UNIVERSIDAD NACIONAL
DE SAN AGUSTIN DE AREQUIPA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y FORMALES

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

TEORÍA DE SUPERFICIES DE VARIEDADES RIEMANNIANAS DE DIMENSIÓN TRES

Tesis presentada por:
Bach. Rubén Limascca Chahuayo
Bach. José Rafael Prado Ancí

Para optar el título profesional de licenciado en Matemáticas

Asesor: Dr. Vladimir Rosas Meneses

AREQUIPA – PERÚ
2018

Tesis aprobada por:

Dra. María Torreblanca Tocco

Mg. Elsa Mamani Palomino

Mg. Ricardo Hancco Ancori

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Vladimir Rosas Meneses por su orientación, enseñanza, consejos y especialmente por dedicarnos una de las cosas más preciadas por el ser humano, SU TIEMPO, para la realización de esta tesis.

A nuestros profesores de la escuela profesional de Matemáticas, varios de los cuales nos enseñaron no sólo conocimientos, sino valores y actitudes destacables como personas.

Al profesor Walter Torres Montes.

A nuestros compañeros del seminario de tesis que es donde empezó el estudio de esta tesis.

DEDICADO

A nuestras familias

RESUMEN

Encontramos explícitamente las conexiones y los coeficientes de la I y II forma fundamental de superficies inmersas en $\mathbb{H}^3, \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}\ y\ \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, también deducimos una fórmula para calcular las curvaturas extrínseca e intrínseca de superficies de revolución inmersas en $\mathbb{H}^3$.

PALABRAS CLAVE: Variedad Riemanniana, espacio hiperbólico, variedad producto, métrica, conexión, curvatura intrínseca, curvatura extrínseca.

ABSTRACT

We find explicitly the connections and the coefficients of the I and II fundamental form of surfaces immersed in $\mathbb{H}^3, \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}\ y\ \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, also we deduce a formula to calculate the extrinsic and intrinsic curvatures of surfaces of revolution immersed in $\mathbb{H}^3$.

KEY WORDS: Riemannian manifold, hyperbolic space, product manifold, metric, connection, intrinsic curvature, extrinsic curvature.

Índice general

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación trata sobre superficies inmersas en variedades Riemannianas de dimensión 3 como: el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3$ y $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ (donde $\mathbb{M}^2$ es una variedad Riemanniana de dimensión 2), en particular $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y el espacio de Minkowski, entre otros. Para esto usaremos la ecuación de Gauss y de Minardi – Codazzi, las cuales son conocidas como ecuaciones de compatibilidad en la teoría de superficies de $\mathbb{R}^3$, para luego probar que una superficie inmersa en las variedades riemannianas de las ya nombradas antes, queda determinada por su primera y segunda forma fundamental.

Así también gracias a que encontraremos la curvatura seccional, curvatura media y curvatura extrínseca de estas variedades es que calcularemos una fórmula que servirá para calcular la curvatura media y la curvatura de Gauss de cualquier superficie que esté inmersa en la variedad Riemanniana $\mathbb{H}^3$. Ricardo Earp Sa en [1] mostró una fórmula para el cálculo de la curvatura de Gauss de superficies inmersas en $\mathbb{H}^3$ utilizando las propiedades del espacio hiperbólico, nosotros no utilizaremos la teoría hiperbólica para hallarla, sino utilizaremos al espacio hiperbólico como una variedad Riemanniana.

Luego haremos una introducción al espacio de Minkowski, también llamado **espacio - tiempo**, donde veremos algunas superficies inmersas en él, luego de definir la métrica de Lorentz.

Al trabajar con la geometría Riemanniana se generalizan diversos resultados que ya hemos visto en geometría diferencial de superficies de $\mathbb{R}^3$ como la primera y segunda forma fundamental, geodésiscas, longitud, áreas, curvatura, entre otros resultados conocidos los cuales nos motivan explorar otros espacios y observar el comportamiento de esas nuevas geometrías para resaltar y hacer comparaciones con la geometría euclidiana.

Este trabajo ha sido también motivado por el trabajo realizado por Ady Cambraia Junior [2], a partir del cual hemos comprobado resultados para conexiones, curvaturas, primera y segunda forma fundamental de superficies, para luego probar que las superficies inmersas en variedades riemaneanas quedan determinada por su primera y segunda forma fundamental, la ecuación de Gauss y Mainardi Codazzi, es decir, el teorema fundamental de la geometría extiende el teorema Bonnet.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo daremos conceptos importantes desde un punto de vista general sobre la teoría de la geometría Riemanniana que nos sevirán como herramientas para capítulos posteriores, la referencia utilizada es M.P. Do Carmo [4].

1.1. Teoría básica de la Geometría Riemanniana

La siguiente definición de variedad diferenciable nos proporciona el espacio adecuado donde se verán los conceptos en esta sección.

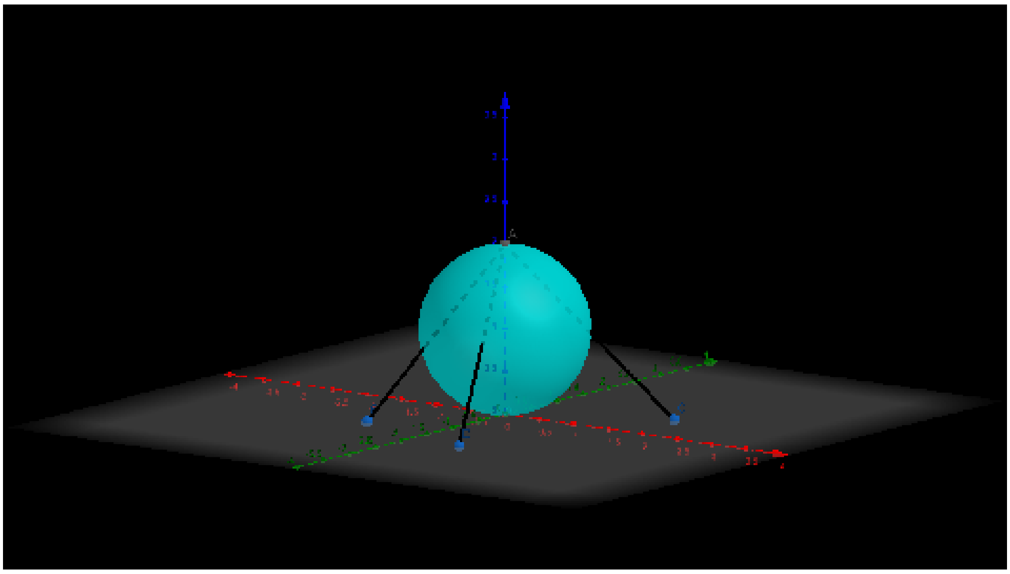
Definición 1.1 *Una* variedad diferenciable *de dimensión n es un conjunto M y una familia de aplicaciones biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ de abiertos U_α de $\mathbb{R}^n$ en M tales que:*

(1) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.

(2) *Para todo par* α, β, *con* $x_\alpha(U_\alpha)\bigcap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, *los conjuntos* $x_\alpha^{-1}(W)$ *y* $x_\beta^{-1}(W)$ *son abiertos en* $\mathbb{R}^n$ *y las aplicaciones* $x_\beta^{-1}\circ x_\alpha$ *son diferenciables.*

(3) La familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *es máxima relativamente a las condiciones (1) y (2).*

Ejemplo 1.1 *La esfera de centro en* $(0;1)$ *y radio 1 es una variedad diferenciable, cuyas parametrizaciones son la proyeccion estereográfica para el polo norte y para el polo sur.*



Dado el espacio (variedad diferenciable), quisieramos hacer geometría sobre la variedad, para esto daremos las siguientes definición y teoremas.

Definición 1.2 *Una* métrica Riemanniana *(estructura Riemanniana) en una variedad diferenciable* M *es una correspondencia que asocia a cada punto* p *de* M *un producto interno* $\langle,\rangle_p$ *(esto es, una forma bilineal y simétrica, positiva definida) en el espacio tangente* T_pM*, que varía diferenciablemente en el* *siguiente sentido: Si* $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ *es un sistema de coordenadas locales en torno de* p*, con* $x(x_1, \ldots, x_n) = q \in x(U)$ *y* $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$*, entonces* $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ *es una función diferenciable en* U*.*

Definición 1.3 *Una variedad diferenciable* M *con una métrica Riemanniana es llamada de* variedad Riemanniana*.*

Ejemplo 1.2 *Un ejemplo de variedad Riemanniana es el espacio hiperbólico* $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\}$ *donde la métrica está dada por* $g_{\mathbb{H}} = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}$

Ahora necesitamos una forma de derivar campos vectoriales, un concepto que nos proporcione como derivar vectores en variedades diferenciables dicho concepto será dado en la siguiente definición, la noción de derivación es un hecho fundamental en geometría Riemanniana ya que esta herramienta matemática nos permite estudiar la geometría de una variedad Riemanniana utilizando la métrica Riemanniana y nociones del cálculo diferencial de manera similar a como se estudió la geometría de superficies en $\mathbb{R}^3$ como se verá más adelante .

1.1.1. Conexión Riemanniana

Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de los campos de vectores de clase C^∞ en M y por $\mathcal{D}(M)$ el anillo de las funciones reales de clase C^∞ definidas en M.

Definición 1.4 *Una* conexión afín ∇ *en una variedad diferenciable* M *es una aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ \\ (X \quad , \quad Y) & \xrightarrow{\nabla} & \nabla_X Y. \end{array}$$

que se indica por ∇ *que satisface las siguientes propiedades:*

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

(ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

(iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$ *donde* $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ *y* $f,g \in \mathcal{D}(M)$.

La importancia de la conexión afín ∇ en una variedad diferenciable M por la propiedades que tiene es que nos permite *derivar* objetos situados en espacios distintos o más generales al espacio Euclidiano.

Ahora veamos como la conexión se expresa en coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_n)$ en torno de p.

$$X = \sum_i x_i X_i, \qquad Y = \sum_j y_j X_j,$$

donde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) \\ &= \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i \left(y_j \right) X_j. \end{aligned}$$

Haciendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, vemos que Γ_{ij}^k son funciones diferenciables que son llamados los **símbolos de Christoffel** de la conexión afín y que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X\left(y_k \right) \right) X_k,$$

lo que muestra que $\nabla_X Y\left(p\right)$ depende de $x_i\left(p\right)$, $y_k\left(p\right)$ y de las derivadas $X\left(y_k\right)\left(p\right)$ de y_k según X , dicho de otra manera para calcular $\nabla_X Y\left(p\right)$ el valor de la conexión en un punto p es solo preciso saber el valor del campo X en un punto p $\left(X\left(p\right)\right)$ y los valores del campo Y a lo largo de alguna curva tangente al campo X. También podemos concluir en última fórmula que la *conexión afín* es la suma de la *derivada Euclidiana* más *otro término,* el cual tiene que ver con los *símbolos de Christoffel* de la conexión afín, para mayor referencia ver M.P. Do Carmo [4]

Ejemplo 1.3 *Si* $X=(x_1,\ldots,x_n)$, $Y=(y_1,\ldots,y_n)$ *son campos de vectores de* $\mathbb{R}^n$, *con* x_i,$y_i:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, *la conexión de* $\mathbb{R}^n$ *es la derivada direccional, la cual es dada por*

$$\nabla_X Y=\left(X\left(y_1\right),\ldots,X\left(y_n\right)\right)$$

donde $X\left(y_i\right)=dy_i(X)$ *para* $i=1,\ldots,n$, *es decir,* $\nabla_X Y\left(p\right)=dy_p.X(p)$

El siguiente teorema y corolario nos permite relacionar la conexión afín con la métrica Riemanniana, esto es, nos permite derivar la métrica, también permite que los llamados símbolos de Christoffel sean simétricos con respecto a sus índices inferiores.Sus demostraciones se encuentran en Do Carmo [4]

Teorema 1.1 *Sea* M *una variedad Riemanniana. Una conexión* ∇ *en* M *es compatible con la métrica si y sólo si para todo par* V *y* W *de campos de vectores a lo largo de la curva diferenciable* $c:I\to M$ *se tiene:*

$$\frac{d}{dt}\left\langle V,W\right\rangle=\left\langle\frac{DV}{dt},W\right\rangle+\left\langle V,\frac{DW}{dt}\right\rangle,\ t\in I$$

Corolario 1.1 *Una conexión afín* ∇ *en una variedad Riemanianna* M *es* compatible *con la métrica* $\langle .,.\rangle$,*si y sólo si*

$$X\left\langle Y,Z\right\rangle=\left\langle\nabla_X Y,Z\right\rangle+\left\langle Y,\nabla_X Z\right\rangle,\qquad X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M).$$

Definición 1.5 *Una conexón afin ∇ en una variedad diferenciable M es llamada simétrica cuando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]\,, \quad \textit{para todo } X{,}Y \in \mathfrak{X}(M).$$

donde $[X, Y] = XY - YX$ *es un campo vectorial*

A continuación enunciamos un teorema de existencia y unicidad, el cual también nos proveerá una fórmula para calcular los símbolos de Christoffel en términos de la métrica Riemanniana.

Teorema 1.2 (Levi-Civita) *Dada una variedad Riemanniana M, existe una única conexión afín ∇ en M satisfaciendo las condiciones:*

a) ∇ es simétrica.

b) ∇ es compatible con la métrica Riemanniana.

Prueba. Ver referencia M.P. Do Carmo [4]. ■

Observación 1.1 *La conexión dada por el teorema anterior es denominada conexión de Levi-Civita (o conexión Riemanniana) de M.*

Sea M una variedad Riemanniana, ∇ su conexión Riemanniana y (U, x) un sistema de coordenadas, entonces

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k \tag{1.1}$$

donde Γ_{ij}^k son los coeficientes de la conexión ∇ en U o los *símbolos de Christoffel* de la conexión.

De 1.1 se sigue que:

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\}$$

donde $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ son elementos de la matriz (g_{km}), y como $\left(g^{km}\right)$ es su matriz inversa, tenemos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km} \tag{1.2}$$

podemos también observar de la expresión (1.1) que fijada una carta toda la información de la conexión está dada por el conjunto de valores Γ_{ij}^k, símbolos de Christoffel .

1.1.2. Curvatura

La siguiente definición de curvatura mide intuitivamente, cuanto una variedad Riemanniana deja de ser euclidiana.

Definición 1.6 *La curvatura R de una variedad Riemanniana M es una correspondencia que asocia a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ una aplicación $R(X,Y)$ dada por:*

$$\begin{aligned} R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ Z &\longrightarrow R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

donde $Z \in \mathfrak{X}(M)$ y ∇ es la conexión Riemanniana M.

Notación 1.1 *Se escribirá por conveniencia $\langle R(X,Y)Z, T \rangle = (X,Y,Z,T)$.*

Las siguientes dos proposiciones exhiben propiedades sobre la curvatura, cuyas demostraciones pueden ser encontradas en Do Carmo [4].

Proposición 1.1 *La curvatura R de una variedad Riemanniana goza de las siguientes propiedades:*

(i) R es bilineal en $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, esto es,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2), \end{aligned}$$

(ii) Para todo par X,$Y \in \mathfrak{X}(M)$, el operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ es lineal, esto es,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y) Z + R(X, Y) W, \\ R(X, Y) fZ &= fR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{D}(M), \quad Z,W \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposición 1.2 $R(X, Y) Z + R(Y, Z) X + R(Z, X) Y = 0$

1. $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$
2. $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$
3. $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$
4. $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$.

Escribamos la curvatura R en un sistema de coordenadas (U, x) en torno del punto $p \in M$.

Denotaremos, como de costumbre, $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$,

$$X = \sum_i u^i X_i, \qquad Y = \sum_j v^j X_j, \qquad Z = \sum_k w^k X_k,$$

Si

$$R\left(X_i, X_j\right) X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l.$$

donde R^l_{ijk} son las componentes de la curvatura R en (U, x). Se obtiene por la linealidad de R que

$$R(X,Y)Z = \sum_{i=1} \sum_{j=1} \sum_{k=1} \sum_{l=1} R^l_{ijk} u^i v^j w^k X_l \tag{1.3}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} R\left(X_i, X_j\right) X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{Xj} X_k \\ &= \nabla_{X_j} \left(\sum_l \Gamma^l_{ik} X_l \right) - \nabla_{X_i} \left(\sum_l \Gamma^l_{jk} X_l \right), \end{aligned}$$

lo que, por un calculo directo, resulta

$$R^s_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ik} \Gamma^s_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk} \Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^s_{jk} \ . \tag{1.4}$$

y entonces observamos que R depende solamente de los valores de los campos en un punto, además R depende únicamente de la métrica.

Notación 1.2 *Dado un espacio vectorial V, indicaremos por $|x \wedge y|$ la expresión*

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 \, |y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

que representa el área del paralelogramo bidimensional determinado por el par de vectores x,$y \in V$.

Proposición 1.3 *Sea* $\sigma \subset T_pM$ *un subespacio bidimensional del espacio tangente* T_pM *y sean* x,$y \in \sigma$ *dos vectores linealmente independientes. Entonces*

$$K(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2}$$

no depende de la elección de los vectores x,$y \in \sigma$.

Prueba. Ver referencia M.P. Do Carmo [4]. ■

Definición 1.7 *Dado un punto* $p \in M$ *y un subespacio bidimensional* $\sigma \subset T_pM$ *el número real* $K(x,y) = K(\sigma)$, *es llamada* curvatura seccional *de* σ *en* p, *donde* $\{x,y\}$ *es una base cualquiera de* σ.

La curvatura seccional en geometría Riemanniana es una generalización de la curvatura Gaussiana para superficies, esto será visto más adelante usando la segunda forma fundamental.

1.1.3. La segunda forma fundamental

La segunda forma fundamental es un objeto que nos va a permitir estudiar la variedad Riemanniana y la superficie en que está contenida en ella.

Definición 1.8 *Sean* M *y* N *variedades Riemanniana. Un difeomorfismo* $f : M \longrightarrow N$ *(esto es,* f *es una biyección diferenciable con inversa diferenciable) es llamado una isometría si:*

$$\langle u,v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad \textit{para todo} \;\; p \in M,\; u,\, v \in T_pM.$$

Definición 1.9 *Sea* $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ *una* inmersión, *esto es,* f *es diferenciable y* $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}\overline{M}$ *es inyectiva para todo* p *en* M. *Si* $\overline{M}$ *tiene una estructura Riemanniana,* f *induce una estructura Riemanniana en* M *por* $\langle u,v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, *para todo* $p \in M$ u, $v \in T_pM$. *La* *métrica de M es llamada entonces la* métrica inducida *por f, y f es una* inmersión isométrica *donde $f,g \in \mathcal{D}(M)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.*

Sea $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ una *inmersión*. Entonces, para cada $p \in M$, existe una vecindad $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ es una subvariedad de $\overline{M}$. Esto quiere decir que existe una vecindad $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ y un difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ en un abierto V de $\mathbb{R}^k$, tales que φ aplica difeomórficamente $f(U) \cap \overline{U}$ en un abierto del subespacio $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$.

Para simplificar la notación, identificaremos U con $f(U)$ y cada vector $v \in T_pM$, $q \in U$, con, $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Usaremos tales identificaciones para extender, por ejemplo, un campo local (esto es, definido en U) de vectores de M a un campo local (esto es, definido en $\overline{U}$) de vectores en $\overline{M}$; si U es suficientemente pequeño, tal extensión es siempre posible, como se ve usando el difeomorfismo φ.

Para cada $p \in M$, el producto interno en $T_p\overline{M}$ descompone $T_p\overline{M}$ en suma directa

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

donde $(T_pM)^{\perp}$ es el complemento ortogonal de T_pM en $T_p\overline{M}$.

Si $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escribir

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_pM, \quad v^N \in (T_pM)^{\perp}$$

Denominamos v^T la componente tangencial de v y v^N la componente normal de v.

La conexión Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$ y la conexión Riemanniana de M será indicada por ∇, así X y Y son campos locales de vectores en M, y $\overline{X}$, $\overline{Y}$ son las extensiones locales a $\overline{M}$.

Ahora, en este contexto surge una pregunta natural

¿Cuál es la relación entre ambas conexiones Riemannianas?

La respuesta es dada por la siguiente proposición.

Proposición 1.4 *La conexión de M relativa a la métrica inducida de $\overline{M}$ es*

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T.$$

Prueba. Definamos:

$$\widetilde{\nabla}_X Y := \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T$$

mostremos que esta conexión esta bien definida, es compatible y simétrica con la métrica.

(i) Mostrar que la conexión $\widetilde{\nabla}_X Y$ está bien definida consiste en mostrar que la conexión anterior no depende de las extensiones.
$\widetilde{\nabla}_X Y$ está bien definida pues $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ en $p \in M$ solo depende de

$\overline{X}\,(p) = X\,(p)$ y de los valores de $\overline{Y}$ a lo largo de alguna curva tangente a $\overline{X}\,(p) = X\,(p)$.
Es fácil probar que $\widetilde{\nabla}$ es una conexión, esto sale del hecho que $\overline{\nabla}$ ya es una conexión y la operación de proyección tangencial $(\quad)^T$ es una transformación lineal es decir la operación $(\quad)^T$ no afecta las propiedades de conexión de $\overline{M}$.

(ii) Compatibilidad con la métrica Riemanniana.

1. Es consecuencia del hecho que el producto escalar de la subvariedad M es la misma que el producto escalar del espacio ambiente $\overline{M}$.
   Sean X,Y,$Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $\overline{X}$,$\overline{Y}$,$\overline{Z} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ extensiones de X,Y,Z respectivamente, es decir, $\overline{X} = X$, $\overline{Y} = Y$, $\overline{Z} = Z$ a lo largo de M . Todos

los siguientes cálculos se harán a lo largo de M.

$$\begin{aligned}
X\langle Y,Z\rangle &= \overline{X}\left\langle \overline{Y},\overline{Z}\right\rangle\\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{Z}\right\rangle + \left\langle \overline{Y},\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}\right\rangle\\
&= \left\langle \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T,\overline{Z}\right\rangle + \left\langle \overline{Y},\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}\right)^T\right\rangle\\
&= \left\langle \widetilde{\nabla}_X Y, Z\right\rangle + \left\langle Y,\widetilde{\nabla}_X Z\right\rangle.
\end{aligned}$$

(iii) Simetría.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X &= \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}\right)^T\\
&= \left[\overline{X},\overline{Y}\right]^T\\
&= [X,Y].
\end{aligned}$$

Luego de (i), (ii), (iii) y de la unicidad del Teorema Levi-Civita se tiene el resultado $\nabla_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T$. ■

Podemos ver que la conexión de Levi-Civita ∇ de una subvariedad M se admite de manera simple: Se considera la conexión $\overline{\nabla}$ del espacio ambiente $\overline{M}$ y se toma la proyección tangente a M, esto significa que existe una componente normal de la conexión $\overline{\nabla}$ que está pasando desapercibido, esa componente normal es exactamente la definición de la segunda forma fundamental.

Notación 1.3 *Indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ los campos diferenciables en U de vectores normales a U.*

Definición 1.10 *Si X,Y son campos locales en M y $\overline{X}$,$\overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ sus extensiones, la* segunda forma fundamental *de M en $\overline{M}$, es definida por la* *siguiente operación*

$$\begin{array}{rcl} B:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M)^{\perp} \\ (X \quad , \quad Y) & \longrightarrow & B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y. \end{array}$$

$B(X,Y)$ es un campo local en $\overline{M}$, normal a M.

Proposición 1.5 *Si X,$Y \in \mathfrak{X}(M)$, la aplicación $B:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ es bilineal y simétrica, y no depende de las extensiones de X y Y.*

Prueba. *Por las propiedades de linealidad de una conexión, se concluye que B es aditiva en X ,Y y que $B(fX,Y) = fB(X,Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Resta mostrar que $B(X,fY) = fB(X,Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Indicaremos por $\overline{f}$ una extensión de f a $\overline{U}$, tenemos*

$$\begin{aligned} B(X,fY) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\left(\overline{f}\ \overline{Y}\right) - \nabla_X\left(fY\right) \\ &= \overline{f}\ \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - f\nabla_X Y + \overline{X}\left(\overline{f}\right)\overline{Y} - X\left(f\right)Y. \end{aligned}$$

Como en M, $f = \overline{f}$ y $\overline{X}\left(\overline{f}\right) = X\left(f\right)$, tenemos que los dos últimos términos se anulan, así $B(X,fY) = fB(X,Y)$, esto es, B es bilineal. Para mostrar que B es simétrica, utilizamos la simetría de la conexión Riemanniana

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - \nabla_X Y + \nabla_Y X - \nabla_Y X \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} + \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}\right) - \nabla_Y X - \left(\nabla_X Y - \nabla_Y X\right) \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} + \left[\overline{X},\overline{Y}\right] - \nabla_Y X - \left[X,Y\right]. \end{aligned}$$

como en M, $\left[\overline{X},\overline{Y}\right] = [X,Y]$, concluímos que $B(X,Y) = B(Y,X)$. ∎

De esta proposición, expresando B en un sistema de coordenadas, resulta que el valor de $B(X,Y)\,(p)$ depende apenas de $X\,(p)$ y $Y\,(p)$.

Ahora podremos definir la segunda forma fundamental de una forma parecida a como se definió en el curso de geometría diferencial. Sea $p \in M$, x, $y \in T_pM$ y $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, la aplicación siguiente:

$$\begin{array}{rcl} H_\eta : T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \\ (x \quad , \quad y) & \longrightarrow & H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle \end{array}$$

es por la proposición anterior, una forma bilineal simétrica.

Definición 1.11 *La forma cuadrática asociada a* H*, denotada por* II_η *y definida en* T_pM *por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

es llamada la segunda forma fundamental de f *en* p *según el vector normal* η*.*

Observamos que a la aplicación bilineal H_η está asociada una aplicación lineal auto-adjunta $S_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ dado por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle .$$

Proposición 1.6 *Sea* $p \in M$, $x \in T_pM$ *y* $\eta \in (T_pM)^{\perp}$*. Sea* N *una extensión local de* η *normal a* M*. Entonces*

$$S_\eta(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^T . \tag{1.5}$$

Prueba. *Sea* $y \in T_pM$ *y* X, Y *extensiones locales de* x, y*, respectivamente, y tangente a* M*. Entonces* $\langle N, Y \rangle = 0$*, y por lo tanto*

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(X,Y)(p), N \rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \right\rangle(p) \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_X Y, N \right\rangle(p) = -\left\langle Y, \overline{\nabla}_X N \right\rangle(p) \\ &= \left\langle -\overline{\nabla}_x N, y \right\rangle \end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$. ■

La ecuación $S_\eta(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^T$ nos dice que la información de la segunda forma fundamental es exactamente la información de como los vectores normales varían a lo largo de la subvariedad M.

Consideremos el caso particular en que la codimensión de la inmersión es 1, esto es, $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$; $f(M) \subset \overline{M}$ es entonces denominada una hipersuperficie. Sea $p \in M$, $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $S_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ es simétrica por álgebra lineal se sabe que S_η puede ser diagonalizado por una base ortonormal, así existe una base ortonormal de vectores propios $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM con valores propios reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, esto es,

$$S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{1.6}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son llamadas las curvaturas principales de M en p y $det(S_n) = k(p) = \lambda_1.\lambda_2.\cdots.\lambda_n$ es llamada la curvatura de Gauss - Kronecker

Observación 1.2 *En el caso de hipersuperficie el vector* $\overline{\nabla}_x N(p)$ *siempre da un vector tangente si* $|N| = 1$. *En efecto:*

$$\begin{aligned}
|N| &= 1 && (1.7)\\
\langle N, N\rangle &= 1\\
\left\langle \overline{\nabla}_x N, N\right\rangle &= 0\\
&\Rightarrow \overline{\nabla}_x N(p) \in T_pM.\\
&\Longrightarrow \overline{\nabla}_x N(p) = \left(\overline{\nabla}_x N(p)\right)^T\\
. &= -S_\eta(x) && (1.8)
\end{aligned}$$

1.1.4. Ecuación de Gauss

Sean X,Y,Z,$W \in \mathfrak{X}(M)$, denotaremos de igual forma sus extensiones a $\overline{M}$

$$\begin{aligned} &\langle R(X,Y)Z,W\rangle, \quad \text{es la curvatura de } M. \\ &\left\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\right\rangle, \quad \text{es la curvatura de } \overline{M}. \end{aligned}$$

La ecuación de Gauss responde a la siguiente pregunta:

¿Cuál es la relación entre la curvatura R de la subvariedad M y la curvatura $\overline{R}$ del espacio ambiente $\overline{M}$?

La respuesta es dada por la ecuación de Gauss dada a continuación.

Teorema 1.3 *(Ecuación de Gauss) Sean X,Y,Z,$W \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \left\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\right\rangle + \langle B(Y,W), B(X,Z)\rangle \\ &\quad - \langle B(X,W), B(Y,Z)\rangle \end{aligned} \tag{1.9}$$

Proposición 1.7 ***Prueba.*** *Sean* X,Y,Z,$W \in \mathfrak{X}(M)$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overline{R}\,(X,Y)\,Z,W \right\rangle &= \left\langle \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z, W \right\rangle. \\
&= \langle \overline{\nabla}_Y(\nabla_X Z + B(X,Z)) - \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + B(Y,Z)) \\
&\quad +\nabla_{[X,Y]}Z + B\left([X,Y],Z\right), W\rangle. \\
&= \langle \overline{\nabla}_Y \nabla_X Z + \overline{\nabla}_Y B(X,Z) - \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z - \overline{\nabla}_X B(Y,Z) \\
&\quad +\nabla_{[X,Y]}Z + B\left([X,Y],Z\right), W\rangle. \\
&= \langle \nabla_Y \nabla_X Z + B(Y,\nabla_X Z) - \nabla_X \nabla_Y Z - B(X,\nabla_Y Z) \\
&\quad +\nabla_{[X,Y]}Z + \overline{\nabla}_Y B(X,Z) - \overline{\nabla}_X B(Y,Z) + \\
&\quad B\left([X,Y],Z\right), W\rangle. \\
&= \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, W\rangle + \\
&\quad \langle \overline{\nabla}_Y B(X,Z), W\rangle - \langle \overline{\nabla}_X B(Y,Z), W\rangle. \\
&= \langle R\,(X,Y)\,Z,W\rangle - \langle B(X,Z), \overline{\nabla}_Y W\rangle + \langle B(Y,Z), \overline{\nabla}_X W\rangle. \\
&= \langle R\,(X,Y)\,Z,W\rangle - \langle B(X,Z), \overline{\nabla}_Y^{\perp} W\rangle + \langle B(Y,Z), \overline{\nabla}_X^{\perp} W\rangle. \\
&= \langle R\,(X,Y)\,Z,W\rangle - \langle B(X,Z), B\,(Y,W)\rangle + \\
&\quad \langle B(Y,Z), B\,(X,W)\rangle.
\end{aligned}
$$

de aquí se sigue el resultado. ■

La ecuación de Gauss dice que la diferencia de la curvatura de la subvariedad M y la curvatura del espacio ambiente $\overline{M}$ es dada por la información de la segunda forma fundamental B, es decir, la segunda forma fundamental mide o captura la diferencia entre las curvaturas.

Una consecuencia importante de la ecuación de Gauss es el siguiente corolario, el cual relaciona la curvatura seccional $K\,(x,y)$ de M , la curvatura seccional $\overline{K}\,(x,y)$ de $\overline{M}$ y la segunda forma fundamental B.

Corolario 1.2 *Sean $p \in M$; x, y vectores ortonormales de T_pM . Entonces*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y) \rangle - |B(x,y)|^2 . \qquad (1.10)$$

Prueba. *La prueba es solo un simple remplazo en la ecuación (1.9) , teniendo en cuenta que $X = Z = x$, $Y = W = y$ donde X, Z son extensiones de x; Y, W son extensiones de y.* ■

Sea $p \in M$; x, $y \in T_pM$ y $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$, $B(x,y) \in (T_pM)^\perp$. Regresando al caso de hipersuperficies donde el espacio normal es de dimensión uno, para el operador $S_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ simétrico, por la ecuación (1.6) ya sabemos que existe una **base ortonormal de vectores propios** $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM con valores propios reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, esto es,

$S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $\quad 1 \leq i \leq n$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son llamadas las curvaturas principales y los vectores $e_1, \ldots, e_n$ son llamadas las direcciones principales de M en p.

$$\begin{aligned}
\text{Para una hipersuperficie } M &\Longrightarrow \text{El espacio normal es de dimensión uno.} \\
&\Longrightarrow B(x,y) = c\eta, \text{ para algún } c \in \mathbb{R}. \\
&\Longrightarrow c = \langle B(x,y), \eta \rangle = \langle S_\eta(x), y \rangle . \\
&\Longrightarrow c = \langle B(e_i, e_j), \eta \rangle = \langle S_\eta(e_i), e_j \rangle \\
&\Longrightarrow c = \langle \lambda_i e_i, e_j \rangle \\
&\Longrightarrow c = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle . \\
&\Longrightarrow B(e_i, e_j) = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle \eta. \\
&\Longrightarrow \begin{array}{l} \text{Si } i = j,\ B(e_i, e_j) = \lambda_i \eta. \\ \text{Si } i \neq j,\ B(e_i, e_j) = 0 . \end{array}
\end{aligned}$$

Si tomamos un plano generado dado por direcciones principales entonces la diferencia de la curvatura seccional K de la subvariedad M y de la curvatura seccional $\overline{K}$ del ambiente $\overline{M}$ es dado por el producto de las curvaturas principales correspondientes, esto resulta del corolario 1.10 de la ecuación de Gauss

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j. \tag{1.11}$$

de esta ecuación podemos observar que la información de la segunda forma fundamental está contenida en el producto de las curvaturas principales.

En el caso de superficies regulares $S \subset \mathbb{R}^3$ tenemos que $K(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j$lo que implica que la curvatura seccional es la curvatura de Gauss de S.

1.2. Ecuaciones de compatibilidad del espacio euclideano

Sea S una superficie regular orientable y orientada. Sea $x : U \subset \mathbb{R}^3 \to S$ una parametrización, asociamos a cada punto $x(U)$ un triedro dado por los vectores x_u, x_v y N.

Derivando los vectores anteriores y expresándolos en combinación lineal con los anteriores en la base $\{x_u, x_v, N\}$ obtendremos:

$$\begin{aligned}
x_{\mathrm{u}u} &= \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + L_1 N \\
x_{\mathrm{u}v} &= \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + L_2 N \\
x_{vv} &= \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + L_3 N \\
x_{vu} &= \Gamma_{21}^1 x_u + \Gamma_{21}^2 x_v + \bar{L}_2 N \\
N_u &= a_{11} x_u + a_{21} x_v \\
N_v &= a_{12} x_u + a_{22} x_v
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Sabemos que las derivadas de x_u, x_v y N en la base $\{x_u, x_v, N\}$ dependen de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de la superficie S. Ahora obtendremos relaciones entre los coeficientes, considerando las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
(x_{\mathrm{uu}})_v - (x_{\mathrm{uv}})_u &= 0 \\
(x_{vv})_u - (x_{vu})_v &= 0 \\
N_{uv} - N_{vu} &= 0
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

De 1.12 y 1.13 tenemos:

$$
\begin{aligned}
A_1 x_u + B_1 x_v + C_1 N &= 0 \\
A_2 x_u + B_2 x_v + C_2 N &= 0 \\
A_3 x_u + B_3 x_v + C_3 N &= 0
\end{aligned}
$$

Como los vectores x_u, x_v y N son L.I. entonces $A_i = B_i = C_i = 0$; $i = 1, 2, 3$; haciendo cálculos obtenemos la fórmula de Gauss:

$$\Gamma^2_{12u} - \left(\Gamma^1_{11}\right)_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} = -EK$$

Luego también obtenemos:

$$
\begin{aligned}
e_v - f &= e\Gamma^1_{12} + f\left(\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{11}\right) - g\Gamma^2_{11} \\
f_v - g_u &= e\Gamma^1_{22} + f\left(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\right) - g\Gamma^2_{12}
\end{aligned}
$$

Estas dos últimas ecuaciones son llamadas ecuaciones de Mainardi - Codazzi, y las tres ecuaciones en conjunto son conocidas como ecuaciones de compatibilidad de la teoría de superficies.

Teorema 1.4 *(Bonnet) Sean E, F, G, e, f, g funciones diferenciables definidas en un conjunto abierto* $V \subset \mathbb{R}^2$, $E > 0; G > 0$. *Suponga que las funciones dadas satisfacen las ecuaciones de Gauss y Mainardi - Codazzi y que* $EG - F^2 > 0$. *Entonces, para todo* $q \in V$ *existe una vecindad* $U \subset V$ *de* q *y un difeomorfismo* $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to x(U) \subset \mathbb{R}^3$ *tal que la superficie regular* $x(U) \subset \mathbb{R}^3$ *tiene a E, F, G, e, f, g como coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales respectivamente.*

Prueba. Una prueba puede ser vista en [3] ■

Capítulo 2

Desarrollo de algunas superficies Riemannianas importantes y una aplicación de la segunda forma fundamental en el cálculo de la curvatura de superficies de revolución

2.1. Primera y segunda forma fundamental de superficies inmersas en el espacio Hiperbólico $\mathbb{H}^3$

En esta sección las referencias utilizadas son R. Sá Earp & E. Toubiana [1] , Ady Cambraia Júnior [2] y M.P. Do Carmo [3]. Después de haber expuesto las herramientas para el desarrollo de nuestro tema de tesis, presentaremos aquí el modelo del espacio hiperbólico en el cual trabajaremos y algunos aspectos geométricos de este espacio.

2.1.1. Espacio Hiperbólico $\mathbb{H}^3$

2.1.2. Modelo del semiespacio

Consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathbb{H}^3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\right\}$$

Este subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es llamado de semi-espacio superior de $\mathbb{R}^3$, en seguida a este conjunto le dotaremos de una geometría mediante la siguiente definición.

Definición 2.1 *La métrica o primera forma fundamental $g_{\mathbb{H}}$ de $\mathbb{H}^3$ en $p = (x, y, z) \in \mathbb{H}^3$ es dado por*

$$g_{\mathbb{H}} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

La cual tiene una representación matricial

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z^2} \end{pmatrix}$$

Así, en cada punto $p = (x, y, z) \in \mathbb{H}^3$ tenemos el producto escalar denotado por $\langle ., . \rangle_{\mathbb{H}^3}$, llamado de producto escalar hiperbólico, definido sobre $T_p\mathbb{H}^3$ por la métrica $g_{\mathbb{H}}$ de la siguiente manera: Para todos los vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ con punto base p, es decir, $u,\ v \in T_p\mathbb{H}^3$, tenemos

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle_{\mathbb{H}} &= \frac{\langle u,v\rangle}{z^2}\\ &= \frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{z^2}\end{aligned}$$

donde $\langle .,.\rangle$ designa el producto escalar Euclidiano de $\mathbb{R}^3$, consecuentemente tenemos la norma asociada a $\langle .,.\rangle_{\mathbb{H}}$ que denotaremos por $\|.\|_{\mathbb{H}}$, mas precisamente

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathbb{H}} &= \sqrt{\langle u,u\rangle_{\mathbb{H}}}\\ &= \sqrt{\frac{\langle u,u\rangle}{z^2}}\\ &= \frac{\|u\|}{z}\end{aligned}$$

donde $\|.\|$ designa la norma Euclidiana de $\mathbb{R}^3$.

El borde asintótico o borde al infinito de $\mathbb{H}^3$ es denotado por $\partial_\infty\mathbb{H}^3$ y definido por

$$\partial_\infty\mathbb{H}^3 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; z=0\right\}\cup\{\infty\}$$

Definición 2.2 *El espacio $\mathbb{H}^3$ provisto de la métrica $g_{\mathbb{H}}$ es el modelo del semi-espacio del espacio hiperbólico de dimensión* 3*.*

Definición 2.3 *Un difeomorfismo $f:(\mathbb{H}^3,g_{\mathbb{H}})\longrightarrow(\mathbb{H}^3,g_{\mathbb{H}})$ es una isometría para la métrica $g_{\mathbb{H}}$, si f preserva la métrica $g_{\mathbb{H}}$. Mas precisamente, f es una isometría si para todo punto $p=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{H}^3$ y todo vector*

$u=(u_1,u_2,u_3)$, $v=(v_1,v_2,v_3)\in T_p\mathbb{H}^3$ se tiene

$$\langle u,v\rangle_{\mathbb{H}} = \langle Df_p(u), Df_p(v)\rangle_{\mathbb{H}}$$

es decir,

$$\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{x_3^2} = \frac{\langle Df_p(u), Df_p(v)\rangle}{y_3^2}$$

a donde $f(p)=(y_1,y_2,y_3)$ y Df_p designa la derivada de f en p.

2.1.3. Primera forma fundamental de una superficie S inmersa en $\mathbb{H}^3$

El concepto de primera forma fundamental es importante, porque nos permite hacer medidas sobre un objeto es decir, hacer geometría.

Sea

$$\begin{array}{rcccl} X: \ \Omega & \subset & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{H}^3 \\ \\ (u & , & v) & \longrightarrow & X(u,v) \end{array}$$

una parametrización local de una superficie S y N el vector normal unitario definido en una vecindad de $p \in S$.

Definición 2.4 *La primera forma fundamental de la superficie $S \subset \mathbb{H}^3$ es la siguiente forma bilineal simétrica positiva definida,*

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|_p^2$$

donde $p \in \mathbb{H}^3$, $w \in T_p\mathbb{H}^3$.

Vamos a expresar la primera forma fundamental en la base $\{X_{u_1}, X_{u_2}\}$ asociada a la parametrización anterior. Como un vector tangente $w \in T_pS$ es el vector tangente a una curva parametrizada $\alpha(t) = X(u_1(t), u_2(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, con $p = \alpha(0) = X(u_1(0), u_2(0))$, obtenemos:

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_{u_1}u_1' + X_{u_2}u_2', X_{u_1}u_1' + X_{u_2}u_2' \rangle_p \\ &= \langle X_{u_1}, X_{u_1} \rangle_p (u_1')^2 + 2\langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle_p u_1'u_2' + \langle X_{u_2}, X_{u_2} \rangle_p (u_2')^2 \\ &= g_{11}(u_1')^2 + 2g_{12}u_1'u_2' + g_{22}(u_2')^2 \end{aligned}$$

Los coeficientes $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, donde $X_i = \frac{\partial X}{\partial u_i}$ son llamados de **coeficientes de la primera forma fundamental** en la base $\{X_{u_1}, X_{u_2}\}$.

La matriz de la primera forma fundamental es denotada por $G = (g_{ij})$. Esa matriz es simétrica positiva definida.

Es importante tener para lo que sigue los valores de los símbolos de Christoffel de la conexión, que es un objeto que solo depende de la métrica, como ya fue visto en el capítulo 1 por la ecuacin (1.2). Utilizando esta ecuación a continuación mostraremos a modo de ejemplo el cálculo de dos símbolos de Christoffel Γ_{11}^1 y Γ_{11}^3.

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right\}g^{km} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}(\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{11} + \frac{\partial}{\partial x_1}g_{11} - \frac{\partial}{\partial x_1}g_{11}\right\}g^{11} + \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1}g_{21} - \frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right\}g^{21} + \\ &\quad \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1}g_{31} - \frac{\partial}{\partial x_3}g_{11}\right\}g^{31}) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2}(\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{11} + \frac{\partial}{\partial x_1}g_{11} - \frac{\partial}{\partial x_1}g_{11}\right\}g^{13} + \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1}g_{21} - \frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right\}g^{23} + \\ &\quad \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1}g_{31} - \frac{\partial}{\partial x_3}g_{11}\right\}g^{33}) \\ &= \frac{1}{z}\end{aligned}$$

y procediendo de manera similar por un cálculo, los símbolos de Christoffel para $\mathbb{H}^3$ son:

$$\begin{array}{llllll}\Gamma_{11}^1 = 0 & \Gamma_{12}^1 = 0 & \Gamma_{13}^1 = \frac{-1}{z} & \Gamma_{22}^1 = 0 & \Gamma_{23}^1 = 0 & \Gamma_{33}^1 = 0 \\ \Gamma_{11}^2 = 0 & \Gamma_{12}^2 = 0 & \Gamma_{13}^2 = 0 & \Gamma_{22}^2 = 0 & \Gamma_{23}^2 = \frac{-1}{z} & \Gamma_{33}^2 = 0 \\ \Gamma_{11}^3 = \frac{1}{z} & \Gamma_{12}^3 = 0 & \Gamma_{13}^3 = 0 & \Gamma_{22}^3 = \frac{1}{z} & \Gamma_{23}^3 = 0 & \Gamma_{33}^3 = \frac{-1}{z}\end{array} \tag{2.2}$$

2.1.4. Segunda forma fundamental de una superficie S inmersa en $\mathbb{H}^3$

La segunda forma fundamental es un objeto matemático que nos va a permitir estudiar la relación que existe entre la superficie y el espacio ambiente en el que está contenida tal como ya fue visto en el capítulo 1.

Como hemos podido observar del capítulo 1, para poder realizar el cálculo de la segunda forma fundamental de una superficie $S \subset \mathbb{H}^3$, necesitamos conocer la conexión del espacio ambiente $\overline{\nabla}$, que en este caso en particular el ambiente es el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3$. En efecto:

Escogiendo un sistema de coordenadas en el entorno de $p \in \mathbb{H}^3$ y utilizando la ecuación (1.1) y los resultados (2.2) que son los valores de los símbolos de Christoffel se tiene que

$$\begin{array}{ll}
\overline{\nabla}_{e_1} e_1 = \Gamma_{11}^1 e_1 + \Gamma_{11}^2 e_2 + \Gamma_{11}^3 e_3 = \frac{1}{z} e_3 & \overline{\nabla}_{e_2} e_2 = \Gamma_{22}^1 e_1 + \Gamma_{22}^2 e_2 + \Gamma_{22}^3 e_3 = \frac{1}{z} e_3 \\
\overline{\nabla}_{e_1} e_2 = \Gamma_{12}^1 e_1 + \Gamma_{12}^2 e_2 + \Gamma_{12}^3 e_3 = 0 & \overline{\nabla}_{e_2} e_3 = \Gamma_{23}^1 e_1 + \Gamma_{23}^2 e_2 + \Gamma_{23}^3 e_3 = \frac{-1}{z} e_2 \\
\overline{\nabla}_{e_1} e_3 = \Gamma_{13}^1 e_1 + \Gamma_{13}^2 e_2 + \Gamma_{13}^3 e_3 = \frac{-1}{z} e_1 & \overline{\nabla}_{e_3} e_3 = \Gamma_{33}^1 e_1 + \Gamma_{33}^2 e_2 + \Gamma_{33}^3 e_3 = \frac{-1}{z} e_3
\end{array}$$

Si $p = (x, y, z) \in \mathbb{H}^3$; $T_p\mathbb{H}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ y $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base para $\mathbb{R}^3$ luego para $X, Y \in T_p\mathbb{H}^3$ con

$$X(p) = (f(p), g(p), h(p)) = f(p)e_1 + g(p)e_2 + h(p)e_3$$

$$Y(p) = (m(p), n(p), r(p)) = m(p)e_1 + n(p)e_2 + r(p)e_3$$

se tiene aplicando propiedades de conexión vistos ya en el cápitulo 1 que:

$$\overline{\nabla}_Y X = \overline{\nabla}_Y (fe_1 + ge_2 + he_3) = \overline{\nabla}_Y fe_1 + \overline{\nabla}_Y ge_2 + \overline{\nabla}_Y he_3$$

esto es,

$$\overline{\nabla}_Y X = \overline{\nabla}_{me_1+ne_2+re_3} fe_1 + \overline{\nabla}_{me_1+ne_2+re_3} ge_2 + \overline{\nabla}_{me_1+ne_2+re_3} he_3 \tag{2.3}$$

Ahora calcularemos cada uno de los tres sumando de 2.3

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{me_1+ne_2+re_3} fe_1 &= m\overline{\nabla}_{e_1} fe_1 + n\overline{\nabla}_{e_2} fe_1 + r\overline{\nabla}_{e_3} fe_1 \\
&= m(e_1(f)e_1 + f\overline{\nabla}_{e_1} e_1) + n(e_2(f)e_1 \\
&\quad + f\overline{\nabla}_{e_2} e_1) + r(e_3(f)e_1 + f\overline{\nabla}_{e_3} e_1) \\
&= m\left(f_x e_1 + f\frac{1}{z}e_3\right) + n\left(f_y e_1 + f\ \bar{0}\right) + \\
&\quad r\left(f_z e_1 + f.\left(-\frac{1}{z}e_1\right)\right) \\
&= mf_x e_1 + \frac{mf}{z}e_3 + nf_y e_1 + rf_z e_1 - \frac{rf}{z}e_1
\end{aligned}$$

;

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{me_1+ne_2+re_3} ge_2 &= m\overline{\nabla}_{e_1} ge_2 + n\overline{\nabla}_{e_2} ge_2 + r\overline{\nabla}_{e_3} ge_2 \\
&= m(e_1(g)e_2 + g\overline{\nabla}_{e_1} e_2) + n(e_2(g)e_2 \\
&\quad + g\overline{\nabla}_{e_2} e_2) + r(e_3(g)e_2 + g\overline{\nabla}_{e_3} e_2) \\
&= m\left(g_x e_2\right) + n\left(g_y e_2 + \frac{g}{z}e_3\right) + r\left(g_z e_2 - \frac{g}{z}e_2\right) \\
&= mg_x e_2 + ng_y e_2 + \frac{gn}{z}e_3 + rg_z e_2 - \frac{gr}{z}e_2
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{me_1+ne_2+re_3}he_3 &= m\overline{\nabla}_{e_1}he_3 + n\overline{\nabla}_{e_2}he_3 + r\overline{\nabla}_{e_3}he_3 \\
&= m(e_1(h)e_3 + h\overline{\nabla}_{e_1}e_3) + n(e_2(h)e_3 \\
&\quad +h\overline{\nabla}_{e_2}e_3) + r(e_3(h)e_3 + h\overline{\nabla}_{e_3}e_3) \\
&= m\left(h_xe_3 - \frac{h}{z}e_1\right) + n\left(h_ye_3 - \frac{h}{z}e_2\right) + r\left(h_ze_3 - \frac{h}{z}e_3\right) \\
&= mh_xe_3 - \frac{mh}{z}e_1 + nh_ye_3 - \frac{nh}{z}e_2 + rh_ze_3 - \frac{rh}{z}e_3
\end{aligned}
$$

Reemplazando en (2.3) :

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y X &= \left(mf_x - mh\frac{1}{z} + nf_y + rf_z - rf\frac{1}{z}\right)e_1 + \\
&\quad \left(mg_x + ng_y + rg_z - nh\frac{1}{z} - rg\frac{1}{z}\right)e_2 \\
&\quad + \left(mh_x + nh_y + rh_z + mf\frac{1}{z} + ng\frac{1}{z} - rh\frac{1}{z}\right)e_3
\end{aligned}
$$

finalmente tenemos la conexión de $\mathbb{H}^3$:

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y X &= \left(mf_x + nf_y + rf_z - \frac{rf + mh}{z}\right)e_1 + \\
&\quad \left(mg_x + ng_y + rg_z - \frac{rg + nh}{z}\right)e_2 + \\
&\quad \left(mh_x + nh_y + rh_z + \frac{mf + ng - rh}{z}\right)e_3
\end{aligned}
$$

recordando propiedades de linealidad de la derivada direccional Euclidiana esta expresión de la conexión hiperbólica también la podemos escribir de una forma más elegante, en efecto:

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y X &= (mf_x + nf_y + rf_z \ , \ mg_x + ng_y + rg_z \ , \ mh_x + nh_y + rh_z) + \\
&\quad \left(-\frac{rf + mh}{z}, -\frac{rg + nh}{z}, \frac{mf + ng - rh}{z} \right) \\
&= (mf_x \ , \ mg_x \ , \ mh_x) + (nf_y \ , \ ng_y \ , \ nh_y) + (rf_z \ , \ rg_z \ , \ rh_z) + \\
&\quad \frac{1}{z} \left(-(rf + mh), -(rg + nh), mf + ng - rh \ \right) \\
&= m (f_x \ , \ g_x \ , \ h_x) + n (f_y \ , \ g_y \ , \ h_y) + r (f_z \ , \ g_z \ , \ h_z) + \\
&\quad \frac{1}{z} \left(-(rf + mh), -(rg + nh), mf + ng - rh \ \right) \\
&= m \frac{\partial X}{\partial x} + n \frac{\partial X}{\partial y} + r \frac{\partial X}{\partial z} + \\
&\quad \frac{1}{z} \left(-(rf + mh), -(rg + nh), mf + ng - rh \ \right) \\
&= m \ dX.e_1 + n \ dX.e_2 + r \ dX.e_3 + \\
&\quad \frac{1}{z} \left(-(rf + mh), -(rg + nh), mf + ng - rh \ \right) \\
&= dX. (m \ e_1 + n \ e_2 + r \ e_3) + \\
&\quad \frac{1}{z} \left(-(rf + mh), -(rg + nh), mf + ng - rh \ \right)
\end{aligned}
$$

Luego tenemos una fórmula de la conexión hiperbólica $\mathbb{H}^3$ un poco más compacta.

$$
\overline{\nabla}_Y X = dX.Y + \frac{1}{z} \left(-(fr + mh), -(gr + nh), fm + gn - hr \ \right) \tag{2.4}
$$

de la cual podemos observar que la *conexión hiperbólica* es la suma de la *derivada direccional euclidiana* más otro término el cual tiene que ver con los *símbolos de Christoffel* de la conexión hiperbólica, la anterior conclusión sacada de la fórmula, es un hecho general que ya se vió en el primer capítulo. De la anterior afirmación podemos pensar que conexión hiperbólica puede ser vista como una derivada de X en relación a Y o más precisamente es una derivada direccional del campo X en la dirección del campo Y esta es la forma en que realmente la utilizaremos para nuestros propósito a desarrollar. La última expresión de la conexión encontrada será utilizada posteriormente en los cálculos que vayamos a realizar porque es fácilmente manipulable y sencillo de recordar. La última formula 2.4 se puede también escribir de manera matricial, de forma similar a la matriz jacobiana para el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_1} X &= dX.e_1 + \frac{1}{z}(-h, 0, f) \\
&= \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{z}(-h, 0, f) \\
&= (f_x\ ,\ g_x\ ,\ h_x) + \frac{1}{z}(-h, 0, f) \\
&= \left(f_x - \frac{h}{z},\ g_x\ , h_x + \frac{f}{z}\right)
\end{aligned}$$

procediendo de manera similar obtenemos

$$\overline{\nabla}_{e_2} X = (f_y\ , g_y - \frac{h}{z}, h_y + \frac{g}{z})$$

$$\overline{\nabla}_{e_3} X = (f_z - \frac{f}{z}, g_z - \frac{g}{z}, h_z + \frac{h}{z})$$

de aquí

$$\begin{aligned}
\left[\overline{\nabla} X\right] &= \begin{bmatrix} f_x - \frac{h}{z} & f_y & f_z - \frac{f}{z} \\ g_x & g_y - \frac{h}{z} & g_z - \frac{g}{z} \\ h_x + \frac{f}{z} & h_y + \frac{g}{z} & h_z - \frac{h}{z} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{h}{z} & 0 & -\frac{f}{z} \\ 0 & -\frac{h}{z} & -\frac{g}{z} \\ \frac{f}{z} & \frac{g}{z} & -\frac{h}{z} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Así obtenemos la siguiente expresión, la cual vamos a llamar jacobiana hiperbólica.

$$[\overline{\nabla} X]=\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{bmatrix}+\frac{1}{z}\begin{bmatrix} -h & 0 & -f \\ 0 & -h & -g \\ f & g & -h \end{bmatrix}$$

Un ejemplo importante de aplicación de la conexión utilizando una fórmula similar a 2.4 (fórmula hallada anteriormente), es el cálculo de la curvatura de curvas planas en el plano hiperbólico, para eso utilizaremos el espacio hiperbólico de dimensión dos $\mathbb{H}^2$ (modelo del semi-espacio) del cual por **cálculos similares ya realizados anteriormente para** $\mathbb{H}^3$ conocemos:

Los coeficientes de la conexión de $\mathbb{H}^2$

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{11}^1=0 & \Gamma_{12}^1=\frac{-1}{y} & \Gamma_{22}^1=0 \\ \Gamma_{11}^2=\frac{1}{y} & \Gamma_{12}^2=0 & \Gamma_{22}^2=\frac{-1}{y} \end{array}$$

también

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{e_1} e_1 &= \Gamma_{11}^1 e_1+\Gamma_{11}^2 e_2=\tfrac{1}{y} e_2 \\ \overline{\nabla}_{e_1} e_2 &= \Gamma_{12}^1 e_1+\Gamma_{12}^2 e_2=\tfrac{-1}{y} e_1 \\ \overline{\nabla}_{e_2} e_2 &= \Gamma_{22}^1 e_1+\Gamma_{22}^2 e_2=\tfrac{-1}{y} e_2 \end{aligned}$$

Si $p=(x,y)\in\mathbb{H}^2$; $T_p\mathbb{H}^2\simeq\mathbb{R}^2$ y $\{e_1,e_2\}$ una base para $\mathbb{R}^2$ luego para $X,Y\in T_p\mathbb{H}^2$ con

$$X(p)=f(p)e_1+g(p)e_2$$

$$Y(p)=m(p)e_1+n(p)e_2$$

tenemos la conexión de $\mathbb{H}^2$ explícitamente:

$$\overline{\nabla}_Y X=\left(mf_x+nf_y-\frac{mg+nf}{y}\ ,\ mg_x+ng_y+\frac{mf-ng}{y}\right)$$

El cual también puede ser escrito como

$$\overline{\nabla}_Y X = dX.Y + \frac{1}{y}\left(-\left(fn+mg\right), mf - gn\ \right)$$

A continuación definamos la curvatura de una curva en $\mathbb{H}^2$. Sea

$c(t) = (c_1(t), c_2(t)) \in \mathbb{H}^2$, $t \in]a,b[$,una curva de clase C^2 parametrizada por longitud de arco, es decir que $\|c'(t)\|_{\mathbb{H}^2} = 1$ para todo $t \in]a,b[$. El vector $c'(t) = (c_1'(t), c_2'(t))$ es el vector velocidad de la curva c y el vector $n^+(c(t)) = (-c_2'(t), c_1'(t))$ es normal a la curva c para cada t y además $\{c'(t), n^+(c(t))\}$ es una base positiva de $T_p\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{R}^2$.

Definición 2.5 *Utilizando las mismas notaciones anteriores llamamos* ***curvatura hiperbólica de*** c *con respecto al vector normal* $n^+(c(t))$, *denotado por* $k_h^+(c(t))$ *el número real*

$$k_h^+(c(t)) = \left\langle c''_{\mathbb{H}^2}(t)\ ;\ n^+(c(t))\right\rangle_{\mathbb{H}^2}$$

donde $c''_{\mathbb{H}^2}(t)$ *es la aceleración de la curva* c *visto desde* $\mathbb{H}^2$.

Ahora nuestro objetivo es encontrar una fórmula para la curvatura de una curva de $\mathbb{H}^2$ en función de las componentes de la curva c ,para que no se torne un poco engorroso los cálculos que realizaremos a continuación, omitiremos los argumentos de $c(t)$,$c_1(t)$, $c_2(t)$ y sus derivadas.Es aquí donde usaremos la fórmula de la conexión de $\mathbb{H}^2$ calculada anteriormente para obtener $c''_{\mathbb{H}^2}(t)$, el cual no es mas que:

$$\begin{aligned} c''_{\mathbb{H}^2}(t) &= \overline{\nabla}_{c'}c' \\ &= dc'.c' + \frac{1}{c_2}\Big(-\left(c_1'c_2' + c_1'c_2'\right)\ ,\ \left(c_1'\right)^2 - \left(c_2'\right)^2\Big) \\ &= (c_1'', c_2'') + \frac{1}{c_2}\Big(-2c_1'c_2'\ ,\ \left(c_1'\right)^2 - \left(c_2'\right)^2\Big) \end{aligned}$$

Luego calculamos la curvatura

$$
\begin{aligned}
k_h^+(c(t)) &= \left\langle c''_{\mathbb{H}^2}(t)\ ;\ n^+(c(t))\right\rangle_{\mathbb{H}^2} \\
&= \left\langle (c_1'', c_2'') + \frac{1}{c_2}\left(-2c_1'c_2'\ ,\ \ (c_1')^2 - (c_2')^2\right) ; (-c_2', c_1')\right\rangle_{\mathbb{H}^2} \\
&= \langle (c_1'', c_2'') ; (-c_2', c_1')\rangle_{\mathbb{H}^2} + \\
&\quad \frac{1}{c_2}\left\langle \left(-2c_1'c_2'\ ,\ \ (c_1')^2 - (c_2')^2\right) ; (-c_2', c_1')\right\rangle_{\mathbb{H}^2} \\
&= \frac{1}{c_2^2}\left(c_1'c_2'' - c_1''c_2'\right) + \frac{1}{c_2^3}\left(2c_1'\left(c_2'\right)^2 + \left(c_1'\right)^3 - c_1'\left(c_2'\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{c_2^2}\left(c_1'c_2'' - c_1''c_2'\right) + \frac{c_1'}{c_2^3}\left(2\left(c_2'\right)^2 + \left(c_1'\right)^2 - \left(c_2'\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{c_2^2}\left(c_1'c_2'' - c_1''c_2'\right) + \frac{c_1'}{c_2^3}\left(\left(c_2'\right)^2 + \left(c_1'\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

como la curva es parametrizada por longitud de arco hiperbólicamente tenemos:

$$
\begin{aligned}
\|c'\|_{\mathbb{H}^2} &= 1 \\
\frac{\sqrt{\left(c_1'\right)^2 + \left(c_2'\right)^2}}{c_2} &= 1 \\
\left(c_1'\right)^2 + \left(c_2'\right)^2 &= c_2^2
\end{aligned}
$$

Así continuando con el cálculo de la curvatura

$$
\begin{aligned}
k_h^+(c(t)) &= \frac{1}{c_2^2}\left(c_1'c_2'' - c_1''c_2'\right) + \frac{c_1'}{c_2^3}c_2^2 \\
k_h^+(c(t)) &= \frac{\left(c_1'c_2'' - c_1''c_2'\right)}{c_2^2} + \frac{c_1'}{c_2}
\end{aligned}
$$

La fórmula anterior para la curvatura de una curva en $\mathbb{H}^2$ fue también obtenida sin hacer uso de la conexión Riemanniana en la referencia [6] por Ricardo Sá Earp (pagina 118) solo utilizando propiedades geométricas de $\mathbb{H}^2$, aquí nosotros la obtuvimos utilizando la conexión Riemanniana de $\mathbb{H}^2$ esto muestra la importancia que tiene la conexión Riemanniana en el cálculo de la curvatura.Todo el anterior cálculo lo enunciaremos en el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Sea* $c :]a, b[\longrightarrow \mathbb{H}^2$ *una curva de clase* C^2 *parametrizada por longitud de arco. La curvatura* $k_h^+(c(t))$ *es determinada por la fórmula*

$$k_h^+(c(t)) = \frac{(c_1'c_2'' - c_1''c_2')}{c_2^2} + \frac{c_1'}{c_2}$$

Prueba. Es el cálculo realizado arriba. ■

También puede ser obtenida una fórmula para el cálculo de la curvatura de una curva en $\mathbb{H}^2$ cuando la curva no es parametrizada por longitud de arco. Por un procedimiento similar al cálculo anterior realizado para calcular la curvatura de curvas que son parametrizadas por longitud de arco se puede obtener esa fórmula, el cual será enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 2.2 *Sea* $c :]a, b[\longrightarrow \mathbb{H}^2$ *una curva regular de clase* C^2*, no necesariamente parametrizada por longitud de arco. Tenemos para todo* t *en* $]a, b[$ *la siguiente fórmula*

$$k_h^+(c(t)) = c_2 \frac{c_1'c_2'' - c_1''c_2'}{\left((c_1')^2 + (c_2')^2\right)^{3/2}} + \frac{c_1'}{\sqrt{(c_1')^2 + (c_2')^2}} \tag{2.5}$$

Prueba. ver [1] ■

Algo curioso de la fórmula del teorema anterior es que esta aparecerá en la fórmula de la curvatura de superficies de revolución del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3$ calculada en esta tesis como veremos más adelante.

La siguiente definición es justificada por algunos resultados obtenidos en el capítulo 1 , más específicamente en 1.5 y (1.7).

Definición 2.6 *La* segunda forma fundamental *de la superficie $S \subset \mathbb{H}^3$ es la forma bilineal simétrica II_p definida por:*

$$\begin{aligned} II_p(w) &= \left\langle -\overline{\nabla}_w N, w \right\rangle \\ &= \langle A(w), w \rangle \end{aligned}$$

donde $p \in \mathbb{H}^3$, $w \in T_pS$, N es un vector normal unitario hiperbólico a la superficie S con $A(w) = -\overline{\nabla}_w N$ y $\overline{\nabla}$ es la conexión Riemanniana de $\mathbb{H}^3$.

El operador $A(w) = -\overline{\nabla}_w N$ es llamado de *operador de Weingartein.*

Expresando la segunda forma fundamental en la base $\{X_{u_1}, X_{u_2}\}$ asociada a la parametrización, se sigue que:

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= \left\langle -\overline{\nabla}_{\alpha'(0)} N, \alpha'(0) \right\rangle_p \\ &= \left\langle N, \overline{\nabla}_{\alpha'(0)} \alpha'(0) \right\rangle_p \\ &= \left\langle N, \overline{\nabla}_{\left(X_{u_1} u_1' + X_{u_2} u_2'\right)} \left(X_{u_1} u_1' + X_{u_2} u_2'\right) \right\rangle_p \\ &= \left\langle N, \overline{\nabla}_{X_{u_1}} X_{u_1} \right\rangle (u_1')^2 + 2 \left\langle N, \overline{\nabla}_{X_{u_2}} X_{u_1} \right\rangle u_1' u_2' + \\ &\quad \left\langle N, \overline{\nabla}_{X_{u_2}} X_{u_2} \right\rangle (u_2')^2 \\ &= b_{11} (u_1')^2 + 2 b_{12} u_1' u_2' + b_{22} (u_2')^2 \end{aligned}$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental son dados por:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \left\langle N, \overline{\nabla}_{X_{u_i}} X_{u_j} \right\rangle \\ &= \left\langle -\overline{\nabla}_{X_{u_i}} N, X_{u_j} \right\rangle . \end{aligned}$$

donde $\overline{\nabla}$ es la conexión Riemanniana de $\mathbb{H}^3$ y N es el normal unitario.

Denotaremos la matriz de la segunda forma fundamental por $B = (b_{ij})$.

Observación 2.1 *Notemos que* $A = -\overline{\nabla}N$ *es un operador lineal auto-adjunto. En efecto: esto es consecuencia de las propiedades de compatibilidad y simetría de la conexión.*

Como A es auto-adjunto, tenemos que la matriz de A en una base ortonormal es simétrica y consecuentemente los autovalores de A son reales, digamos λ_1, λ_2.

2.1.5. Consecuencias de la primera y segunda forma fundamental

En este cápitulo las referencias utilizadas son R. Sá Earp & E. Toubiana [1] , Ady Cambraia Júnior [2] y M.P. Do Carmo [3]. Aquí se presentan algunas consecuencias del anterior cápitulo, también conceptos que nos permiten distinguir una superficie de otra, como son las curvaturas.

Curvatura extrínseca de una superficie S de $\mathbb{H}^3$

Un concepto en geometría se dice que es extrínseco cuando tal concepto depende del espacio ambiente en donde este colocada la superficie, es decir, cuando se necesitan medidas externas a la superficie para calcular un determinado valor.

Definición 2.7 *La* curvatura media H *y la* curvatura de Gauss extrínseca K_{ext} *de* S *son definidas por*

$$H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{traza(A)}{2}$$

y

$$K_{ext} = \lambda_1.\lambda_2 = det(A)$$

respectivamente. Los autovalores de A, λ_1 y λ_2, son llamados como antes de curvaturas principales.

Mostraremos ahora que podemos calcular una expresión de la curvatura media H y también para la curvatura de Gauss extrínseca K_{ext} en términos de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental.

Notación 2.1 *Ahora por convenio hacemos $u = u_1$, $v = u_2$ y también $N_u = \overline{\nabla}_{X_u} N$ y $N_v = \overline{\nabla}_{X_v} N$.*

Observe que $\overline{\nabla}_{X_u} N$ y $\overline{\nabla}_{X_v} N$, son tangentes a la superficie S, luego,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{X_u} N &= N_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v \\ \overline{\nabla}_{X_v} N &= N_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\overline{\nabla}_{\alpha'} N = (a_{11} X_u + a_{21} X_v)\, u' + (a_{12} X_u + a_{22} X_v)\, v'$$

esto es,

$$[\nabla N] \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Con esto mostramos que en la base $\{X_u, X_v\}$, la matriz (a_{ij}) representa el operador de Weingartein A. Observe que la matriz de A no es necesariamente simétrica, a no ser que la base$\{X_u, X_v\}$ sea una base ortonormal.

Notemos que:

$$\begin{aligned} -b_{12} &= \langle N_u, X_v \rangle = a_{11} g_{12} + a_{21} g_{22} \\ -b_{21} &= \langle N_v, X_u \rangle = a_{12} g_{11} + a_{22} g_{21} \\ -b_{11} &= \langle N_u, X_u \rangle = a_{11} g_{11} + a_{21} g_{12} \\ -b_{22} &= \langle N_v, X_v \rangle = a_{12} g_{21} + a_{22} g_{22} \end{aligned}$$

Lo que en forma matricial es:

$$-\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

de donde podemos concluir que

$$a_{11} = \frac{b_{12}g_{12} - b_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}$$

$$a_{12} = \frac{b_{22}g_{12} - b_{12}g_{22}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}$$

$$a_{21} = \frac{b_{11}g_{12} - b_{12}g_{11}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}$$

$$a_{22} = \frac{b_{12}g_{12} - b_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}$$

Así tenemos que:

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{\operatorname{traza}(A)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\right) \tag{2.6}$$

y

$$K_{ext} = \det(A) = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \tag{2.7}$$

podemos observar de los cálculos anteriores que tanto H como K_{ext} dependen de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de la superficie.

Solo por costumbre y también para evitarnos escribir subíndices denotaremos los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental por

$$g_{11} = E \quad g_{12} = F \quad g_{22} = G$$
$$b_{11} = e \quad b_{12} = f \quad b_{22} = g$$

así las ecuaciones (2.6) y (2.7) se ven de la siguiente forma

$$K_{ext} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

y

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

estas serán las formas de las ecuaciones de K_{ext} y H, en que serán utilizadas al momento de realizar el cálculo.

Observación 2.2 *Si la parametrización de una superficie es tal que*

$F = f = 0$*, entonces las curvaturas principales son dadas por* $\frac{e}{E}$ *y* $\frac{g}{G}$*. De hecho, en este caso, la curvatura Gaussiana y la curvatura media son dadas por*

$$K_{ext} = \frac{eg}{EG}$$
$$H = \frac{1}{2}\frac{eG + gE}{EG}$$

la afirmación se sigue del hecho de que K_{ext} *es el producto y* $2H$ *es la suma de las curvaturas principales.*

Curvatura seccional de $\mathbb{H}^3$

Se dice que un concepto es intrínseco cuando sólo depende de la propia superficie (de la primera forma fundamental), es decir, que para calcular un valor de un tal objeto matemático sólo necesitamos saber apenas medidas sobre la propia superficie.

En esta sección realizaremos el cálculo de la curvatura seccional de $\mathbb{H}^3$, para esto utilizaremos algunas ecuaciones vistas en el capítulo 1, como por ejemplo son las ecuaciones (1.3) y (1.4),el objetivo aquí es mostrar que la curvatura seccional de $\mathbb{H}^3$ es constante e igual a -1.

En efecto, utilizando la fórmula (1.4) y por un cálculo se obtienen los R_{ijk}^s de la siguiente forma. Todos los R_{ijk}^s son iguales a cero excepto:

$$\begin{aligned} R_{212}^1 &= R_{313}^1 = R_{121}^2 = R_{323}^2 = R_{232}^3 = R_{131}^3 = -\frac{1}{z^2} \\ R_{211}^2 &= R_{311}^3 = R_{322}^3 = R_{122}^1 = R_{233}^2 = R_{133}^1 = \frac{1}{z^2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

luego realizamos el cálculo de $R(X,Y)X$ donde $X = (u_1, u_2, u_3)$;

$Y = (v_1, v_2, v_3)$; X, Y son campos de $T_p\mathbb{H}^3$, la curvatura seccional de $\mathbb{H}^3$ estaría dada por:

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)X &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} R_{iji}^{l}u_iv_ju_iX_l \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} R_{iji}^{1}u_iv_ju_iX_1 + R_{iji}^{2}u_iv_ju_iX_2 + R_{iji}^{3}u_iv_ju_iX_3 \\
&\quad +R_{ij2}^{1}u_iv_ju_2X_1 + R_{ij2}^{2}u_iv_ju_2X_2 + R_{ij2}^{3}u_iv_ju_2X_3 + \\
&\quad +R_{ij3}^{1}u_iv_ju_3X_1 + R_{ij3}^{2}u_iv_ju_3X_2 + R_{ij3}^{3}u_iv_ju_3X_3 \\
&= \sum_{i=1}^{3} R_{i11}^{1}u_iv_1u_1X_1 + R_{i11}^{2}u_iv_1u_1X_2 + R_{i11}^{3}u_iv_1u_1X_3 + \\
&\quad +R_{i12}^{1}u_iv_1u_2X_1 + R_{i12}^{2}u_iv_1u_2X_2 + R_{i12}^{3}u_iv_1u_2X_3 + \\
&\quad +R_{i13}^{1}u_iv_1u_3X_1 + R_{i13}^{2}u_iv_1u_3X_2 + R_{i13}^{3}u_iv_1u_3X_3 + \\
&\quad +R_{i21}^{1}u_iv_2u_1X_1 + R_{i21}^{2}u_iv_2u_1X_2 + R_{i21}^{3}u_iv_2u_1X_3 + \\
&\quad +R_{i22}^{1}u_iv_2u_2X_1 + R_{i22}^{2}u_iv_2u_2X_2 + R_{i22}^{3}u_iv_2u_2X_3 + \\
&\quad +R_{i23}^{1}u_iv_2u_3X_1 + R_{i23}^{2}u_iv_2u_3X_2 + R_{i23}^{3}u_iv_2u_3X_3 + \\
&\quad +R_{i31}^{1}u_iv_3u_1X_1 + R_{i31}^{2}u_iv_3u_1X_2 + R_{i31}^{3}u_iv_3u_1X_3 + \\
&\quad +R_{i32}^{1}u_iv_3u_2X_1 + R_{i32}^{2}u_iv_3u_2X_2 + R_{i32}^{3}u_iv_3u_2X_3 + \\
&\quad +R_{i33}^{1}u_iv_3u_3X_1 + R_{i33}^{2}u_iv_3u_3X_2 + R_{i33}^{3}u_iv_3u_3X_3
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)X \quad = \quad & R^1_{111}u_1v_1u_1X_1 + R^2_{111}u_1v_1u_1X_2 + R^3_{111}u_1v_1u_1X_3 + \\
& R^1_{112}u_1v_1u_2X_1 + R^2_{112}u_1v_1u_2X_2 + R^3_{112}u_1v_1u_2X_3 + \\
& R^1_{113}u_1v_1u_3X_1 + R^2_{113}u_1v_1u_3X_2 + R^3_{1j3}u_iv_1u_3X_3 + \\
& R^1_{121}u_1v_2u_1X_1 + R^2_{121}u_1v_2u_1X_2 + R^3_{121}u_1v_2u_1X_3 + \\
& R^1_{122}u_1v_2u_2X_1 + R^2_{122}u_1v_2u_2X_2 + R^3_{122}u_1v_2u_2X_3 + \\
& R^1_{123}u_1v_2u_3X_1 + R^2_{123}u_1v_2u_3X_2 + R^3_{123}u_1v_2u_3X_3 + \\
& R^1_{131}u_1v_3u_1X_1 + R^2_{131}u_1v_3u_1X_2 + R^3_{131}u_1v_3u_1X_3 + \\
& R^1_{132}u_1v_3u_2X_1 + R^2_{132}u_1v_3u_2X_2 + R^3_{132}u_iv_3u_2X_3 + \\
& R^1_{133}u_1v_3u_3X_1 + R^2_{133}u_1v_3u_3X_2 + R^3_{133}u_1v_3u_3X_3 + \\
& R^1_{211}u_2v_1u_1X_1 + R^2_{211}u_2v_1u_1X_2 + R^3_{211}u_2v_1u_1X_3 + \\
& R^1_{212}u_2v_1u_2X_1 + R^2_{212}u_2v_1u_2X_2 + R^3_{212}u_iv_1u_2X_3 + \\
& R^1_{213}u_2v_1u_3X_1 + R^2_{213}u_2v_1u_3X_2 + R^3_{213}u_2v_1u_3X_3 + \\
& R^1_{221}u_2v_2u_1X_1 + R^2_{221}u_2v_2u_1X_2 + R^3_{221}u_2v_2u_1X_3 + \\
& R^1_{222}u_2v_2u_2X_1 + R^2_{i22}u_2v_2u_2X_2 + R^3_{222}u_2v_2u_2X_3 + \\
& R^1_{223}u_2v_2u_3X_1 + R^2_{223}u_2v_2u_3X_2 + R^3_{223}u_2v_2u_3X_3 + \\
& R^1_{231}u_2v_3u_1X_1 + R^2_{231}u_2v_3u_1X_2 + R^3_{231}u_2v_3u_1X_3 + \\
& R^1_{232}u_2v_3u_2X_1 + R^2_{232}u_2v_3u_2X_2 + R^3_{232}u_2v_3u_2X_3 + \\
& R^1_{233}u_2v_3u_3X_1 + R^2_{233}u_2v_3u_3X_2 + R^3_{233}u_2v_3u_3X_3 + \\
& R^1_{311}u_3v_1u_1X_1 + R^2_{311}u_3v_1u_1X_2 + R^3_{311}u_3v_1u_1X_3 + \\
& R^1_{312}u_3v_1u_2X_1 + R^2_{312}u_3v_1u_2X_2 + R^3_{312}u_3v_1u_2X_3 + \\
& R^1_{313}u_3v_1u_3X_1 + R^2_{313}u_3v_1u_3X_2 + R^3_{313}u_3v_1u_3X_3 + \\
& R^1_{321}u_3v_2u_1X_1 + R^2_{321}u_3v_2u_1X_2 + R^3_{321}u_3v_2u_1X_3 + \\
& R^1_{322}u_3v_2u_2X_1 + R^2_{322}u_3v_2u_2X_2 + R^3_{322}u_3v_2u_2X_3 +
\end{aligned}
$$

$$R^1_{323}u_3v_2u_3X_1 + R^2_{323}u_3v_2u_3X_2 + R^3_{323}u_3v_2u_3X_3 +$$
$$R^1_{331}u_3v_3u_1X_1 + R^2_{331}u_3v_3u_1X_2 + R^3_{331}u_3v_3u_1X_3 +$$
$$R^1_{332}u_3v_3u_2X_1 + R^2_{332}u_3v_3u_2X_2 + R^3_{332}u_3v_3u_2X_3 +$$
$$R^1_{333}u_3v_3u_3X_1 + R^2_{333}u_3v_3u_3X_2 + R^3_{333}u_3v_3u_3X_3$$

Eliminando los coeficientes iguales a cero tenemos

$$\begin{aligned} R(X,Y)X &= R^2_{121}u_1v_2u_1X_2 + R^1_{122}u_1v_2u_2X_1 + R^3_{131}u_1v_3u_1X_3 + \\ & R^1_{133}u_1v_3u_3X_1 + R^2_{211}u_2v_1u_1X_2 + R^1_{212}u_2v_1u_2X_1 + \\ & R^3_{232}u_2v_3u_2X_3 + R^2_{233}u_2v_3u_3X_2 + R^3_{311}u_3v_1u_1X_3 + \\ & R^1_{313}u_3v_1u_3X_1 + R^3_{322}u_3v_2u_2X_3 + R^2_{323}u_3v_2u_3X_2 \end{aligned}$$

Desarrollando los R^l_{iji} tenemos que

$$\begin{gathered} R(X,Y)X = \tfrac{1}{z^2}((u_1v_2u_2 + u_1v_3u_3 - u_2v_1u_2 + u_3v_1u_3)X_1 - \\ (u_1v_2u_1 + u_2v_1u_1 + u_2v_3u_3 - u_3v_2u_3)\,X_2 + \\ (u_1v_3u_1 + u_2v_3u_2 + u_3v_1u_1 - u_3v_2u_2)X_3) \end{gathered}$$

Luego

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)X,Y\rangle &= \langle R(X,Y)X,(v_1,v_2,v_3)\rangle_{\mathbb{H}^3} \\ &= \frac{1}{z^4}[-(u_2v_3)^2 + 2u_2u_3v_2v_3 - (u_3v_2)^2 + \\ & -(u_1v_2)^2 + 2u_1u_2v_1v_2 - (u_2v_1)^2 + \\ & -(u_1v_3)^2 + 2u_1u_3v_1v_3 - (u_3v_1)^2] \end{aligned}$$

Esto es

$$\langle R(X,Y)X,Y\rangle = \frac{1}{z^4}\left[-(u_2v_3-u_3v_2)^2-(u_1v_2-u_2v_1)^2-(u_1v_3-u_3v_1)^2\right]$$

y como

$$\begin{aligned}
\|X\times Y\|^2_{\mathbb{H}^3} &= \|X\|^2\|Y\|^2-\langle X,Y\rangle^2\\
&= \frac{(u_1)^2+(u_2)^2+(u_3)^2}{z^2}\frac{(v_1)^2+(v_2)^2+(v_3)^2}{z^2}-\frac{(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2}{z^4}\\
&= \frac{(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2+(u_1v_3-u_3v_1)^2}{z^4}
\end{aligned}$$

De donde resulta

$$\begin{aligned}
K(X,Y) &= \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{\|X\times Y\|_M}\\
&= \frac{\left[-(u_2v_3-u_3v_2)^2-(u_1v_2-u_2v_1)^2-(u_1v_3-u_3v_1)^2\right]}{(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2+(u_1v_3-u_3v_1)^2}\\
&= -1
\end{aligned}$$

Como X, Y fueron arbitrarios podemos concluir que la curvatura seccional de $\mathbb{H}^3$ es constante igual a -1, información que nos servirá para la última sección.

Relación entre las Curvaturas extrínseca y Curvatura intrínseca

Esta sección es consecuencia de la del teorema de la ecuación de Gauss (1.9),más precisamente de (1.10) que a continuación volveremos a escribir, pero aquella forma deducida para el caso de hipersuperficies, ecuación (1.11),

$$K(e_i,e_j)-\overline{K}(e_i,e_j)=\lambda_i\lambda_j.$$

donde los e_i, $\lambda_i \quad 1 \leq i \leq 2$ son llamados de direcciones principales y curvaturas principales respectivamente.

La ecuación es aplicable al asunto que estamos tratando, ya que una superficie S en $\mathbb{H}^3$ es una hipersuperficie de dimensión dos, pues su codimensión es uno.

Del hecho que la curvatura seccional de $\mathbb{H}^3$ es constante e igual a -1 resulta:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^3 \text{ curvatura seccional constante } &\Longrightarrow \overline{K}(e_i, e_j) = -1 \\ &\Longrightarrow K(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j - 1 \end{aligned}$$

el cual nos proporciona otra forma de calcular la curvatura seccional de una superficie $S \subset \mathbb{H}^3$ a lo largo de direcciones principales en términos de la curvatura de Gauss extrínseca.

Finalmente, los ejemplos en esta parte son obtenidos del siguiente hecho por un simple remplazo en la ecuación

$$K(e_i, e_j) = K_{ext} - 1$$

y los ejemplos ya dados anteriormente donde ya conocemos K_{ext}.

2.2. Espacio Producto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

2.2.1. Métrica Producto

Sea $\mathbb{M}^2$ una variedad Riemanniana 2 dimensional y $\mathbb{R}$ el espacio Euclideano 1 dimensional, con $\{(U_\alpha, \gamma_\alpha)\}$, $\{(I_\beta, \varphi_\beta)\}$, sus estructuras diferenciales de $\mathbb{M}$ y $\mathbb{R}$ respectivamente. Consideremos el producto cartesiano $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ y las aplicaciones $X_{\alpha\beta} : U_\alpha \times I_\beta \longrightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, luego $\{U_\alpha \times I_\beta, X_{\alpha\beta}\}$ es la estructura diferenciable para $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, donde $X_{\alpha\beta}(p, q) = (\gamma_\alpha(p), \varphi_\beta(q))$, $p \in U_\alpha$, $q \in I_\beta$

Llamemos $T_{X_{\alpha\beta}(p,q)}\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ al espacio tangente de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ en el punto $X_{\alpha\beta}(p, q)$.

Definiremos ahora la métrica producto.

Como $\mathbb{M}^2$ es una variedad Riemanniana con $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ las coordenadas conformes locales en un abierto $W \subset \mathbb{M}^2$, y t la coordenada usual de la recta $\mathbb{R}$, es decir, si (x, y) son las coordenadas conformes locales de $\mathbb{M}^2$ y la métrica de $\mathbb{M}^2$ está expresada en la forma:

$$ds^2 = \sigma^2(dx^2 + dy^2)$$

Donde $\sigma : U \to \mathbb{R}$ es positiva y suave.

La métrica producto en las coordenadas locales $(x,\ y,\ t)$ en un abierto $U \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ está definida como:

$$ds^2 = \sigma^2(dx^2 + dy^2) + dt^2$$

Ahora consideremos el producto interno $\langle ., . \rangle_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}}$ de la siguiente manera

$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}} = \langle \overline{u_{\mathbb{M}^2}}, \overline{v_{\mathbb{M}^2}} \rangle + u_{\mathbb{R}}.v_{\mathbb{R}} \qquad \forall \overline{u}, \overline{v} \in T_{X_{\alpha\beta}(p,q)}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$$

Sea $g_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}}$ la métrica definida por el producto interno $\langle ., . \rangle_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}}$, esto es

$$g_{\mathbb{M}^2\times\mathbb{R}} = g_{\mathbb{M}^2} + g_{\mathbb{R}}$$

Sea $(x_1, x_2, x_3) \in U \times I$, y sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una inmersión, notemos que:

$X_{\gamma\varphi}(x_1, x_2, x_3) = (\gamma(x_1, x_2), \varphi(x_3)) = p$; $\partial x = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial y = \frac{\partial}{\partial x_2}, \partial t = \frac{\partial}{\partial x_3}$, y $\{\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3\}$ es el referencial local adaptado a $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ asociado a X, denotaremos por $\langle ., .\rangle_{\mathbb{M}^2\times\mathbb{R}}$ el producto interno en el espacio producto $\mathbb{M}^2\times\mathbb{R}$, esto es, si $v \in T_p\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, entonces v se puede escribir como una combinación lineal del referencial adaptado, luego $v = a\partial x + b\partial y + c\partial t$, entonces:

$$\begin{aligned}
\langle v, v\rangle_{\mathbb{M}^2\times\mathbb{R}} &= \langle a\partial x + b\partial y + c\partial t, a\partial x + b\partial y + c\partial t\rangle \\
&= a^2 \langle \partial x, \partial x\rangle + ab \langle \partial y, \partial x\rangle + ac \langle \partial t, \partial x\rangle + ab \langle \partial x, \partial y\rangle + b^2 \langle \partial y, \partial y\rangle \\
&\quad + bc \langle \partial t, \partial y\rangle + ac \langle \partial x, \partial t\rangle + c^2 \langle \partial t, \partial t\rangle \\
&= a^2\sigma^2 + b^2\sigma^2 + c^2 \langle \partial t, \partial t\rangle \\
&= \sigma^2(a^2 + b^2) + c^2 \langle \partial t, \partial t\rangle \\
&= \sigma^2(a^2 + b^2) + c^2
\end{aligned}$$

2.2.2. Conexión en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Luego de definir al espacio producto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ como una variedad Riemanniana deseamos ahora encontrar su conexión Riemanniana que por definición debe ser única, para esto necesitaremos encontrar sus símbolos de Christoffel.

Símbolos de Christoffel del espacio $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

La siguiente proposición nos dará resultados que luego nos servirán para hallar los símbolos de Christoffel del espacio $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.

Proposición 2.1 *Sea* $\partial_x, \partial_y, \partial_t$ *el referencial adaptado de* $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ *y sea* ∇ *la conexión Riemanniana de* $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, *se sigue que*

a) $\nabla_{\partial_x}\partial_x = -\frac{\sigma_x}{\sigma}\partial_x - \frac{\sigma_y}{\sigma}\partial_y$

b) $\nabla_{\partial_y}\partial_y = -\frac{\sigma_x}{\sigma}\partial_x + \frac{\sigma_y}{\sigma}\partial_y$

c) $\nabla_{\partial_x}\partial_y = \nabla_{\partial_y}\partial_x = \frac{\sigma_y}{\sigma}\partial_x + \frac{\sigma x}{\sigma}\partial_y$

d) $\nabla_{\partial_x}\partial_t = \nabla_{\partial_y}\partial_t = \nabla_{\partial_t}\partial_t = \nabla_{\partial_t}\partial_x = \nabla_{\partial t}\partial_y = 0$

Prueba.

prueba de a)

Como $\nabla_{\partial_x}\partial_x$ es un vector que pertenece al espacio tangente de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, tenemos que

$$\nabla_{\partial_x}\partial_x = A\partial_x + B\partial_y + C\partial_t \tag{2.9}$$

donde A, B y $C \in \mathbb{R}$

A continuación calcularemos los coeficientes A, B y C:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial_x}\partial_x, \partial_x \rangle &= \langle A\partial_x + B\partial_y + C\partial_t, \partial_x \rangle \\ &= A\langle \partial_x, \partial_x \rangle + B\langle \partial_y, \partial_x \rangle + C\langle \partial_t, \partial_x \rangle \\ &= A\sigma^2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial_x}\partial_x, \partial_y \rangle &= \langle A\partial_x + B\partial_y + C\partial_t, \partial_y \rangle \\ &= A\langle \partial_x, \partial_y \rangle + B\langle \partial_y, \partial_y \rangle + C\langle \partial_t, \partial_y \rangle \\ &= B\sigma^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial_x}\partial_x, \partial_t \rangle &= \langle A\partial_x + B\partial_y + C\partial_t, \partial_t \rangle \\ &= A\langle \partial_x, \partial_t \rangle + B\langle \partial_y, \partial_t \rangle + C\langle \partial_t, \partial_t \rangle \\ &= C\sigma^2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

calculemos $\partial_x \langle \partial_x, \partial_x \rangle = \langle \nabla_{\partial_x}\partial_x, \partial_x \rangle + \langle \partial_x, \nabla_{\partial_x}\partial_x \rangle = 2 \langle \nabla_{\partial_x}\partial_x, \partial_x \rangle$.

Entonces:

$$\langle \nabla_{\partial_x}\partial_x, \partial_x \rangle = \frac{\partial_x \sigma^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\sigma^2 = \frac{2\sigma\sigma_x}{2} = \sigma\sigma_x \tag{2.13}$$

Calculemos $\partial_x \langle \partial_x, \partial_y \rangle = \langle \nabla_{\partial_x}\partial_x, \partial_y \rangle + \langle \partial_x, \nabla_{\partial_x}\partial_y \rangle$, de donde:

$$\langle \nabla_{\partial_x}\partial_x, \partial_y \rangle = - \langle \partial_x, \nabla_{\partial_x}\partial_y \rangle \tag{2.14}$$

tambien calculemos

$$\begin{aligned} \partial_y \langle \partial_x, \partial_x \rangle &= \left\langle \nabla_{\partial_y}\partial_x, \partial_x \right\rangle + \left\langle \partial_x, \nabla_{\partial_y}\partial_x \right\rangle = 2 \left\langle \partial_x, \nabla_{\partial_y}\partial_x \right\rangle \\ \frac{\partial_y \sigma^2}{2} &= \left\langle \partial_x, \nabla_{\partial_y}\partial_x \right\rangle \\ \sigma\sigma_y &= - \langle \nabla_{\partial_x}\partial_x, \partial_y \rangle \end{aligned} \tag{2.15}$$

de igual modo calculemos

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \partial_x, \partial_x \rangle &= \langle \nabla_{\partial_t}\partial_x, \partial_x \rangle + \langle \partial_x, \nabla_{\partial_t}\partial_x \rangle \\ \frac{\partial \sigma^2}{\partial_t} &= 2 \langle \nabla_{\partial_t}\partial_x, \partial_x \rangle \\ 0 &= \langle \nabla_{\partial_t}\partial_x, \partial_x \rangle \end{aligned} \tag{2.16}$$

.

De 2.10 y de 2.13 resulta $A = \frac{\sigma_x}{\sigma}$

De 2.11 y de 2.15 resulta $B = -\frac{\sigma_y}{\sigma}$

De 2.12 y de 2.16 resulta $C = 0$

Luego reemplazando en 2.9 tenemos:

$$\nabla_{\partial_x}\partial_x = -\frac{\sigma_x}{\sigma}\partial_x - \frac{\sigma_y}{\sigma}\partial_y$$

De forma análoga se prueba los items b) c) y d) ■

Corolario 2.1 *Los símbolos de Christoffel de* $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ *serán:*

$$\begin{array}{llllll}
\Gamma^1_{11} = -\frac{\sigma_x}{\sigma} & \Gamma^1_{12} = \frac{\sigma_y}{\sigma} & \Gamma^1_{13} = 0 & \Gamma^1_{22} = -\frac{\sigma_x}{\sigma} & \Gamma^1_{23} = 0 & \Gamma^1_{33} = 0 \\
\Gamma^2_{11} = -\frac{\sigma_y}{\sigma} & \Gamma^2_{12} = \frac{\sigma_z}{\sigma} & \Gamma^2_{13} = 0 & \Gamma^2_{22} = \frac{\sigma_y}{\sigma} & \Gamma^2_{23} = 0 & \Gamma^2_{33} = 0 \\
\Gamma^3_{11} = 0 & \Gamma^3_{12} = 0 & \Gamma^3_{13} = 0 & \Gamma^3_{22} = 0 & \Gamma^3_{23} = 0 & \Gamma^3_{33} = 0
\end{array}$$

Prueba. Identifiquemos $\partial_x = e_1$, $\partial_y = e_2$, $\partial_t = e_3$

De ahi que por 1.1 resulta:

$\Gamma^1_{11}\partial_x + \Gamma^2_{11}\partial_y + \Gamma^3_{11}\partial_t = \nabla_{\partial_x}\partial_x = -\frac{\sigma_x}{\sigma}\partial_x - \frac{\sigma_y}{\sigma}\partial_y + 0\partial_t$

De donde:

$\Gamma^1_{11} = -\frac{\sigma_x}{\sigma}$;

$\Gamma^2_{11} = -\frac{\sigma_y}{\sigma}$

$\Gamma^3_{11} = 0$

De igual manera:

$\Gamma^1_{12}\partial_x + \Gamma^2_{12}\partial_y + \Gamma^3_{12}\partial_t = \nabla_{\partial_y}\partial_x = \nabla_{\partial_x}\partial_y = \frac{\sigma_y}{\sigma}\partial_x + \frac{\sigma_x}{\sigma}\partial_y + 0\partial_t$

De donde.

$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{\sigma_y}{\sigma}$

$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\sigma_z}{\sigma}$

$\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = 0$

También

$\Gamma^1_{22}e_1 + \Gamma^2_{22}e_2 + \Gamma^3_{22}e_3 = \nabla_{e_2}e_2 = \nabla_{\partial_y}\partial_y = -\frac{\sigma_x}{\sigma}\partial_x + \frac{\sigma_y}{\sigma}\partial_y + 0\partial_t$

De donde resulta:

$\Gamma^1_{22} = -\frac{\sigma_x}{\sigma}$

$\Gamma^2_{22} = \frac{\sigma_y}{\sigma}$

$\Gamma^3_{22} = 0$

De igual manera se demuestra que:

$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^3_{13} = 0$

$\Gamma^1_{33} = \Gamma^2_{33} = \Gamma^3_{33} = 0$

$\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{23}^3 = 0$ ■

Ahora al ya haber encontrado todos los símbolos de Christoffel y como sabemos que la conexión Riemanniana depende de los símbolos de Christoffel, entonces, de quedará determinada la conexión de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y X &= \left(mf_x + nf_y + rf_z + (mg + nf)\,\frac{\sigma_y}{\sigma} + (mf - ng)\frac{\sigma_x}{\sigma} \right) \partial_x \\
&+ \left(mg_x + ng_y + rg_z + (ng - mf)\,\frac{\sigma_y}{\sigma} + (nf + mg)\,\frac{\sigma_x}{\sigma} \right) \partial_y \\
&+ (mh_x + nh_y + rh_z)\,\partial_t
\end{aligned}$$

2.2.3. Primera forma fundametal de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Dada la métrica producto $g_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}} = g_{\mathbb{M}^2} + g_{\mathbb{R}}$ y los coeficientes $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, que son llamados **coeficientes de la primera forma fundamental** en la base $\{\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3\}$.donde $X_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}$ son los campos coordenados de la variedad $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

La representación matricial de la primera forma fundamental es denotada por $G = (g_{ij})$ donde G es la matriz:

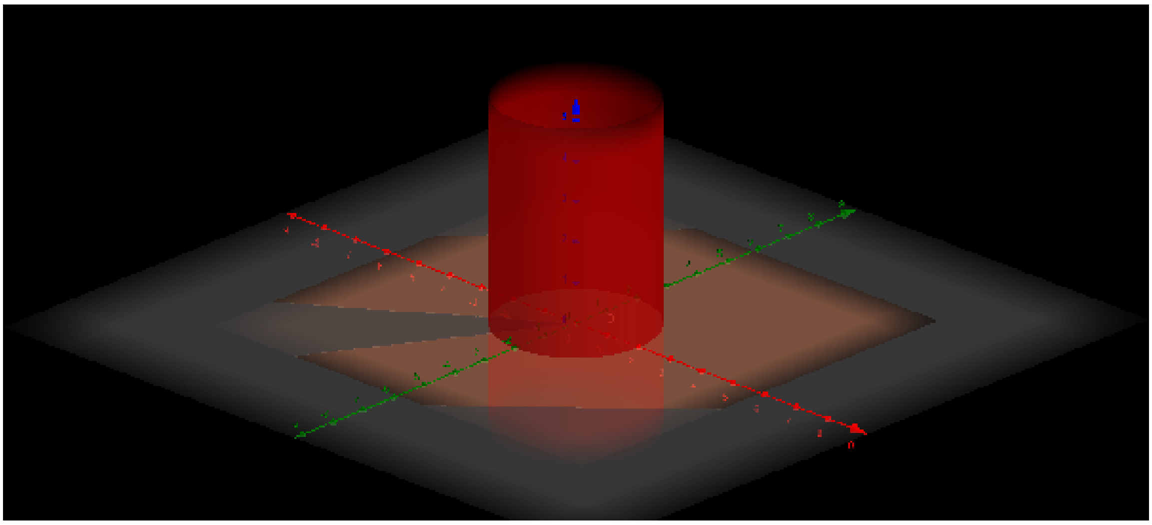
$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y su inversa será:

$$G^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3. Espacio producto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Una manera de representar al espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es tomando al espacio hiperbólico $\mathbb{H}^2$ en el modelo del disco de Poincaré y hacer el producto cartesiano con $\mathbb{R}$, el cual puede ser verse en la siguiente imagen:



Si $p = (x, y, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y para cada $a, b \in T_p(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$
$a = (u_1, v_1, t_1); b = (u_2, v_2, t_2)$, la métrica para $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ se define así:

$$\begin{aligned} g(a,b) &= \langle a, b\rangle_{\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}} = \langle (u_1, v_1, t_1), (u_2, v_2, t_2)\rangle_{\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}} \\ &= \langle (u_1, v_1); (u_2, v_2)\rangle_{\mathbb{H}^2} + t_1 t_2 \\ &= \frac{u_1u_2 + v_1v_2}{y^2} + t_1t_2 \end{aligned}$$

2.3.1. Conexión y primera forma fundamental de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Los símbolos de Christoffel cuando $Tp\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ se pueden obtener apartir de la proposición 1.9 o también de la fórmula siguiente:

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{kj} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}$$

donde g_{ij} y g^{km} son las entradas de las matrices G y G^{-1}, donde G es la representación matricial de la primera forma fundamental de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, cuyas matrices son:

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} y^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los símbolos de Christofel de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Los símbolos de Christofel de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ son:

$$\begin{array}{llllll} \Gamma_{11}^1 = 0 & \Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{y} & \Gamma_{13}^1 = 0 & \Gamma_{22}^1 = 0 & \Gamma_{23}^1 = 0 & \Gamma_{33}^1 = 0 \\ \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y} & \Gamma_{12}^2 = 0 & \Gamma_{13}^2 = 0 & \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{y} & \Gamma_{23}^2 = 0 & \Gamma_{33}^2 = 0 \\ \Gamma_{11}^3 = 0 & \Gamma_{12}^3 = 0 & \Gamma_{13}^3 = 0 & \Gamma_{22}^3 = 0 & \Gamma_{23}^3 = 0 & \Gamma_{33}^3 = 0 \end{array}$$

Ejemplo 2.1 *El símbolo de Christoffel* Γ_{11}^2 *se puede obtener de reemplazar* $\sigma = \frac{1}{y}$ *en* $\Gamma_{12}^1 = \frac{\sigma_y}{\sigma}$ *del corolario 2.1, así tendríamos:*

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{2} &= -\frac{\sigma_y}{\sigma} \\
&= -\frac{\frac{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}{\partial y}}{\frac{1}{y}} \\
&= y^{-2}y \\
&= \frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

A continuación mostraremos otra forma de hallarlo a partir de los coeficientes de la métrica:

$$
\begin{aligned}
2\Gamma_{11}^{2} &= \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x}\right)g^{12}+\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x}-\frac{\partial g_{11}}{\partial y}\right)g^{22} \\
&\quad+\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x}+\frac{\partial g_{31}}{\partial x}-\frac{\partial g_{11}}{\partial t}\right)g^{32} \\
&= \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x_1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right)g^{22} \\
&= -\frac{\partial g_{11}}{\partial y}g^{22} \\
&= 2y^{-3}y^{2} \\
\Gamma_{11}^{2} &= \frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

2.3.2. La conexión de $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$

Si $p=(x,y,t)\in\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$; $T_p\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}\simeq\mathbb{R}^3$ y $\{e_1,e_2,e_3\}$ una base para $\mathbb{R}^3$ luego para los campos $X,Y\in T_p\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ con

$$X(p)=(f(p),g(p),h(p))=f(p)e_1+g(p)e_2+h(p)e_3$$

$$Y(p)=(m(p),n(p),r(p))=m(p)e_1+n(p)e_2+r(p)e_3$$

$$\overline{\nabla}_Y X=\overline{\nabla}_{me_1+ne_2+re_3}fe_1+\overline{\nabla}_{me_1+ne_2+re_3}ge_2+\overline{\nabla}_{me_1+ne_2+re_3}he_3$$

y de manera análoga a los resultados hallados en 2.1.4 la conexión de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ quedará determinada por:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y X &= \left(mf_x + nf_y + rf_z + \frac{(mg+nf)}{y}\right) e_1 + \\
&\left(mg_x + ng_y + rg_z + \frac{(ng-mf)}{y}\right) e_2 + \\
&(mh_x + nh_y + rh_z)\, e_3
\end{aligned}$$

2.4. Una fórmula para calcular la curvatura media y curvatura de Gauss para superficies de revolución inmersas en la variedad Riemanianna $\mathbb{H}^3$

Sabemos que las ecuaciones de las curvaturas extrínseca y media dadas en (2.6) y (2.7) se pueden ver de la siguiente forma:

$$K_{ext} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

y

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

estas serán las formas de las ecuaciones de K_{ext} y H, que serán utilizadas al momento de realizar el cálculo.

Observación 2.3 *Si la parametrización de una superficie es tal que*

$F = f = 0$, *entones las curvaturas principales están dadas por* $\frac{e}{E}$ *y* $\frac{g}{G}$. *De hecho, en este caso, la curvatura Gaussiana y la curvatura media están dadas por:*

$$K_{ext} = \frac{eg}{EG}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG + gE}{EG}$$

la afirmación proviene del hecho que K_{ext} es el producto y $2H$ es la suma de las curvaturas principales.

Para esto consideraremos un ejemplo sencillo el Horociclo (es un plano paralelo al plano xy o también puede ser una esfera tangente al plano xy ; donde el plano xy es llamado también borde asintótico de $\mathbb{H}^3$). Consideremos la siguiente parametrización del plano paralelo al borde asintótico de $\mathbb{H}^3$.

$$X(u,v) = (0,0,a) + u(1,0,0) + v(0,1,0), \quad a > 0$$

Haciendo los cálculos correspondientes tenemos:

$$X_u = (1,0,0) \quad X_v = (0,1,0)$$

$$\overline{\nabla}_{X_u} X_u = (0,0,\tfrac{1}{a}) \quad \overline{\nabla}_{Xv} X_u = (0,0,0) \quad \overline{\nabla}_{Xv} X_v = (0,0,\tfrac{1}{a})$$

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|_{\mathbb{H}^3}} = (0,0,a)$$

así los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental son

$$E = \tfrac{1}{a^2} \quad F = 0 \quad G = \tfrac{1}{a^2}$$
$$e = \tfrac{1}{a^2} \quad f = 0 \quad g = \tfrac{1}{a^2}$$

Luego remplazando en la fórmula de K_{ext} tenemos:

$$K_{ext} = \frac{eg}{EG} = \frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}\right)}{\left(\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}\right)} = 1.$$

De la última observación tenemos que las curvaturas principales son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$ de ahí que la curvatura media de la superficie es $H = 1$.

Seguidamente presentaremos un método para calcular las curvaturas media y de Gauss para superficies de revolución inmersas en $\mathbb{H}^3$.

Sea $\alpha(v) = (\varphi(v), \psi(v))$ una curva plana, contenida en $\mathbb{H}^3$ con

$a < v < b$, $\varphi(v) > 0$ situada en el plano xz y denotemos por S el conjunto obtenido al rotar la curva α al rededor del eje Oz (S es llamada de superficie de revolución). Una parametrizacion para S es

$$Sea\ p = X(u,v) = (\varphi(v)\cos(u), \varphi(v)\, sen(u), \psi(v)) \in \mathbb{H}^3$$

con $0 < u < 2\pi$, $a < v < b$. Ahora calculemos los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental, en efecto, haciendo los cálculos correspondientes tenemos:

$$\begin{aligned}
X_u &= (-\varphi(v)\, sen(u), \varphi(v)\cos(u), 0)\\
X_v &= (\varphi'(v)\cos(u), \varphi'(v)\, sen(u), \psi'(v))\\
X_{uu} &= (-\varphi(v)\cos(u), -\varphi(v)\, sen(u), 0)\\
X_{vv} &= (\varphi''(v)\cos(u), \varphi''(v)\, sen(u), \psi''(v))\\
X_{uv} &= (-\varphi'(v)\, sen(u), \varphi'(v)\cos(u), 0)
\end{aligned}$$

Encontremos el vector normal unitario hiperbólico

$$\begin{aligned}
X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\varphi(v)\, sen(u) & \varphi(v)\cos(u) & 0 \\ \varphi'(v)\cos(u) & \varphi'(v)\, sen(u) & \psi'(v) \end{vmatrix}\\
&= (\varphi(v)\psi'(v)\cos(u), \varphi(v)\psi'(v)\, sen(u), -\varphi(v)\varphi'(v))
\end{aligned}$$

de ahora en adelante por simplicidad empezaremos a denotar $\varphi(v)$ y $\psi(v)$ sin sus argumentos

$$\begin{aligned}
|X_u \wedge X_v|_{\mathbb{H}^3} &= \frac{\sqrt{\varphi^2(\psi')^2\cos^2(u) + \varphi^2(\psi')^2 sen^2(u) + \varphi^2(\varphi')^2}}{\psi}\\
&= \frac{\varphi\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}}{\psi}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} N &= \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|_{\mathbb{H}^3}} \\ &= \frac{\psi}{\varphi\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} \left(\varphi\psi' \cos(u), \varphi\psi' sen(u), -\varphi\varphi'\right) \\ &= \frac{\psi}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} \left(\psi' \cos(u), \psi' sen(u), -\varphi'\right) \end{aligned}$$

Calculemos los coeficientes de la primera forma fundamental

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle_{\mathbb{H}^3} = \frac{\varphi^2}{\psi^2} \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle_{\mathbb{H}^3} = 0 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle_{\mathbb{H}^3} = \frac{(\varphi')^2 + (\psi')^2}{\psi^2} \end{aligned}$$

El término $(\quad , \quad , \quad)$ en los cálculos siguientes corresponde a la parte de los símbolos de Christoffel de la conexión hiperbólica, recordemos la siguiente descomposición de la conexión hiperbólica

$$\overline{\nabla}_{X_u} X_u = \underbrace{X_{uu}}_{\text{Parte euclidiana}} + \underbrace{\frac{1}{\psi}(\quad , \quad , \quad)}_{\text{Parte correspondiente a los símbolos de Christoffel}}$$

Calculemos los coeficientes de la segunda forma fundamental

$$\begin{aligned}
e &= \left\langle N, \overline{\nabla}_{X_u} X_u \right\rangle_{\mathbb{H}^3} = \left\langle N, X_{uu} + \frac{1}{\psi}\left(\quad , \quad , \quad \right) \right\rangle_{\mathbb{H}^3} \\
&= \left\langle N, X_{uu} \right\rangle_{\mathbb{H}^3} + \left\langle N, \frac{1}{\psi}\left(\quad , \quad , \quad \right) \right\rangle_{\mathbb{H}^3} \\
&= \frac{\left\langle N, X_{uu} \right\rangle}{\psi^2} + \frac{1}{\psi^3}\left\langle N, \left(\quad , \quad , \quad \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{\psi^2} \frac{\psi}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} \langle (\psi' \cos(u), \psi' sen(u), -\varphi'); \\
& \quad (-\varphi \cos(u), -\varphi sen(u), 0) \rangle + \frac{1}{\psi^3}\left\langle N, \left(\quad , \quad , \quad \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{\psi \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} \left(-\psi' \varphi \cos^2(u) - \psi' \varphi sen^2(u) \right) + \\
& \quad \frac{1}{\psi^3}\left\langle N, \left(\quad , \quad , \quad \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{\psi \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} (-\psi' \varphi) + \frac{1}{\psi^3} \frac{\psi}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} . \\
& \quad \left\langle (\psi' \cos(u), \psi' sen(u), -\varphi'); \left(0, 0, \varphi^2\right) \right\rangle \\
&= -\frac{\psi' \varphi}{\psi} \frac{1}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} - \frac{1}{\psi^2} \frac{\varphi^2 \varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}}
\end{aligned}$$

De forma similar se obtienen los demás coeficientes

$$f = \left\langle N, \overline{\nabla}_{X_v} X_u \right\rangle_{\mathbb{H}^3} = 0$$

$$\begin{aligned}
g &= \left\langle N, \overline{\nabla}_{X_v} X_v \right\rangle_{\mathbb{H}^3} \\
&= \frac{1}{\psi} \frac{(\psi' \varphi'' - \varphi' \psi'')}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} - \frac{\varphi'}{\psi^2} \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}
\end{aligned}$$

utilizando la fórmula de K tenemos

$$K_{ext} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$K_{ext} = \left(\frac{\psi \psi'}{\varphi \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} + \frac{\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} \right) \left(\psi \frac{(\varphi' \psi'' - \psi' \varphi'')}{\left((\varphi')^2 + (\psi')^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} \right)$$

También de la última observación tenemos

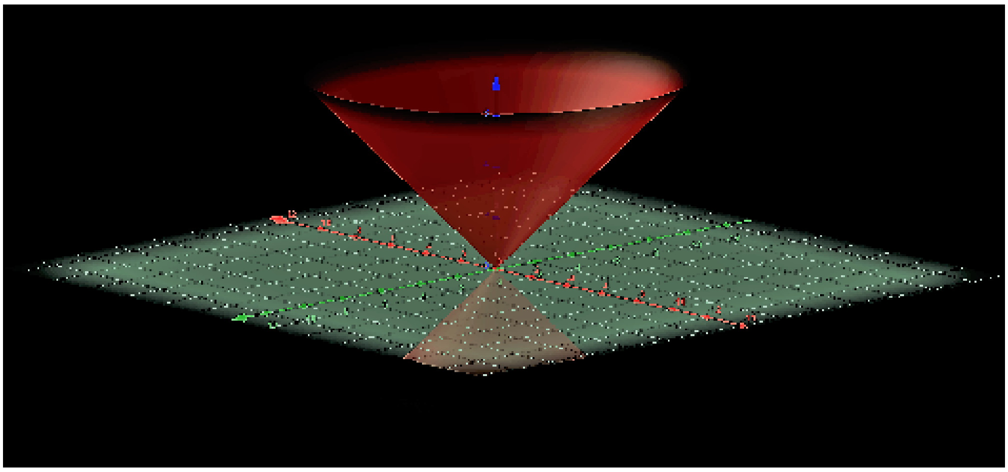
$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{2\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}} + \frac{\psi\psi'}{\varphi\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}} + \psi\frac{(\varphi'\psi''-\psi'\varphi'')}{\left((\varphi')^2+(\psi')^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Algo importante de la fórmula de la K_{ext} obtenida aquí es su segundo factor

$$\left(\psi\frac{(\varphi'\psi''-\psi'\varphi'')}{\left((\varphi')^2+(\psi')^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}}\right)$$

el cual no es más que la curvatura de la curva plana generatriz $\alpha(v) = (\varphi(v), \psi(v))$ de la superficie de revolución hiperbólica, cabe también notar que este segundo factor de la K_{ext} coincide exactamente con la fórmula (2.5), algo análogo también ocurre cuando estudiamos superficies de revolución del espacio euclidiano. De aquí podemos afirmar que la curvatura de superficies de revolución del espacio hiperbólico y del espacio euclidiano es influenciada por la curvatura de sus curvas generatriz.

Ejemplo 2.2 *Sea el cilindro hiperbólico* $X(u,v) = (\varphi(v)\cos(u), \varphi(v)\ sen(u), \psi(v))$ *que resulta de rotar la curva* $\alpha(v) = (v, 0, v)$ *alrededor del eje* z. *Donde* $\varphi(v) = v = \psi(v)$; *aplicando las fórmulas anteriores tenemos:*



La curvatura extrínseca será:

$$\begin{aligned}
K_{ext} &= \left(\frac{\varphi\varphi'}{\varphi\sqrt{(\varphi')^2 + (\varphi')^2}} + \frac{\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\varphi')^2}} \right) \left(\frac{\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\varphi')^2}} \right) \\
&= \frac{2\varphi'}{\sqrt{2}\varphi'} \times \frac{\varphi'}{\sqrt{2}\varphi'} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3 *La curvatura media del cilindro hiperbólico será:*

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \left(\frac{2\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\varphi')^2}} + \frac{\varphi'}{\varphi\sqrt{(\varphi')^2 + (\varphi')^2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.4 *Los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales para el cilindro hiperbólico serán:*

$$
\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u \rangle_{\mathbb{H}^3} = \frac{\varphi^2}{\psi^2} = 1 \\
F &= \langle X_u, X_v \rangle_{\mathbb{H}^3} = 0 \\
G &= \langle X_v, X_v \rangle_{\mathbb{H}^3} = \frac{(\varphi')^2 + (\varphi')^2}{\varphi^2} = \frac{2}{v^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e &= -\frac{\psi'\varphi}{\psi}\frac{1}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} - \frac{1}{\psi^2}\frac{\varphi^2\varphi'}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= -\sqrt{2} \\
f &= 0 \\
g &= \frac{-\sqrt{2}}{v^2}
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

SUPERFICES INMERSAS EN EL ESPACIO DE MINKOWSKI

El espacio de Minkowski es conocido como el espacio donde los conceptos de espacio y tiempo de partículas fueron unificados por Minkowski en un solo concepto básico e indivisible el **"ESPACIO - TIEMPO",** que es el nombre con que se le conoce. En física este espacio es una variedad lorentziana de cuatro dimensiones y curvatura nula, usada para describir los fenómenos físicos en el escenario de la teoría especial de la relatividad de Einstein. En este trabajo estudiaremos el espacio de Minkowski de dimensión 3 la cual es una varie dad pseudo Riemanniana.

En geometría diferencial, una variedad pseudo Riemanniana es una varie dad diferenciable equipada con una métrica diferenciable, simétrica, que es no degenerado en cada punto de la variedad. Esta métrica se llama pseudo Riemanniana y a diferencia de una métrica Riemanniana no tiene por qué ser definido positivo. De hecho la variedades pseudo Riemannianas generalizan el concepto de variedad Riemanniana.

Notemos que $\mathbb{R}^{2,1} = (\mathbb{R}^3, \overline{g})$ el espacio de Minkowski de dimensión 3 es el espacio euclideano $\mathbb{R}^3$ junto con la siguiente forma bilineal simétrica no degenerada llamada la métrica de Lorentz..

$$\overline{g} = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$$

La cual tiene una representación matricial dada por:

$$[\overline{g}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La diferencia clave entre una métrica Riemanniana y una métrica pseudoriemanniana es que una métrica pseudoriemanniana no necesita ser definida positiva, simplemente necesita ser no degenerada. Puesto que cada forma positivo-definida es también no degenerada, una métrica Riemanniana es un caso especial de pseudoriemanniana. Así las variedades pseudoriemannianas se pueden considerar generalizaciones de las variedades de Riemann.

En la notación $\mathbb{R}^{2,1}$, $(2,1)$ es la signatura fija para el espacio de Minkowski de dimensión 3. Cada forma no degenerada, simétrica bilineal tiene una signatura fija (p,q). Aquí p y q denotan el número de los valores propios positivos y negativos de la forma. La signatura de una variedad pseudoriemanniana es justo la signatura de la métrica. Observe que $p + q = n$ es la dimensión de la variedad, para el espacio de el espacio de Minkowski de dimensión 3 tendremos que $p = 2$ y $q = 1$ luego $n = 2 + 1 = 3$ que es la dimensión del espacio en el cual estamos trabajando. Las variedades de Riemann son simplemente el espacio de Minkowski con la signatura $(n, 0)$.

Sea $\mathbb{M}^2$ una variedad conexa diferenciable de dimensión 2 y $X : \mathbb{M}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ es una inmersión diferenciable. Aquí consideraremos que X es un inmersión spacelike o $\mathbb{M}^2$ es una superficie spacelike en $\mathbb{R}^{2,1}$,es decir, la metrica $\overline{g}$ res tricta a la superficie $\mathbb{M}^2$ es positiva definida.

A continuación definiremos algunos modelos del espacio hiperbólico y vere mos que el espacio hiperbólico poder verse inmerso en el espacio de Minkowski .

1. Modelo del hiperboloide
   $H^3 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^{3,1} \ / \ \ x^2+y^2+z^2-w^2 = -1, w>0\}$ con métrica
   $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dw^2$$
2. Modelo de la bola unitaria $\mathbb{B}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2+y^2+z^2 < 1\}$ con métrica
   $$ds^2 = \frac{4\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)}{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)^2}$$
3. Modelo del semi-espacio superior $\mathbb{H}^3$= $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z>0\}$ con métrica
   $$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}$$

Como veremos el espacio hiperbólico de dimensión tres ($\mathbb{H}^3$) en el espacio de Minkowski de dimensión cuatro ($\mathbb{R}^{3,1}$) puede verse como un hiperboloide, es decir, el espacio hiperbólico en el espacio de Minkowski puede verse naturalmente como una subvariedad Riemanniana del espacio de Minkowski con la métrica inducida . Los modelos del espacio hiperbólico dados anteriormente están relacionadas por las siguientes isometrías (para mayores detalles ver [1]) :

a) $\varphi : H^3 \longrightarrow \mathbb{B}^3$, $\varphi(x,y,z,w) = \left(\frac{x}{w+1}, \frac{y}{w+1}, \frac{z}{w+1}\right)$, la cual es llamada proyección central del punto $(0,0,0,-1)$ o simplemente proyección estereográfica.

b) $\psi : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{H}^3$, $\psi(x,y,z) = 4\frac{(x,y,z)+(0,0,1)}{\|(x,y,z)+(0,0,1)\|^2} + (0,0,-2)$,la cual es la composición de la traslación $(x,y,z) \longrightarrow (x,y,z)+(0,0,-1)$ seguida de la inversión de $\mathbb{R}^3$ con respecto a la esfera centrada en el punto $(0,0,-2)$ y de radio 2.

Así podemos relacionar todos los resultados obtenidos para el modelo del semiplano superior $\mathbb{H}^3$ con el modelo del hiperboloide H^3(que vive en el espacio de Minkowski) a través de la siguiente composición $\psi \circ \varphi$.

También por otro lado el espacio producto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ puede verse inmerso de manera natural en el espacio de Minkowski (para mayores detalles ver [1])

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^{3,1} \ / \ \ x^2+y^2-w^2=-1, w>0\right\}$$

3.0.1. Teorema Fundamental de la Geometría en $\mathbb{R}^{2,1}$

Sea $X : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ una imersión isométrica con primera y segunda forma fundamental dadas por:

$I = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j$ y $II = \sum_{i,j} L_{ij} du^i du^j$

donde $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ y $L_{ij} = \left\langle N, \overline{\nabla} X_i, X_j \right\rangle$ (u^1, u^2) son las coordenadas locales de $\mathbb{M}$, $X_i = \frac{\partial X}{\partial u^i}$ y ∇ es la conexión Riemanniana de $\mathbb{R}^{2,1}$

Tenemos que,

$$\overline{\nabla}_{Xj} Xi = \nabla_{Xj} Xi + L_{ij} N$$

$$\overline{\nabla}_{Xj} Xi = \sum_{k=1j}^{2} \Gamma_{ij}^k X_k + L_{ij} N \tag{3.1}$$

donde Γ_{ij}^k son los simbolos de Christoffel de $\mathbb{M}$

Observación 3.1 *La conexión Riemanniana de* $\mathbb{R}^{2,1}$ *coincide con la derivada usual en* $\mathbb{R}^3$

En efecto, denotemos : $\partial x_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial x_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \partial x_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$, con $\{\partial x, \partial y, \partial t\}$ una base para $T_p\mathbb{R}^{2,1}$. Dados X, Y dos campos en $\mathbb{R}^{2,1}$, tenemos que

$X = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i \partial x_i$, y $Y = \sum\limits_{j=1}^{3} y_j \partial x_j$,

De ahi usando las propiedades de conexión, sigue que:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y X &= \sum_{j=1}^{3} y_j \overline{\nabla}_{\partial x_j} \sum_{i=1}^{3} x_i \partial x \\
&= \sum_{i=1}^{3} y_j \left[\partial x_j \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \right) \partial x_i + \sum_{i=1}^{3} x_i \overline{\nabla}_{\partial x_j} \partial x_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^{3} y_j \left[\partial x_j \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \right) \partial x_i + \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{k=1}^{3} \Gamma_{ij}^{k} \partial x_k \right]
\end{aligned}$$

y

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \{ \partial x_i(g_{jk}) + \partial x_j(g_{ki}) - \partial x_k(g_{ij}) \} g^{km} = 0$$

Pues los g_{ij} son constantes. Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y X &= \sum_{i=1}^{3} y_j \left[\partial x_j \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \right) \partial x_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^{3} Y(x_i) \partial x_i \\
&= Y \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \partial x_i \right) \\
&= YX
\end{aligned}$$

y con eso probamos nuestra afirmación.

De ahi, la ecuación queda como:

$$(Xi)\, j = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} X_k + L_{ij} N \tag{3.2}$$

Y a través de algunos cálculos obtenemos

$$\begin{aligned} N_i &= \nabla_{X_i} N \\ &= -\sum_{s,m} L_{is} g^{sm} X_m \end{aligned}$$

Por tanto, si la imersión X existe, tenemos que X_1, X_2, N satisfacen el siguiente sistema

$$\begin{aligned} (X_i)_j &= \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} X_k + L_{ij} N \\ Ni &= -\sum_{s} \sum_{m} L_{is} g^{sm} X_m \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ahora provaremos el teorema fundamental de la geometría, para el espacio de Minkowski. Para esto haremos uso del teorema de Frobenius que enunciaremos sin demostración.

Teorema 3.1 *(de Frobenius)*

Sea $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un abierto, donde U es una vecindad de $0 \in \mathbb{R}^m$ y sean

$$\begin{aligned} f_i &: U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ &: (t, x) \mapsto f_i(t, x) \end{aligned}$$

funciones C^∞ , donde $i = 1, 2, ..., m$. Entonces para cada $x \in V$ existe a lo más una función $\alpha : W \longrightarrow V$ definida en una vecidad W de $0 \in \mathbb{R}^m$, satisfaciendo:

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= x \\ \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t^j} &= f_j(t, \alpha(t)) \end{aligned}$$

para todo $t \in W$. Además de esto, α existe en alguna vecindad W si y sólo si, existe una vecindad de $(0, x) \in U \times V$ en la cual

$$\frac{\partial f_j}{\partial t^i} - \frac{\partial f_i}{\partial t^j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x^k} f_i^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x^k} f_j^k = 0 \qquad\qquad i, j = 1, 2, ..., m$$

una demostración del teorema de Frobenius se puede encontrar en [5]

Teorema 3.2 *(Fundamental de la Geometría para* $\mathbb{R}^{2,1}$ *)*

Sea $\mathbb{M}$ *una variedad diferenciable, simplemente conexa, orientada y sea* I *una forma bilineal simétrica definida positiva y* II *una forma bilineal simétrica sobre* $\mathbb{M}$*, satisfaciendo las equaciones de Gauss y Mainardi-Codazzi.Entonces existe una imersión isométrica* $X : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ *con primera forma fundamental dada por* I *y segunda forma fundamental dada por* II*.*

Prueba. Si X_1, X_2, N existen y satisfacen el sistema el sistema 3.3, entonces es bien probable que la inmersión exista. Supongamos entonces que X_1, X_2, N son funciones que serán encontradas satisfaciendo el sistema 3.3.

Usando la parte del teorema de Frobenius correspondiente a la existencia, tenemos que tal sistema es integrable si, y solamente si, $\left(X_i \right)_{jk} = \left(X_i \right)_{kj}$ y $N_{ij} = N_{ji}$, o sea, si y solo si, I y II satisfacen las euaciones de Gauss y Mainardi - Codazzi.

Ahora por hipótesis tenemos que I y II son formas bilineales satisfaciendo Gauss y Mainardi - Codazzi, luego X_1, X_2, N existen con condiciones iniciales $\langle X_i, X_j \rangle = g_{ij}(p), \langle X_i, N \rangle_p = 0$ y $\langle X_i, N \rangle_p = -1$.

Ahora vamos a encontrar X_1, X_2, N pero satisfaciendo el sistema 3.3 y así podremos encontrar la inmersión $X : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ que buscamos donde

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial X}{\partial u^i} &= X_i \\ X\left(u_{0,}^1 u_0^2\right) &= p \end{aligned} \tag{3.4}$$

Haciendo cumplir las hipótesis del teorema de Frobenius, concluimos que el sistema 3.3 es integrable, pues $\left(X_i\right)_j = \left(X_j\right)_i$. Y para verificar esta última igualdad basta intercambiar i con j en la ecuación 3.3 y usar $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ y $L_{ij} = L_{ji}$ ∎

Conclusiones

1. Apartir de encontrar los símbolos de Christoffel para los espacios $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, se determinan sus conexiones Riemannianas (conexión de Levi-Civita).

2. El espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3$ es un ejemplo de variedad Riemanniana con curvatura seccional constante igual a -1.

3. Las superficies en el espacio $\mathbb{H}^3$ tienen curvatura extrínseca K_{ext} diferente de la Curvatura intrínseca a diferencia del espacio Euclideano y están relacionadas por la segunda forma fundamental a través de la ecuación de Gauss.

4. La curvatura de superficies de revolución en el espacio hiperbólico al igual que en el espacio Euclidiano es influenciada por la curvatura de sus curvas generatriz.

5. Se encontro un resultado análogo al teorema de Bonnet (Teorema fundamental de la geomería en $\mathbb{R}^3$ para superficies Euclideanas) en el espacio de Minkowski.

Bibliografía

[1] **A. Araujo Cintra**,Superficies Completas com Curvatura Gaussiana Constante em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$,Goiânia 2010.

[2] **Ady Cambraia Júnior**, Imersoes Mínimas e Conformes em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Rio de Janeiro 2009.

[3] **M.P. Do Carmo,**Geometría Diferencial de Curvas e Superficies 2006.

[4] **M.P. Do Carmo,** Geometría Riemanniana 2014.

[5] **Michael Spivak** ,A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1, 3rd Edition

[6] **R. Sá Earp & E. Toubiana**, Introduction à la Géométrie Hyperbolique et aux Surfaces de Riemann, A segunda edição foi publicada pela editora Cassini, Paris, Francia, em 2009.