son notablemente suaves en la variable temporal. También se demostró que el método para establecer este resultado, es decir, convertir a una ecuación integral, resolver la ecuación integral localmente en el tiempo mediante una iteración de Picard y luego mostrar que la solución local puede continuar con un argumento de división de onda larga y corta, no tendrá éxito si $s < 0$. De hecho, la posibilidad de utilizar una iteración de Picard falla si $s < 0$.

2. En particular, la ecuación Benjamín Bona Mahony (BBM) tiene la Propiedad de Continuación Única (UCP), sobre el toro unidimensional en $H^1(\mathbb{T})$.

Bibliografía

[1] Bekiranov D. (1996). *The initial value problem for the generalized Burger's equation*, Diff. Int. Eq. 9, 1253-1256.

[2] Benjamin T. B., Bona J.L & J. J. Mahony (1972). *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, Phil. Trans. Royal Soc. London 272, 47-78.

[3] Bona J. L. & Bryant P. J. (1973). *A mathematical model for long wave generated by a wave-maker in nolinear dispersive systems,* Proc. Cmbridge Philos. Soc. 73, 391-405.

[4] Bona J. L., Chen H., Sun S. & Zhang B. Y. (2005). *Comparison of quarter-plane and two-point boundary-value problems: the BBM -equation,* Discrete Cont. Dynamical Systems, Series A 13, 921-940.

[5] Bona J. L., Chen H., Sun S. & Zhang B. Y. (2007). *Comparison of quarter-plane and two-point boundary-value problems: the BBM -equation*, Discrete Cont. Dynamical Systems, Series B 7, 465-495.

[6] Bona J. L., Chen M. & Saut J. C.(2002). *Boussinesq equations and other systems for small amplitude long waves in nonlinear dispersive media I: Derivation and linear theory*, J. Nonlinear Sci. 12, 283-318.

[7] Bona J. L., Chen M. & Saut J. C.(2004). *Boussinesq equations and other systems for small amplitude long waves in nonlinear dispersive media II: Nonlinear theory*, Nonlinearity 17, 925-952.

[8] Bona J. L., Pritchard W. G. & Scott L. R. (1981). *An evaluation of a model equation for water waves*, Philos. Trans Royal Soc. London Series A 302, 457-510.

[9] Bona J. L. & Scott L. R. (1976). *The Korteweg-de Vries equation in fractional order Sobolev spaces*, Duke Math. J. 43, 87-99.

[10] Bona J. L., Sun & Zhang B.-Y. (2002). *A non-homogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation in a quarter plane*, Trans. American Math. Soc. 354, 427-490.

[11] Bona J.L. & Tzvetkov N.(2009). *Sharp well-posedness for the BBM equation,* Discrete Contin. Dyn Syst. 23 (4), 1241-1252.

[12] Bourgain J. (1993). *Fourier trnsform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations I.* Schrodinger equations, GAFA 3, 107-156, II. The KdV equation, GAFA 3, 209-262.

[13] Bourgain J. (1997). *Periodic KdV equation with measures as initial data*, Sel. Math New Ser. 3, 115-159.

[14] Bourgain J.(1997). *On the compavtness of the support of solutions of dispersive equations*, Int. Math. Res. Not. (9) 437-447.

[15] Bourgain J. (1998). *Refinements of Strichartz' inequality and applications to* 2D-NLS *with critical nonlinearity*, IMRN 5, 253-283.

[16] Castro C.(2009). *Exact controllability of the 1-d wave equation from a moving interior point*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., http://dx.doi.org/10.1051/cocv/2012009.

[17] Castro C. (2005) & Zuazua E. (2005). *Unique continuation and control for the heat equation from a lower dimensional manifold*, SIAM J. Control Optim. 42 (4), 1400-1434.

[18] Christ M., Colliander J. & Tao T. (2003). *Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations*, American J. Math. 125, 1235-1293.

[19] Colliander J., Keel M., Staffilani G., Takaoka H. & T. Tao (2003). *Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on R and T*, J. American Math. Soc. 16, 705-749.

[20] Constantin A. (2005). *Finite propagation speed for the Camassaa-Holm equation,* J. Math Phys. 46, 023506 (4 pages).

[21] Davila M. & Perla Menzala G. (1998). *Unique continuation for the Benjamin-Bona-Mahony and Boussinesq's equations*, No DEA Nonlinear Differential Equations Appl. 5 (3), 367-382.

[22] Dehman B., Gerard P. & Lebeau G. (2006). *Stabilization and control for the nonlinear Schrodinger equation on a compact surface*, Math. Z. 254, 729-749.

[23] Escauriaza L., Kenig C.E., Ponce G. & Vega L. (2007). *On uniqueness properties of solutions of thr k-generalized KdV equations*, J. Funct. Anal. 244 (2), 504-535.

[24] Evans L. C. (2010). *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society.

[25] Friedman A. (1976). *Partial Differential Equations.* Holt, Rinehart and Winston, New York.

[26] Grafakos L. (2008). *Classical Fourier Analysis* (Graduate Texts in Mathematics). Springer.

[27] Hamdi S., Enright W. H., Schiesser W. E. & Gottlieb J. J. (2004). *Exact solution and invariants of motion for general types of regularized long wave equations*, Math. Comput. Simulation 65 (4-5), 535-545.

[28] Hammack J. & Segur H. (1974). *The Korteweg-de Vries equation and water waves. II. Comparison with experiments*, J. Fluid Mech 65, 289-313.

[29] Himonas A., Misiolek G., Ponce G. & Young Zhou (2007). *Persistence properties and unique continuation of solutions of the Camassa-Holm equation,* Comm. Math. Phys. 271, 511-522.

[30] Hochschild G. (1965). *The Structure of Lie Groups,* Holden-Day, Inc., San Francisco, London, Amsterdam.

[31] Kapeler T. & Topalov P. (2006). *Global well-posedness if KdV in $H^{-1}(T)$*, Duke Math. J. 135, 327-360.

[32] Kenig C. E., Ponce G. & Vega L. (1996). *A bilinear estimate with applications to the KdV equations*, J. American Math. Soc. 9, 573-603.

[33] Kenig C. E., Ponce G. & Vega L. (2001). *On the ill-posedness of some canonical dispersive equations*, Duke Math. 106, 617-633.

[34] Khapalov A. (1995). *Controllability of the wave equation with moving point control,* Appl. Math. Optim. 31 (2), 155-175.

[35] Khapalov A. (2001). *Mobile point controls versus locally distributed ones for the controllability of the semilinear parabolic equation*, SIAM J. Control Optim. 40 (1), 231-252.

[36] Larkin N.A. & Vishnevskii M.P.(2008). *Dissipative initial boundary value problem for the BBM-equation,* Electron. J. Differential Equations (149), 1-10.

[37] Laurent C. (2010). *Global controllability and stabilization for the nonlinear Schronger equation on an interval,* ESAIM control Optim. Calc. Var. 16 (2), 356-379.

[38] Laurent C. (2010). *Global controllability and stabilization for the nonlinear Schronger equation on some compact manifold of dimension 3*, SIAM J. Math. Anal. 42 (2), 785-832.

[39] Laurent C., Rosier L. & Zhang B. Y. (2010). *Control and stabilization of the Korteweg-de Vries equation on a periodic domain,* Comm. Partial Differential Equations 35 (4), 707-744.

[40] Leugering G. & Schmidt E.J.P.G. (1989). *Boundary control of a vibrating plate with internal damping*, Math. Methods Appl. Sci. 11 (5), 573-586.

[41] Linares F. & Ortega J. (2005). *On the controllability and stabilization of the linearized Benjamin-Ono equation*, ESAIM Cnotrol Optim. Calc. Var. 11 (2), 204-218.

[42] Linares F. & Rosier L. *Exact controllability and stabilizability of the Benjamin-Ono equation,* in preparation.

[43] Lions J. L. (1992). *Pointwise control for distributed systems, in: H.T. Banks (Ed.), Control and Estimation in Distributed Parameter Systems*, SIAM.

[44] Martin P., Rosier L., & Rouchon P. (2011). *Null controllability of the structurally damped wave equation with moving control,* SIAM J. Control Optim., submitted for publication, arxiv:1111,4655.

[45] Mammeri Y. (2009). *Unique continuation property for the KP-BBM-II equation*, Differential Integral Equations 22 (3-4), 393-399.

[46] Medeiros L. A. & Milla Miranda M. (2000). *Espaços de Sobolev.* Instituto de Matematica- UFRJ.

[47] Micu S. (2001). *On the controllability of the linearized Benjamin-Bona-Mahony equation*, SIAM J. Control Optim 39 (6), 1677-1696.

[48] Micu S., Ortega J., Rosier L. & Zhang B. Y. (2009). *Control and stabilization of a family of Boussinesq systems,* Discrete Contin. Dyn. Syst. 24 (2), 273-313.

[49] Molinet L., Saut J.-C. & Tzvetkov N. (2002). *Well-posedness and ill-posedness results for the Kadomtsev-Petviashvili-I equation,* Duke Math. J 115, 353-384.

[50] Morrison P.J., Meiss J.D. & Carey J. R. (1984). *Scattering of regularized-long-wave solitary waves*, Physica D 11 (3), 324-336.

[51] Oliveira C. R. (2008). *Introduçao a Analise Funcional.* IMPA.

[52] Olver P.J. (1979). *Euler operators and conservation laws of the BBM equation*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 85 (1), 143-160.

[53] Pazy A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences 44. Springer - Verlag, New York.

[54] Polya G. & Szegö G. (1972). *Problems and theorems in analysis*, Volume 1, Springer-Verlag.

[55] Rosier L. & Rouchon P. (2007). *On the controllability of a wave equation with structural damping*, Int, J. Tomogr. Stat. 5 (w07), 79-84.

[56] Rosier L. & Zhang B. Y. (2006). *Global stabilization of the generalized Korteweg-de Vries equation posed on a finite domian*, SIAM J. Control Optim. 45, 927-992.

[57] Rosier L. & Zhang B. Y.(2009). *Local exact controllability and stabilizability of the nonlinear Schronger equation on a bounded interval*, SIAM J. Control Optim. 48 (2), 972-992.

[58] Rosier L. & Zhang B. Y. (2010). *Control and stabilization of the nonlinear Schronger equation on rectangles*, M3AS: Math. Models Methods Appl. Sci 20 (12), 2293-2347.

[59] Roumegoux D. (2010). *A symplectic non-squeezing theorem for BBM equation*, Dyn. Partial Differ. Equ. 7 (4) (2010) 289-305.

[60] Rudin W.(1979). Analisis Real y Complejo.

[61] Russell D.L. (1985). *Mathematical models for the elastic beam and their control-theoretic implications*, in: H. Brezis, M.G. Crandall, F. Kapper (Eds), Semigroup Theory and Applications, Longman, New York.

[62] Russell D.L. & Zhang B. Y. (1996). *Exact controllability and stabilizability of the Kortewweg-de Vries equation,* Trans. Amer. Math. Soc. 348, 3643-3672.

[63] Saut J. C. & Scheurer B. (1987). *Unique continuation for some evolution equations,* J. Differential Equations 66 (1), 118-139.

[64] Tzvetkov N. (1999). *Remark on the local ill-posedness for KdV equation,* C. R. Acad. Sci. Paris 329, 1043-1047.

[65] Yamamoto M. (2003). *One unique continuation for a linearized Benjamin-Bona-Mahony equation*, J. Inverse III-Posed Probl. 11 (5), 537-543.

[66] Zabusky N. J. & Galvin C. (1971). *Shallow-water waves, the Korteweg-de Vries equation and solitons*, J. Fluid Mech 47, 811-824.

[67] Zhang B. Y. (1992). *Unique continuation for the Korteweg-de Vries equation*, SIAM J. Math. Anal. 23 (1), 55-71.

[68] Zhang B.-Y.(1995). *Taylor series expansion for solutions of the KdV equation with respect to their initial values*, J. Funet. Anal. 129, 293-324.

[69] Zhang B.-Y. (1995). *Analyticity of solutions of the generalized KdV equation with respect to their initial values*, SIAM J. Math. Anal. 26, 1488-1513.

[70] Zhang B.-Y. (1995). *A remark on the Cauchy problem for the KdV equation on a periodic domain,* Diff. Int. Eq. 8, 1191-1204.

[71] Zhang X. & Zuazua E. (2001). *The linearized Benjamin-Bona-Mahony equation: As-pectral approach to unique. continuatiion*, in C. Kubrusly, et al. (Eds) Semigroups of Operatros: Theory and Applications, Optimization Software, New York, pp. 368-379.

[72] Zhang X. & Zuazua E. (2003). *Unique continuation for the linearized Benjamin-Bona-Mahony equation with space-dependent potential,* Math. Ann. 325 (3), 543-582.