UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

ESCUELA DE POSGRADO

UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y FORMALES

EXPANSIVIDAD DEL FLUJO GEODÉSICO EN VARIEDADES SIN PUNTOS CONJUGADOS.

Tesis presentada por la bachiller

Noemi Giovanna Alarcón Cárdenas

para optar el Grado Académico de

Maestro en Ciencias Matemáticas con

mención en Matemática Universitaria Superior.

ASESOR: Dr. Vladimir Rosas Meneses

Arequipa-Perú

2018

EXPANSIVIDAD DEL FLUJO GEODÉSICO EN VARIEDADES SIN PUNTOS CONJUGADOS.

Tesis Presentada por:

Bach. Noemí Giovanna Alarcón Cárdenas

JURADO:

Mg. Tulio Bravo Palomino : ____________________

Mg. Edgar Apaza Villalta : ____________________

Dr. Vladimir Rosas Meneses : ____________________

Agradecimientos

Indudablemente, gracias a Dios por la fortaleza que me da día a día para salir adelante, para lograr hacer realidad mis sueños y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad junto a mi pequeña gran familia.

A mi madre, María Cárdenas Holguín, por su apoyo incondicional, por sus consejos, por los valores que me ha inculcado y sobre todo por ser un gran ejemplo de vida a seguir.

A mis hijos, Marycielo y Alex quienes desde que los tuve en mi vientre le dieron sentido a mi vida. Gracias a ellos por su paciencia, comprensión y solidaridad con éste trabajo, por el tiempo que me han concedido, un tiempo robado a nuestra historia familiar.

Finalmente, quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Vladimir Rosas Meneses por su orientación y atención a mis consultas, por el material facilitado y las sugerencias recibidas en momentos de duda.

RESUMEN

En este trabajo demostramos el siguiente resultado: Sea M una variedad compacta sin puntos conjugados. Entonces el flujo geodésico es expansivo si y solamente si el recubrimiento universal $\hat{M}$ de M satisface la condición de unicidad.

Palabras clave: Variedades, geodésicas, puntos conjugados, expansividad, condición de unicidad.

ABSTRAC

In this thesis we demonstrate the following result: Let M be a compact manifold without conjugated points. Then the geodetic flow is expansive if and only if the universal covering $\hat{M}$ of M satisfies the uniqueness condition.

Key words: Manifolds, geodesics, conjugate points, expansivity, uniqueness condition.

Índice general

Introducción

Estudiar la dinámica del flujo geodésico de una variedad riemanniana usando propiedades geométricas del comportamiento de las geodésicas en el recubrimiento universal de la variedad con la métrica inducida, resulta sumamente atractivo, Ruggiero nos proporciona varios trabajos al respecto, ver [8], [9] o [10], entre otros.
Recordemos que el flujo geodésico de una variedad es una familia de difeomorfismos φ_t, del fibrado tangente en si mismo, asociados a un parámetro real de modo que si $\theta = (p, v)$ es un punto del fibrado tangente, entonces $\varphi_t(\theta) = (\gamma_v(t), \gamma'_v(t))$, donde γ_v es la única geodésica de modo que $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma'_v(0) = v$. Para mayores detalles ver Do Carmo [6].

Por otro lado, si M es una variedad riemanniana, $\hat{M}$ su recubrimiento universal y φ_t su flujo geodésico, decimos que φ_t es expansivo si existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que para cada $v \in T\hat{M}$, se tiene la siguiente propiedad: Si para $w \in T\hat{M}$ existe una aplicación continua sobreyectiva $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $\rho(0) = 0$ tal que

$$d(\varphi_t(v), \varphi_{\rho(t)}(w)) \leq \varepsilon$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}$ de modo que $\varphi_{t_0}(v) = w$, donde d es la distancia de Hausdorff.
Los flujos geodésicos expansivos son una generalización de flujos geodésicos de tipo Anosov que son flujos en donde el espacio tangente al fibrado tangente de la variedad admiten en todo punto, una descomposición en subespacios llamados de estable, inestable y central, para mayores detalles al respecto ver Anosov [1]
Un ejemplo de tales flujos son en variedades de curvatura seccional negativa, como es conocido, el flujo geodésico es Anosov y por ende es expansivo, caso contrario existirian dos órbitas cuya distancia de Hausdorff es acotada y por ende existirían dos geodésicas diferentes en el recubrimiento universal cuya distancia es acotada, luego por el teorema

de la faja plana (ver [4] para mayores detalles) estas delimitarían una faja plana, luego en esta ´´ifaja, las geodésicas son rectas, esto implicara que el flujo geodésico no podria ser tipo Anosov.

Es importante indicar que la no existencia de puntos conjugados, implica que el recubrimiento universal de la variedad de dimensión n es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, lo que permite tener importantes propiedades geométricas en relación a geodésicas, para mayores detalles ver Do Carmo [6]

En este trabajo se estudia la expansividad del flujo geodésico en una variedad sin puntos conjugados en relación a la distancia entre geodésicas del recubrimiento universal de variedad con la métrica inducida, se prueba que con las condiciones dadas, el flujo geodésico es expansivo si y solo si en el recubrimiento universal no existen geodésicas bi-asintóticas, esto es, no existen geodésicas cuya distancia de Hausdorff sea acotada, esta condición es llamada como *la condición de unicidad.*

En otras palabras demostramos el siguiente teorema dado por Ruggiero [10] en su artículo *Expansive Dynamics and Hyperbolic Geometry.*

Teorema

Sea M una variedad compacta sin puntos conjugados. Entonces el flujo geodésico es expansivo si y solamente si el recubrimiento universal $\hat{M}$ de M, con la métrica inducida,satisface la condición de unicidad.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Variedades Diferenciales

En este capítulo damos conceptos básicos sobre Geometría riemanniana como son la métrica riemanniana y la conexión riemanniana, este último concepto no es nada mas que una forma de derivar en relación con la métrica.
En lo que va de este trabajo M denotará una variedad diferenciable n dimensional.
Recuerde que M es una variedad diferenciable si es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable con una familia de homeomorfismos (llamado atlas) $X_\lambda : U_\lambda \subset \mathbb{R}^n \to V_\lambda \subset M$, con $\lambda \in I$, de modo que:

1. La familia $\{V_\lambda; \lambda \in I\}$ es un cubrimiento de M
2. Para cualesquiera α y $\lambda \in I$ con $V_\alpha \cap V_\lambda \neq \phi$, el cambio de coordenadas $X_\lambda \circ X_\alpha^{-1}$ es diferenciable
3. El atlas $\{(U_\alpha, X_\alpha), \lambda \in I\}$ es máximo en relación a las condiciones anteriores.

Las aplicaciones $X_\lambda : U_\lambda \subset \mathbb{R}^n \to V_\lambda \subset M$ son llamadas parametrizaciones.

Dados $p \in M$ y $X : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ una parametrización de p, T_pM denotará el espacio tangente a M en p y $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ la base de T_pM asociada a la parametrización X, donde, $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = dX_q \overrightarrow{e_i}$, con $X(q) = p$

Recuerde que un campo de vectores Y de M es una función que asocia a cada punto de p de M un vector tangente $Y(p)$ de T_pM. El campo de vectores Y es diferenciable si respecto a cualquier parametrización sus coordenadas locales son funciones diferenciables. Por otro lado, un campo de vectores diferenciables Y puede ser visto como una función que asocia a cada función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ otra función diferenciable $Yf : M \to \mathbb{R}$ definida por

$$Yf(p) = df_pY(p)$$

Lo que motiva la siguiente proposición:

***Proposición* 1.1.1** *Sean X, Y dos campos diferenciables de vectores de una variedad diferenciable M. Entonces existe un único campo de vectores $[X, Y]$ de modo que para cualquier función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$, $[X, Y]f = XYf - YXf$*

El campo $[X, Y]$ es llamado de *corchete*. Para mayores detalles ver [7]

1.1.1. El Fibrado tangente

El fibrado tangente de M se define como

$$TM = \{(p, v); \quad p \in M, \quad v \in T_pM\}$$

Es fácil probar que el fibrado tangente es una variedad diferenciable de dimensión $2n$. En efecto, sea $\pi : TM \to M$ la proyección natural, esto es $\pi(p, v) = p$ y $X : U \subset \mathbb{R}^n \to V \in M$ una parametrización de M, entonces $\overline{X} : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(V)$ dada por $\overline{X}(q, u) = (X(q), dX_qu)$, es una parametrización de TM cuyo cambio de coordenadas está dado por

$$\overline{Y}^{\,-1} \circ \overline{X}(q, u) = (Y^{-1} \circ X(q, u), d(Y^{-1} \circ X)_qu)$$

1.2. Métrica riemanniana

En esta sección estudiaremos métricas riemannianas sobre variedades diferenciables.

***Definición* 1.2.1** *Una Métrica Riemanniana en una variedad diferenciable M^n es una regla de correspondencia diferenciable que asocia a cada punto $p \in M$ un producto interno $\langle , \rangle_p$ en el espacio tangente T_pM*

Decir que la correspondencia es diferenciable, quiere decir que si para cualesquiera parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ y $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(q), \dots \frac{\partial}{\partial x_n}(q)\}$ la base asociada a la parametrización X con $q = X(x_1, \dots x_n)$, entonces las funciones $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ definidas por

$$g_{ij}(x_1, \dots x_n) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q$$

son funciones diferenciables en U.

Una variedad diferenciable con una métrica riemanniana es llamada de variedad riemanniana.

A continuación damos dos ejemplos de variedades riemannianas

***Ejemplo* 1.2.1** *El espacio hiperbólico*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_n > 0\}$$

con la métrica hiperbólica definida por: Si $p = (x_1, \dots x_n)$ *y* v, w *son dos vectores tangentes al espacio hiperbólico en* p *entonces* $\langle v, w \rangle_p = \frac{1}{x_n^2} v.w$

***Ejemplo* 1.2.2** *El espacio proyectivo real* $P^n(\mathbb{R})$

La aplicación antípoda

$$A : S^n \to S^n$$

es una isometría. Si denotamos por $\pi : S^n \to P^n(\mathbb{R})$ la proyección, esto es, $\pi(p) = [p]$, donde $[p] = \{p, -p\}$ es la clase de equivalencia de p, entonces es fácil probar que π es una submersión por lo que si v, $w \in T_{[p]}P^n(\mathbb{R})$ entonces existen vectores v_1, $w_1 \in T_p S^n$ tales que $d\pi_p v_1 = v$ y $d\pi_p w_1 = w$. Luego se define la métrica

$$\langle v, w \rangle_{[p]} = \langle v_1, w_1 \rangle_p$$

Afirmación: La métrica está bien definida

En efecto: Como $[p] = \{p, -p\}$, entonces existen v_2, $w_2 \in T_{-p}S^n$ tales que $d\pi_{-p} v_2 = v$ y $d\pi_{-p} w_2 = w$. Como $A(p) = -p$ y $\pi \circ A = \pi$, luego usando el hecho que A es una isometría, se prueba que

$$dA_p v_1 = v_2 \quad dA_q w_1 = w_2$$

Por lo tanto,

$$\langle v, w\rangle_{[p]} = \langle v_2, w_2\rangle_{-p} = \langle dAv_1, dAw_1\rangle_{A(p)} = \langle v_1, w_1\rangle_p$$

Terminamos esta sección enunciando un teorema cuya demostración puede ser encontrada en [7]

***Teorema* 1.2.1** *Una variedad diferenciable M tiene una métrica riemanniana*

En el fibrado tangente de una variedad riemanniana, existe una subvariedad muy importante a nuestros propósitos como es el ***Fibrado Unitario*** denotado por T_1M y definido por

$$T_1M = \{(p, v) \in TM; \quad \|v\| = 1\}$$

Para probar que es una subvariedad del fibrado tangente, es solo observar que la función $f : TM \to \mathbb{R}$ dada por $f(p, v) = \|v\|^2$ es una función diferenciable que tiene a 1 como un valor regular y como $T_1M = f^{-1}(1)$, esto implica que el fibrado unitario es una subvariedad diferenciable de TM de dimensión $2(n-1)$

1.2.1. Espacios de recubrimientos

Para terminar esta seción, damos la definición de recubrimiento universal.
Sean $\widehat{M}$ y M dos variedades diferenciables, una aplicación $\pi : \widehat{M} \to M$ es una *aplicación de recubrimiento* si para todo punto $p \in M$, existe un abierto V de M (llamado de vecindad distinguida) tal que

$$\pi^{-1}(V) = \cup_\alpha U_\alpha$$

donde los abiertos U_α son disjuntos dos a dos, de modo que $\pi : U_\alpha \to V$ es un homeomorfismo.
Un recubrimiento $\pi : \widehat{M} \to M$, es llamado de *recubrimiento universal* si $\widehat{M}$ es un espacio simplemente conexo.

***Teorema* 1.2.2** *Toda variedad diferenciable M conexa, admite un recubrimiento universal $\pi : \widehat{M} \to M$*

Para mayores detalles sobre la teoria de recubrimientos ver Lima[5]

Por otro lado, si M es una variedad riemanniana y $\pi : \widehat{M} \to M$ un recubrimiento universal de M, podemos introducir una métrica en $\widehat{M}$ en función de la métrica de M, llamada de métrica inducida.
En efecto: Sean $p \in \widehat{M}$ y v, $w \in T_p\widehat{M}$ dos vectores tangentes, entonces la métrica $\leqslant, \geqslant$ en $\widehat{M}$ se define como

$$\leqslant v, w \geqslant_p = \langle d\pi_p v, d\pi_p w \rangle_{\pi(p)}$$

En la siguiente sección definimos la conexión riemanniana de una variedad riemanniana que no es nada mas que una especie de derivada que satisface propiedades en función de la métrica riemanniana.

1.3. Conexión riemanniana.

Denotemos por $\chi(M)$ y por $D(M)$ a los conjuntos de los campos diferenciables de M y de las funciones diferenciables de M respectivamente.

***Definición* 1.3.1** *Una conexión afin ∇ en una variedad diferenciable M es una aplicación que asigna a cada dos campos de vectores diferenciables de M un campo de vectores diferenciables, esto es,*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$$

y que cumple las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

donde X, Y, $Z \in \chi(M)$ y f, $g \in D(M)$

Por otro lado si $c : I \longrightarrow M$ es una curva diferenciable y V es un campo a lo largo de c, entonces se puede probar que existe una correspondencia que asocia a V otro campo vectorial denotado por $\frac{DV}{\partial t}$ llamado de *Derivada Covariante* de V a lo largo de c y que además cumple lo siguiente:

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{D}{dt}V + \frac{D}{dt}W$

2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{D}{dt}V$

3. Si $V = X(c(t))$ donde $X \in \chi M$, entonces

$$\frac{D}{dt}V = \nabla_{\frac{dc}{dt}}(X)$$

Para una demostración de esta afirmación ver [7]

Si X, $Y \in \chi(\mathbb{R}^n)$, entonces una conexión afin de $\mathbb{R}^n$ es dada por

$$\overline{\nabla}_X Y(p) = dY_p[X(p)]$$

Sean S es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$, $X, Y \in \chi(S)$ y $\overline{X}, \overline{Y}$ sus extensiones a $\mathbb{R}^3$, entonces la conexión ∇ de S definida por

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T$$

Donde $(\overline{\nabla}_X Y)^T$ denota la parte tangente de $\overline{\nabla}_X Y$ con respecto a S.
Respecto a esta conexión, no es difícil probar que la derivada covariante de un campo de vectores a lo largo de una curva diferenciable de S, es la proyección ortogonal de la derivada usual del campo sobre el plano tangente a S, esta afirmación será demostrada posteriormente.

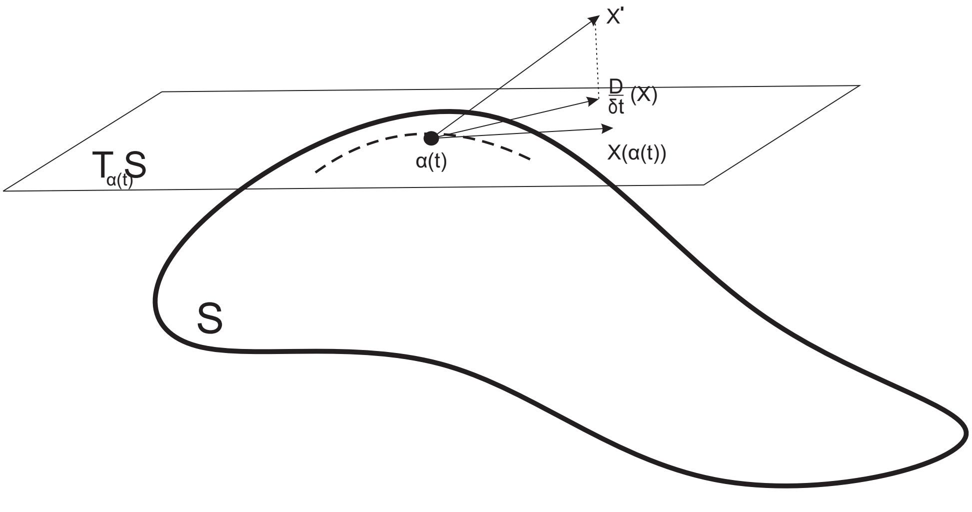

Figura 1.1: Derivada covariante en superficies

Por otro lado, si consideramos $X : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ una parametrización de $p \in M$ con coordenadas locales $(x_1, \ldots x_n)$ y por simplicidad denotemos $\frac{\partial}{\partial x_i}(q)$ por $\partial_i(q)$ o por simplemente ∂_i cuando no haya peligro de confusión, entonces podemos expresar $\nabla_{\partial_i}\partial_j$ en términos de la base asociada $\{\partial_k : k : 1, \ldots n\}$, esto es,

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

entonces si Z y Y son dos campos de vectores diferenciables con

$$Z = \sum_{i=1}^{n} z_i \partial_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} y_j \partial_j$$

usando las propiedades de la conexión afin ∇, se tiene que

$$\nabla_Z Y = \sum_k (\sum_{ij} z_i y_j \Gamma_{ij}^k + Z(y_k))\partial_k \tag{1.1}$$

Las funciones Γ_{ij}^k son llamados de *Símbolos de Christoffel* respecto a la parametrización X

La ecuación dada nos permite dar ejemplos de conexiones afines. En efecto, es suficiente considerar ejemplos de funciones definidas en una vecindad coordenada como símbolos de Christoffel en variedades diferenciables.

En un espacio euclideano los campos constantes se caracterizan obviamente por tener la derivada nula, y siendo la derivada covariante la que realiza la función de derivada en una variedad riemanniana, la definición de campos paralelos a lo largo de una curva surge naturalmente.

***Definición* 1.3.2** *Sea ∇ una conexión afin de M. Decimos que un campo vectorial V a lo largo de una curva $\alpha : I \to M$ es un campo paralelo si $\frac{D}{dt}V(t) = 0$ para todo $t \in I$.*

Con las notaciones de la definición, si $V_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$, entonces no es difícil probar que existe un único campo paralelo V a lo largo de α de modo que $V(t_0) = V_0$. Para una demostración de esta afirmación, se considera un sistema de coordenadas de p y se usa el hecho que $\frac{D}{dt}V(t) = 0$ para todo $t \in I$ para obtener un sistema de n ecuaciones diferenciables.

***Definición* 1.3.3** *Sea M una variedad riemanniana. Decimos que una conexión afin ∇ es compatible con la métrica si*

$$\frac{d}{dt}\langle V,W\rangle = \langle \frac{D}{\delta t}V(t),W\rangle + \langle V,\frac{D}{\delta t}W(t)\rangle, \quad t\in I$$

Un resultado que se deriva fácilmente de esta definición es el siguiente:

***Teorema* 1.3.1** *Una conexión ∇ es compatible con la métrica si y solo si*

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle, \quad X,Y,Z\in \chi(M)$$

Un resultado equivalente a este es el siguiente:

***Teorema* 1.3.2** *Una conexión ∇ es compatible con la métrica si y solo si para cualesquiera par de campos paralelos P y P' a lo largo de una curva diferenciable cualquiera c se tiene que $\langle P(c(t)),P'(c(t))\rangle_{c(t)} = constante$.*

Demostración

La necesidad es trivial.

Para la suficiencia. Considera una base ortonormal $\{p_1,\dots p_n)\}$ de $T_{c(t_0)}M$ con $t_0\in I$. Por la observación de campos paralelos, sea P_i con $i=1,\dots n$ el único campo paralelo a lo largo de $c(t)$ tal que $P_i(t_0)=p_i$. Por hipótesis $\{P_1(t),\dots P_n(t)\}$ es una base ortonormal de $T_{c(t)}M$.

Ahora si denotamos por $V=\sum_i v_iP_i$ y por $W=\sum_i w_iP_i$, entonces $\langle V,W\rangle = \sum_i v_i.w_i$.

Luego:

$$\langle \frac{DV}{dt},W\rangle + \langle V,\frac{DV}{dt}\rangle = \sum_i[\frac{dv_i}{dt}w_i + v_i\frac{dw_i}{dt}] = \frac{d}{dt}[\sum_i v_i.w_i]$$

Lo que implica que:

$$\langle \frac{DV}{dt},W\rangle + \langle V,\frac{DV}{dt}\rangle = \frac{d}{dt}\langle V,W\rangle \quad \blacksquare$$

Para que una conexión afin tenga un comportamiento similar a la derivada real, es necesario introducir el concepto de conexión simétrica.

***Definición* 1.3.4** *Decimos que una conexión ∇ en M es simétrica con la métrica si $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ para todo X, $Y\in\chi(M)$*

Para una mejor comprensión de conexión simétrica, consideremos un sistema de coordenadas locales $X : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ y entonces $\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i = [\partial_i, \partial_j] = 0$.
Por lo que:

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$$

Recuerde que $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dX_q e_i$

La demostración del siguiente resultado puede ser encontrada en Do Carmo [7]

***Teorema* 1.3.3** *(Levi-Cevita.) Sea M una variedad riemanniana. Entonces existe una única conexión riemanniana ∇ en M, esto es, simétrica y compatible con la métrica.*

Observación

Sean $\widetilde{M}$ una variedad riemanniana de dimensión $n+k$ y M una subvariedad diferenciable de $\widetilde{M}$ de dimensión n. A través de la inclusión $i : M \to \widetilde{M}$ inducimos una métrica riemanniana sobre M llamada de métrica inducida.
Esto quiere decir que:

$$T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus [T_pM]^{\perp}$$

donde $[T_pM]^{\perp}$ es el complemento ortogonal de T_pM en $T_p\widetilde{M}$.

Sea $\overline{\nabla}$ la conexión riemanniana de $\widetilde{M}$. Si X, Y son campos locales de vectores de M y $\overline{X}$, $\overline{Y}$ sus extensiones locales a $\widetilde{M}$ respectivamente, entonces denotemos por $[\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}]^T$ la parte tangente de $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ a M.
Luego es fácil probar que la conexión riemanniana ∇ de M es:

$$\nabla_X Y = [\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}]^T \quad \blacksquare$$

Si nuevamente consideramos a S como una superficie regular de $\mathbb{R}^3$ y X, Y son campos de vectores diferenciables de S con $\overline{X}$, $\overline{Y}$ sus extensiones a $\mathbb{R}^3$.
Entonces:

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \nabla_X Y + [\nabla_X Y]^{\perp}$$

donde $[\nabla_X Y]^{\perp}$ es la componente ortogonal de $\nabla_X Y$ y teniendo en cuenta que,

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(p) = d\overline{Y}_p[\overline{X}(p)]$$

concluimos entonces que $\nabla_X Y(p)$ es la proyección ortogonal de $d\overline{Y}_p[\overline{X}(p)]$ sobre T_pS

Para terminar con este capítulo exhibiremos una fórmula sobre los símbolos de Christoffel.

En un sistema de coordenadas de una variedad riemanniana M, los símbolos de Christoffel se relacionan por la siguiente ecuación:

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

por un cálculo se obtiene que

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}]$$

Si (g^{km}) denota la matriz inversa de (g_{km}), luego obtenemos que:

$$\Gamma_{ij}^m = \sum_k [\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}] g^{km} \tag{1.2}$$

Como una aplicación de esta fórmula determinaremos los símbolos de Christoffel del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3$.

Si tomamos como coordenadas locales a la identidad, entonces en el punto $p = (x, y, z)$ de $\mathbb{H}^3$, usando la fórmula anterior obtenemos que:

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = 0 \quad \Gamma_{11}^3 = \frac{1}{z}$$

$$\Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^3 = 0$$

$$\Gamma_{13}^1 = -\frac{1}{z}, \quad \Gamma_{13}^2 = 0, \quad \Gamma_{13}^3 = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^3 = \frac{1}{z}$$

$$\Gamma_{23}^1 = 0, \quad \Gamma_{23}^2 = -\frac{1}{z}, \quad \Gamma_{23}^3 = 0$$

$$\Gamma_{33}^1 = 0, \quad \Gamma_{33}^2 = 0, \quad \Gamma_{33}^3 = \frac{1}{z}$$

De la ecuación 1.1, obtenemos que:

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = (0, 0, \frac{1}{z})$$
$$\nabla_{\partial_1}\partial_2 = (0, 0, 0)$$
$$\nabla_{\partial_1}\partial_3 = (-\frac{1}{z}, 0, 0)$$
$$\nabla_{\partial_2}\partial_2 = (0, 0, \frac{1}{z})$$
$$\nabla_{\partial_2}\partial_3 = (0, -\frac{1}{z}, 0)$$
$$\nabla_{\partial_3}\partial_3 = (0, 0, \frac{1}{z})$$

Y entonces, si X y Y son campos diferenciables de $\mathbb{H}^3$, de la últimas ecuaciones, usando las propiedades de conexión, podemos determinar explícitamente $\nabla_X Y$ ■

Generalizando, consideremos el espacio hiperbólico de dimensión n, denotado por $\mathbb{H}^n$ cuya métrica es dada por:

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2}$$

donde $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n$.

Si además definimos la función f de modo que:

$$\log F = f$$

entonces usando la fórmula de los símbolos de Christoffel, por un cálculo obtenemos que:

$$\Gamma_{ij}^k = -\delta_{jk} f_i - \delta_{ki} f_j + \delta_{ik} f_k$$

Luego podemos concluir lo siguiente:

1. $\Gamma_{ij}^k = 0$ si los tres índices i, j y k son diferentes.

2. $\Gamma_{ij}^i = -f_j$ si por lo menos dos de los índices son iguales.

3. $\Gamma_{ii}^j = f_j$ si por lo menos dos de los índices son iguales.

4. $\Gamma_{ij}^{j} = -f_i$ si por lo menos dos de los índices son iguales.

5. $\Gamma_{ii}^{i} = -f_i$ si por lo menos dos de los índices son iguales.

Este cálculo permite conocer explicitamente la conexión riemanniana del espacio hiperbólico.

Para mayores detalles sobre el espacio hiperbólico ver Spivak [11]

Capítulo 2

Geodésicas.

2.1. Campo geodésico: Flujo geodésico

En esta sección definimos el concepto de geodésicas de una variedad riemanniana que son curvas que minimizan distancia localmente, esto es para puntos muy cercanos de esta curva, la distancia entre ellos está dada por la longitud del segmento de la curva comprendido entre ellos.
En el caso de superficies regulares de $\mathbb{R}^3$, las geodésicas son curvas regulares de modo que su segunda derivada es perpendicular al plano tangente de la superficie, en tal sentido , por ejemplo, las geodésicas de una esfera son sus círculos máximos. Una buena exposición sobre geodésicas en superficies regulares puede ser encontrada en Do Carmo [6]

***Definición* 2.1.1** *Una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to M$ es una geodésica en $t_0 \in [a, b]$ si $\frac{D}{\partial t}\frac{d\gamma}{\partial t} = 0$. Si γ es una geodésica para todo $t \in [a, b]$, entonces decimos que γ es una geodésica.*

Si $\gamma : [a, b] \to M$ es una geodésica, entonces:

$$\frac{d}{\partial t}\langle \frac{d\gamma}{\partial t}, \frac{d\gamma}{\partial t}\rangle = 2\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\gamma}{\partial t}, \frac{d\gamma}{\partial t}\rangle = 0$$

Por lo que $|\gamma'(t)| = cte$ para todo $t \in [a, b]$, lo que implica que el parámetro de una geodésica es proporcional a la longitud de arco. Cuando esta constante es igual a 1 decimos que la geodésica está parametizada por longitud de arco (o está normalizada).

Expresaremos ahora una geodésica en coordenadas locales.

Si $X : U \to M$, es un sistema de coordenadas y $\gamma : [a,b] \to$ una curva parametrizada, que sin pérdida de generalidad supondremos que $\gamma([a,b]) \subset X(U)$
Entonces,

$$\gamma(t) = X(x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

Luego γ es una geodésica si y solo si

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{D}{\partial t}\frac{d\gamma}{\partial t} \\
&= \frac{D}{\partial t}(\sum_{k=1}^{n}\frac{dx_k}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{d^2x_k}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{dx_k}{\partial t}\nabla_{\gamma'(t)}\frac{\partial}{\partial x_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(\frac{d^2x_k}{\partial t^2} + \sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{i,j}^{k}\frac{dx_i}{\partial t}\frac{dx_j}{\partial t})\frac{\partial}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{i,j}^{1}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} &= 0 \\
\frac{d^2x_2}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{i,j}^{2}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{d^2x_n}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{i,j}^{n}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Por la teoría de las ecuaciones diferenciables, este sistema tiene solución única con condiciones iniciales $(x_1(0), \ldots x_n(0)$ y $(x_1'(0), \ldots x_n'(0))$

Teorema 2.1.1 *Sean M una variedad riemanniana $p \in M$ y $v \in T_pM$. Entonces existe una única geodésica $\gamma : I \to M$ de modo que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$*

Demostración

En efecto: Sea $X : U \in \mathbb{R}^2 \to M$ una parametrización de p.

Entonces p y v se expresan en coordenadas como $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ y $(v_1^0, \ldots, x_v^0)$ respectivamente, esto es

$$p = X(x_1^0, \ldots, x_n^0), \quad v = dX_{(x_1^0, \ldots, x_n^0)}(v_1^0, \ldots, x_v^0)$$

El sistema 2.1 tiene única solución $(x_1(t), \ldots x_n(t))$ con condiciones iniciales

$$(x_1(0), \ldots x_n(0)) = (x_1^0, \ldots, x_n^0), \quad (x_1'(0), \ldots x_n'(0)) = (v_1^0, \ldots, x_v^0)$$

Luego, es suficiente definir $\gamma(t) = X((x_1(t), \ldots x_n(t)))$■

En el caso de superficies regulares, una forma de determinar geodésicas es intersectando la superficie con planos perpendiculares a este. Por ejemplo, en un cilindro recto, al intersectar con planos perpendiculares a este, se obtienen círculos o rectas generatrices, que son geodésicas del cilindro recto.

Por otro lado, en el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$, con respecto la parametrización identidad, en el punto (x, y), por un cálculo directo, sus símbolos de Christoffel son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 &= 0 \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{y} \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 &= -\frac{1}{y} \end{aligned}$$

y por consiguiente,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_1}\partial_1 &= \frac{1}{y}\partial_2 \\ \nabla_{\partial_1}\partial_2 &= -\frac{1}{y}\partial_1 \\ \nabla_{\partial_2}\partial_2 &= -\frac{1}{y}\partial_2 \end{aligned}$$

Recuerde que $\partial_1 = \frac{1}{\partial x}$ y que $\partial_2 = \frac{1}{\partial y}$.

Como la parametrización es la identidad, entonces $\partial_1 = \overrightarrow{e_1}$ y $\partial_2 = \overrightarrow{e_2}$, esto implica que una curva diferenciable de $\mathbb{H}^2$ parametrizada por longitud de arco (respecto a la métrica hiperbólica) $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es una geodésica si y solo si

$$0 = \frac{D\gamma'}{dt} = x''\partial_1 + y''\partial_2 + \frac{(x')^2}{y}\partial_2 - \frac{2x'y'}{y}\partial_1 - \frac{(y')^2}{y}\partial_2,$$

teniendo en cuenta que $\partial_1 = (1,0)$, $\partial_2 = (1,0)$, entonces tenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x'' - \frac{2x'y'}{y} &= 0 \\ y'' + \frac{(x')^2}{y} - \frac{(y')^2}{y} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Si $x' \neq 0$, la primera ecuación del sistema es equivalente a:

$$\frac{x''}{x'} = 2\frac{y'}{y}$$

lo que implica que:

$$x' = y^2 k$$

donde k es una constante. Como $|\alpha'(t)|_{\alpha(t)} = 1$, esto es $\frac{(x')^2}{y^2} + \frac{(y')^2}{y^2} = 1$, entonces remplazando el valor de x' en la última ecuación, obtenemos

$$y' = y\sqrt{1 - k^2y^2}.$$

Luego:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y\sqrt{1-k^2y^2}}{y^2k} = \frac{\sqrt{1-k^2y^2}}{yk}$$

por lo que:

$$\frac{kyy'}{\sqrt{1-k^2y^2}} = x'$$

integrando

$$\int dx = \int \frac{ky}{\sqrt{1-k^2y^2}}dy.$$

Entonces:

$$(x-a) = -\frac{1}{k}\sqrt{1-k^2y^2}$$

Lo que es equivalente a

$$(x-a)^2 + y^2 = \frac{1}{k^2}$$

Como $y > 0$, se sigue que γ es un semicírculo ortogonal al eje $\overrightarrow{x}$

Por otro lado si $x' = 0$, esto es, $x = b$, con b constante, entonces γ es una semi recta ortogonal al eje $\overrightarrow{x}$. Podemos parametrizar esta semirecta como $\gamma(t) = (b, e^t)$, por que γ satisface el sistema en mención.

Por lo tanto las únicas geodésicas de $\mathbb{H}^2$ son o semicírculos ortogonales al eje $\overrightarrow{x}$ o semirectas ortogonales al eje $\overrightarrow{x}$ ∎

Otra forma de determinar geodésicas de $\mathbb{H}^2$ es comprobando que el semi eje positivo $\overrightarrow{y}^+$ parametrizado por $\gamma(t) = (0, e^t)$ con $t > 0$ es una geodésica. Se puede probar fácilmente que las isometrías llevan geodésicas en geodésicas (éstas están en función de los simbólos de Christoffel que son preservados por isometrías) y como las isometrías de $\mathbb{H}^2$ son transformaciones de Mobiüs, entonces la geodésica en mención es llevada en semi rectas ortogonales o semi círculos ortogonales al eje real.

Resulta también apropiado, estudiar geodésicas por variaciones de energía, esto es, si $\alpha : [0, a] \to M$ es una curva diferenciable, se dice que

$$h : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$$

es una variación propia de α si

1. $h(s, 0) = \alpha(s)$ para todo $t \in [0, a]$
2. $h(0, t) = \alpha(0)$ y $h(a, t) = \alpha(a)$

Si h solo satisface la condición 1, simplemente se dice variación de α.

Decimos que el campo variacional V a lo largo de α es dado por:

$$V(s) = \frac{\partial}{\partial s} h(s, 0)$$

Reciprocamente: Si tenemos un campo diferenciable $V(t)$ a lo largo de una curva $\alpha : [0, a] \to M$, entonces existe una variación $h : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$ de α (propia si $V(0) = 0$ y $V(a) = 0$) de modo que V es su campo variacional.

Por otro lado, si tenemos en cuenta que, geodésicas minimizan distancia, esto es, la distancia entre dos puntos de una geodésica es la longitud de esta comprendida en dichos puntos (por lo menos localmente) entonces, para toda variación propia h de la geodésica α, se tendría que las longitudes de las curvas $s \to h(s, t)$, con t fijo, son mayores o iguales que la longitud de α, esto implica, que si definimos un funcional de longitud, éste evaluado en 0 tendría derivada 0, en otras palabras: Si $\alpha : [0, a] \to M$ es una curva regular,

$h : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$ y V su campo variacional, entonces definimos $L : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$L(t) = \int_0^a \| \frac{\partial}{\partial s} h(s, t) \| ds$$

note $L(t)$ es la longitud de la curva $s \to h(s, t)$. Luego, si asumimos que la curva está parametrizada por longitud de arco, por un cálculo, obtenemos que:

$$L'(0) = -\int_0^a \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial s}, V(s) \rangle ds$$

Y entonces es posible probar que α es una geodésica si y solo si para toda variación propia de α se tiene que

$$L'(0) = 0$$

Análogamente podemos estudiar geodésicas por el funcional energía E, esto es,

$$E(t) = \int_0^a \| \frac{\partial}{\partial s} h(s, t) \|^2 ds$$

***Proposición* 2.1.1** *Una curva regular $\alpha : [0, a] \to M$ es una geodésica si y solo si para toda variación propia de h de α se tiene que:*

$$E'(0) = 0$$

De esta proposición podemos definir una geodésica como puntos críticos del funcional energía para toda variación propia, en tal sentido, podemos decir que geodésicas son soluciones de un cálculo variacional.

Finalmente, para terminar esta parte, resulta claro que se puede generalizar lo exhibido anteriormente suponiendo que la curva α es diferenciable por partes, lo que implica tener una variación diferenciable por partes y campo variacional diferenciable por partes. Luego, tendríamos también fórmulas similares a las dadas.
Para una buena exposición a la teoría dada, ver Spivak[11]

2.2. El Campo Geodésico: La función exponencial

Si $v \in T_pM$, es conveniente denotar por γ_v como la única geodésica de modo que $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma_v'(0) = v$

A continuación, consideraremos el *fibrado tangente* de M que denotaremos por TM.

Una curva diferenciable $t \to \gamma(t)$ determina una curva $t \to (\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt})$ en TM.
Y entonces, del sistema de ecuaciones 2.1 tenemos que $\gamma(t) = X(x_1, \ldots x_n)$ es una geodésica si y solo si

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_k}{dt} = v_k \\ &\frac{dv_k}{dt} = -\sum_{i,j=1}^{k} \Gamma_{i,j}^{n} v_i v_j \quad k = 1, \ldots, n \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Usando este sistema de ecuaciones, podemos definir localmente un campo G de TM denominado campo geodésico de M, esto es,

$$G(p,v) = \frac{d}{dt}(\gamma_v(t), \gamma_v'(t))_{|t=0}$$

***Teorema* 2.2.1** *Existe un único campo G en TM cuyas trayectorias son de la forma $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$, donde $\gamma(t)$ es una geodésica*

Demostración.
Supongamos que el campo G existe, consideremos un sistema de coordenadas locales $X : U \to M$ de M.
Las trayectorias de G son de la forma $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$ donde γ es una geodésica, luego satisface el sistema 2.1 y como este sistema tiene solución única con condiciones iniciales, concluimos que si este campo existe entonces es único.

Para probar la existencia del campo, definimos el campo como en la observación dada antes del teorema y cubrimos TM por vecindades coordenadas y usamos la unicidad del campo en cada vecindad coordenada de TM.
Concluimos que el campo G está bien definido ∎

Por un resultado de ecuaciones diferenciales sobre campos de variedades podemos probar la existencia de un flujo del campo G que es enunciado en el siguiente teorema:

***Teorema* 2.2.2** *Sean $p \in M$ y $X : U \to M$ un sistema de coordenadas de p. Entonces* *existe un abierto* $\mathbf{U}$ *de* TM *con* $(p,0) \in \mathbf{U}$*,* $\delta > 0$*, y una aplicación diferenciable*

$$\varphi : (-\delta, \delta) \times \mathbf{U} \to TM$$

de modo que $\varphi(t,q,v)$ *es la única trayectoria de* G *con* $\varphi(0,q,v) = (q,v)$ *para cada* $(q,v) \in \mathbf{U}$
Es posible considerar $\mathbf{U} = \{(q,v) \in TM;\ q \in V \subset U,\ v \in T_pM,\ |v| < \epsilon\} \subset TM$*, donde* $V \subset U$ *es una vecindad de* p

Podemos observar que $\varphi(t,(q,v)) = (\gamma_v(t), \gamma'_v(t))$, donde γ_v es la única geodésica con $\gamma_v(0) = q$ y $\gamma'_v(0) = v$

***Definición* 2.2.1** *El flujo geodésico de* M *es la aplicación*

$$\varphi_t : TM \to TM$$

definido por $\varphi_t(p,v) = (\gamma_v(t), \gamma'_v(t))$ *con* $t \in (-\delta,\delta)$ *para algún* $\delta > 0$

Cuando el flujo geodésico φ_t está definido para todo $t \in \mathbb{R}$, decimos que la variedad M es completa.
Si T_1M es el fibrado unitario de M y teniendo en cuenta que podemos considerar todas las geodésicas parametrizadas por longitud de arco, entonces se puede considerar también

$$\varphi_t : T_1M \to T_1M$$

Por abuso de notación, denotemos por $\gamma(t,p,v)$ como $\gamma_v(t)$, esto es, $\gamma(t,p,v)$ es la geodésica con condiciones iniciales $\gamma(0,p,v) = p$ y $\gamma'(t,p,v) = v$. Entonces observe que si $\pi : TM \to M$ es la proyección natural, entonces

$$\gamma(t,p,v) = (\pi \circ \varphi_t)(p,v)$$

Por lo tanto el teorema anterior puede ser reformulado como sigue:

***Teorema* 2.2.3** *Dado* $p \in M$*, existen abiertos* $V \subset M$ *con* $p \in V$*, números positivos* δ*,* ϵ *y una aplicación* C^∞

$$\gamma : (-\delta,\delta) \times \mathbf{U} \to M$$

tales que la curva $t \to \gamma(t,q,v)$ *es la única geodésica con* $\gamma(0,t,v) = q$ *y* $\gamma'(0,q,v) = v$ *para cada* $q \in V$ *y cada* $v \in T_qM$ *con* $|v| < \epsilon$*.* $\mathbf{U}$ *es dado por el teorema anterior.*

A seguir enunciamos el lema de la homogeneidad de una geodésica.

***Lema* 2.2.1** *Si la geodésica $\gamma(t,q,v)$ está definida en $(-\delta,\delta)$, entonces la geodésica $\gamma(t,q,av)$ con $a>0$, está definida en el intervalo $(-\frac{\delta}{a},\frac{\delta}{a})$ y es tal que*

$$\gamma(t,q,av)=\gamma(at,q,v)$$

Demostración

La demostración es bastante sencilla de probar una vez que $\gamma(t,q,av)$ y $\gamma(at,q,v)$ son geodésicas que pasan por q y son tangentes a av, luego se aplica el teorema de existencia y unicidad de geodésicas$\blacksquare$

Usando los resultados anteriores podemos definir la siguiente aplicación diferenciable la que llamaremos de *aplicación exponencial.*

***Definición* 2.2.2** *Sea $p\in M$ y $\mathbf{U}\subset TM$ dado por el teorema 2.1.3. Entonces la aplicación diferenciable $exp:\mathbf{U}\rightarrow M$ definida por*

$$exp(q,v)=\gamma(1,q,v)=\gamma(|v|,q,\frac{v}{|v|}),\quad (q,v)\in\mathbf{U}$$

es llamada de aplicación exponencial en $\mathbf{U}$

Podemos restringir la función exponencial a un abierto de T_pM que sin pérdida de generalidad podemos suponer que es una bola abierta de centro en el origen y de radio ϵ la que denotaremos por $B_\epsilon(0)$. Esta restricción la denotaremos por exp_p, esto es, $exp_pv=exp(p,v)$.
En otras palabras

$$exp_p:B_\epsilon(0)\subset T_pM\rightarrow M$$

es definida como $exp_p(v)=\gamma(|v|,p,v)$.
Geométricamente $exp_p(v)$ es desplazarse $|v|$ unidades a lo largo de la geodésica $\gamma(t,p,v)$.

Es fácil de probar que existe un abierto $V\subset T_pM$ de 0 de modo que $(exp_p)_{|V}$ es un difeomorfismo de V sobre un abierto U de p en M. En esta situación, llamaremos a U como a una vecindad normal de p.

Para ver esto, es solo observar que $d(exp_p)_0$ es la función identidad de T_pM, luego es solo aplicar el teorema de la función inversa.
Si la bola de centro en el origen y de radio ϵ $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ está contenida en V entonces a $B_\epsilon(p) = exp_p B_\epsilon(0)$ se le denominará la bola normal (o geodésica) de centro en p y de radio ϵ.

Para mayores detalles sobre la función exponencial y sus propiedades ver Do Carmo [7].

A continuación enunciamos el lema de Gauss. La demostración de este importante resultado puede ser encontrado en Do Carmo [7]

***Lema* 2.2.2** *Sean $p \in M$ y $v \in T_pM$ de modo que $exp_p v$ esté definida. Si $w \in T_v(T_pM) \approxeq T_pM$ entonces*

$$\langle d(exp_p)_v v, d(exp_p)_v w \rangle = \langle v, w \rangle$$

geométricamente el lema de Gauss se puede interpretar como sigue:

Sea $v(s)$ una curva de T_pM con $v(0) = v$ y tal que $|v(s)| = |v|$, esto es, la curva $v(s)$ pasa por v y esta en la esfera $S(0,k)$ de centro en 0 de radio $k = |v|$.
Queda claro entonces que $v'(s)$ es tangente a $S(0,k)$ y ortogonal a $v(s)$
Note también que la curvas

$$t \to tv(s) \quad t \in [0,1]$$

son ortogonales a la curva $v(s)$ en $t = 1$
Si denotamos por

$$f(t,s) = exp_p tv(s)$$

vemos que para s_0 fijo, la curvas $t \to f(t, s_0)$ son geodésicas tales que:

$$\frac{\partial f}{\partial s}(1,0) = (dexp_v)_v v'(0) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial t}(1,0) = (dexp_v)_v v$$

Aplicando el lema de Gauss, vemos que:

$$\langle \frac{\partial f}{\partial s}(1,0), \frac{\partial f}{\partial t}(1,0) \rangle = 0$$

Por lo tanto, podemos afirmar que la frontera de $B_\epsilon(p)$, denotada por $S_\epsilon(p)$ y denominada de *esfera normal*, es ortogonal a las geodésicas que salen de p

Finalmente para terminar esta breve exposición de geodésicas, enunciamos y demostramos un importante teorema sobre minimización de geodésicas cuya demostración puede ser encontrada en [7].

Teorema 2.2.4 *Sean $p \in M$, U una vecindad normal de p y $B \subset U$ una bola normal de centro en p. Si $\gamma : [0,1] \to B$ es un segmento de geodésica con $\gamma(0) = p$ y $c : [0,1] \to M$ es cualquier curva diferenciable que une $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$, entonces $long(\gamma) \leq long(c)$. Si la igualdad es válida, entonces $\gamma([0,1]) = c([0,1))$*

Demostración.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c[0,1] \subset B$. Por hipótesis exp_p^{-1} es un difeomorfismo en U, entonces

$$c(t) = exp_p(r(t).v(t))$$

donde $r : (0,1] \to \mathbb{R}$ es una función positiva diferenciable por partes y $v : [0,1] \to T_pM$ es una curva con $|v(t)| = 1$.

Una observación obvia es la siguiente: Si para algún $t_0 \in (0,1)$ se tiene que $c(t_0) = p$, entonces se estudia solo para $c(t)$ con $t \in (t_0, 1]$, por lo que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c(t) \neq p$, $\forall t \in (0,1]$.

Si definimos

$$f(r,t) = exp_p(r, v(t))$$

Entonces tenemos que

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial f(r(t), v(t))}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{2.3}$$

Por el lema de Gauss, $\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = 0$.

Pero las geodésicas están parametrizadas por longitud de arco, entonces $|\frac{\partial f}{\partial r}| = 1$. Y entonces de la ecuación anterior, concluimos que:

$$|\frac{\partial c}{\partial t}|^2 = |r'(t)^2 + |\frac{\partial f}{\partial t}|^2 \geq |r'(t)|^2 \tag{2.4}$$

Integrando, obtenemos que:

$$\int_{\epsilon}^{1} |\frac{\partial c}{\partial t}|dt \geq \int_{\epsilon}^{1} |r'(t)|dt \geq \int_{\epsilon}^{1} r'(t)dt = r(1) - r(\epsilon)$$

Como $r(1)$ es la longitud de γ, en el límite, obtenemos que

$$long(c) \geq long(\gamma)$$

Si las longitudes son iguales, esto es, $long(c) = long(\gamma)$, entonces de la ecuación 2.4 se puede concluir que $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, con lo que $v(t) = constante$.
Se concluye inmediatamente que c es una reparametrización de γ ■

2.3. Curvatura

La noción de curvatura fue introducida por Riemann en un contexto muy geométrico que describimos a seguir:
Sea M una variedad riemanniana, $p \in M$ y S^* un subespacio de dimensión 2 de T_pM. Considere todas las geodésicas que salen de p y que son tangentes a S. El conjunto de segmentos geodésicos de tales geodésicas que se encuentran en una bola normal forman una subvariedad de dimensión dos que denotamos por S, ahora es posible hablar de curvatura de S en p.
Esta fue la curvatura considerada por Riemann y es una generalización de la curvatura Gaussiana para superficies.

***Definición* 2.3.1** *La curvatura R de una variedad riemanniana M es una correspondencia que asocia a cada par de campos de vectores X, $Y \in \chi(M)$ una aplicación*

$$R(X,Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Donde ∇ es la conexión riemanniana de M. En el caso euclideano tenemos que $R(X,Y)Z = 0$ para todo X, Y y $Z \in M$ como era esperado.
Es importante indicar que la curvatura R de una variedad riemanniana es bilineal en $\chi(M) \times \chi(M)$ y como operador curvatura $R(X,Y)$ es lineal.

A continuación daremos un rápido repaso sobre la noción y algunas propiedades importantes de curvatura seccional de una variedad riemanniana.
Si M es una variedad riemanniana y $p \in M$ expresemos la norma del producto vectorial de dos vectores v y $w \in T_pM$ de la siguiente forma:

$$\| v \times w \| = \sqrt{\| v \|^2 . \| w \|^2 - \langle v, w \rangle^2}$$

***Definición* 2.3.2** *Dado un punto $p \in M$ y σ un subespacio bidimensional de T_pM, el número $K(v,w) = K(\sigma)$ donde $\{v,\, w\}$ es una base cualquiera de σ y $K(v,w)$ es definido por:*

$$K(v,w) = \frac{1}{\| v \times w \|^2} \langle R(X,Y)Z, T \rangle$$

es llamado de curvatura seccional de σ en p

La siguiente proposición indica que la curvatura seccional está bien definida.

***Proposición* 2.3.1** *La curvatura seccional está bien definida, esto es, si σ un subespacio bidimensional de T_pM, entonces $K(v,w) = K(z,t)$ para cualesquiera bases $\{v,w\}$ y $\{z,t\}$ de σ*

La curvatura tiene interesantes interpretaciones geométricas, dentro de todas ellas, la más importante radica en el hecho que la determinación de $K(\sigma)$ para todo subespacio vectorial (σ) de dimensión 2 en T_pM, determina completamente la curvatura R. Para mayor información al respecto ver Spivak [11] o Do Carmo [7]

A continuación enunciamos un lema cuya demostración puede ser encontrada en Do Carmo [7].

***Lema* 2.3.1** *Sea M una variedad riemanniana y p un punto de M. Sea*

$$R^* : T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$$

un tensor definido por

$$\langle R^*(X,Y,W), Z\rangle = \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle$$

para todo X, Y, W, $Z \in T_pM$. Entonces M tiene curvatura seccional constante igual a K_0 si y solamente si $R = K_0R^*$, donde R es la curvatura de M.

A continuación indicamos un resultado importante a nuestros objetivos:

***Lema* 2.3.2** *Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ es una superficie parametrizada con coordenadas (x,y) y si $V = V(x,y)$ es un campo vectorial a lo largo de f, entonces se tiene que*

$$\frac{D}{\partial y}\frac{D}{\partial x}V - \frac{D}{\partial x}\frac{D}{\partial y}V = R(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})V$$

Para terminar con esta breve exposición sobre curvatura, debemos indicar que a veces es conveniente expresar el tensor curvatura como combinación lineal de la base asociada a una parametrización para facilitar los cálculos a ser realizados que son expresados en términos de los símbolos de Christoffel.

Por ejemplo la curvatura seccional de $\mathbb{H}^2$ es -1.

En efecto: Con respecto a la parametrización identidad de $\mathbb{H}^2$ recuerde que $\partial_i = \overrightarrow{e_i}$.

Como

$$\langle R(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2\rangle = \langle \nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1} - \nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_2}, \partial_2\rangle$$

y teniendo en cuenta que en el punto $(x, y) \in \mathbb{H}^2$, los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}$$

Por la proposición 2.3.1 la curvatura seccional no depende de la base escogida, entonces la curvatura seccional de $\mathbb{H}^2$ es -1.

De hecho la curvatura seccional de $\mathbb{H}^n$ es -1.

Para una buena exposición sobre estas afirmaciones ver Spivak [11]

2.4. Campos de Jacobi

Los campos de Jacobi son campos a lo largo de una geodésica surgen naturalmente en el estudio de la aplicación exponencial y satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden, entre otras cosas, estos campos sirven para determinar cuanto se apartan dos geodésicas que salen de un mismo punto.

La teoría expuesta en esta sección puede ser encontrada detalladamente en Do Carmo [7]

***Definición* 2.4.1** *Sea M una variedad riemanniana y $\gamma : [a, b] \to M$ una geodésica de M. Un campo de vectores J a lo largo de γ es un campo de Jacobi se satisface la ecuación*

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$$

La ecuación dada es llamada también *Ecuación de Jacobi.*

En términos de un sistema de coordenadas locales, es fácil ver que esta ecuación, localmente, es un sistema lineal de n ecuaciones diferenciales de segundo orden y por tanto existen $2n$ campos de Jacobi linealmente independientes.

Si M es una variedad de curvatura seccional constante igual a -1 y W un campo paralelo unitario a lo largo de una geodésica γ entonces el campo de jacobi J a lo largo de γ con condiciones iniciales $J(0) = 0$ y $J'(0) = W(0)$ es dado por

$$J(t) = \mathbf{senh}(t).W(t)$$

Si la curvatura es constante nula, entonces

$$J(t) = t.W(t)$$

y si la curvatura fuera constante igual a 1, entonces

$$J(t) = \mathbf{sen}(t).W(t)$$

Por otro, lado un campo de Jacobi a lo largo de una geodésica $\gamma : [0, a] \to M$ con condiciones iniciales $J(0) = 0$ y $J'(0)$ se puede expresar en términos de la aplicación exponencial, esto es,

$$J(t) = (dexp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0))$$

donde $\gamma(0) = p$

2.4.1. Puntos conjugados

Si se tienen dos geodésicas que salen de un mismo punto y que se vuelven a encontrar, teniendo en cuenta que campos de Jacobi miden cuanto se apartan dos geodésicas que salen de un mismo punto, entonces se puede intuir que existe un campo de Jacobi que se anula en dos puntos diferentes, a estos puntos se les denomina puntos conjugados y cuya definición damos a seguir.

***Definición* 2.4.2** *Sea $\gamma : [0, a] \to M$ una geodésica. Decimos que $\gamma(t_0)$ es conjugado a $\gamma(0)$ a lo largo de γ si existe un campo de Jacobi J, no nulo, a lo largo de γ de modo que $J(0) = 0$ y $J(t_0) = 0$*

En la esfera euclideana S^n, las geodésicas son los círculos máximos de esta y como la curvatura es constante igual a 1, del ejemplo dado anteriormente, un campo de Jacobi a lo largo de una geodésica de S^n está dado por

$$J(t) = \mathbf{sen}(t).W(t)$$

Y como $J(0) = 0$ y $J(\pi) = 0$, esto implica que puntos antípodas son puntos conjugados.

En variedades de curvatura seccional no positiva, no existen puntos conjugados.
En efecto: Sea $\gamma : [0, a] \to M$ es una geodésica, supongamos que existe una campo de Jacobi, no nulo, a lo largo de γ de modo que $J(0) = 0$ y $J(a) = 0$. Usando la ecuación de Jacobi

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle J', J\rangle = \langle J'', J\rangle + \|J'\|^2 = -\langle R(\gamma', J)\gamma', J\rangle + \|J'\|^2 \geq -\langle R(\gamma', J)\gamma', J\rangle$$

esto implica que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle J', J\rangle \geq 0$$

Luego $\langle J', J\rangle$ es una función no decreciente.
Por lo que,

$$\langle J', J\rangle \equiv 0$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle J, J\rangle = 2\langle J', J\rangle = 0$$

entonces

$$\|J\|^2 \equiv constante$$

Y esta constante es nula por $J(0) = 0$, lo que es una contradicción.

Finalizamos esta sección exhibiendo un resultado que relaciona la aplicación exponencial con los puntos conjugados y cuya demostración puede ser encontrada en libros sobre geometría riemanniana.

***Teorema* 2.4.1** *Sea $\gamma : [a, b] \to M$ una geodésica de M con $\gamma(a) = p$ y $\gamma(t_0) = q$ para $t_0 \in (a, b]$. Entonces el punto q es conjugado a p a lo largo de γ si y solamente si $t_0\gamma'(0)$ es un punto crítico de la aplicación exponencial $exp_p : T_pM \to M$*

Capítulo 3

Expansividad del Flujo Geodésico.

En este capítulo, se da resultados geométricos sobre la expansividad del flujo geodésico en relación a una propiedad llamada de *asintoticidad* que será explicada en detalle posteriormente.

3.1. Expansividad

Resulta muy atractivo estudiar propiedades geométricas de una variedad riemanniana usando la dinámica de su correspondiente flujo geodésico. En variedades de curvatura seccional no negativa, Anosov [1] demostró que el flujo geodésico es de tipo Anosov, esto es:

1. Existe una descomposición en una suma directa

$$T_v(T_1M) = E_v^s \oplus E_v^\mu \oplus E_v, \quad \forall v \in T_1M$$

   tal que

$$d(\varphi_t)_v(E_v^s) = E_{\varphi_t(v)}^s, \quad d(\varphi_t)_v(E_v^\mu) = E_{\varphi_t(v)}^\mu, \quad E_v = \frac{\delta}{\delta t}(\varphi_t)_{t=0}.$$

2. Existen constantes $c > 0$ y $\lambda > 0$ tales que

$$\| \; d(\varphi_t)_v\zeta \; \| \leq c\lambda^t \; \| \; \zeta \; \|, \quad \forall \zeta \in E_v^s, \quad \forall t > 0.$$

$$\| \; d(\varphi_{-t})_v\eta \; \| \leq c\lambda^t \; \| \; \eta \; \|, \quad \forall \eta \in E_v^\mu, \quad \forall t > 0.$$

Mas aún, Anosov también demostró que en esta situación, las distribuciones estable e inestable, E^s y E^μ respectivamente, son integrables, esto es, para cada $v \in T_1M$ existen subvariedades $W^s(v)$ y $W^\mu(v)$ de T_1M, llamadas de variedad estable e inestable de v tales que

$$T_vW^s(v) = E^s_v, \quad T_vW^\mu(v) = E^\mu_v$$

Para una excelente exposición de estos resultados ver Anosov [1]. Una generalización de este tipo de flujos seria flujos geodésicos que serán llamados de *expansivos* y cuya definición damos a seguir.

***Definición* 3.1.1** *Sea M una variedad riemanniana y $\hat{M}$ su recubrimiento universal y φ_t su flujo geodésico. Decimos que φ_t es expansivo si existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que para cada $v \in T\hat{M}$, se tiene la siguiente propiedad: Si para $w \in T\hat{M}$ existe una aplicación continua sobreyectiva $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $\rho(0) = 0$ tal que*

$$\mathrm{d}(\varphi_t(v), \varphi_{\rho(t)}(w)) \leq \varepsilon$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}$ de modo que $\varphi_{t_0}(v) = w$. Donde d *es la distancia de Hausdorff.*

En variedades de curvatura seccional negativa, como es conocido, el flujo geodésico es Anosov, si el flujo geodésico no fuera expansivo, existirían dos órbitas diferentes tal que

$$d(\varphi_t(v), \varphi_t(w)) \leq \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

luego estas órbitas del flujo geodésico están en la variedad estable e inestable lo que será una contradicción. Por lo tanto en variedades de curvatura negativa el flujo geodésico es expansivo.

En variedades de curvatura no positiva, si el flujo geodésico es expansivo, entonces en su recubrimiento universal no existen geodésicas γ y α tales que $d(\gamma(t), \alpha(t) \leq cte$ para todo t real.
Caso contrario, por el teorema de la faja plana, ver knieper [4], estas geodésicas delimitan una faja plana, lo que contradice la expansividad del flujo geodésico.

Si consideramos M como una variedad riemanniana, por lo general su métrica no tiene propiedades de convexidad como si lo tienen variedades de curvatura negativa, dado que en este tipo de variedades su recubrimiento universal con la métrica inducida es un espacio convexo.
Se pretende generalizar este concepto en cierto tipo de variedades para lo cual damos la siguiente definición:

***Definición* 3.1.2** *Un espacio métrico completo* (M, d) *es llamado de espacio K, C-casi convexo si para cualesquiera dos constantes positivas K, C y para cada dos segmentos geodésicos* $[a, b]$ *e* $[c, d]$ *en* M *satisfacen la siguiente propiedad:*

$$\mathrm{d}([a, b], [c, d]) \leq K sup\{\mathrm{d}(a, c), \mathrm{d}(b, d)\} + C$$

donde $\mathrm{d}([a, b], [c, d])$ *es la distancia de Hausdorff entre* $[a, b]$ *y* $[c, d]$.
La métrica d *es también llamada de casi-convexa.*

A seguir enunciaremos un resultado que demuestra que variedades sin puntos conjugados y con expansividad sobre el flujo geodésico, su recubrimiento universal es un espacio casi convexo. La demostración de este importante resultado puede ser encontrado en Ruggiero [8].

***Lema* 3.1.1** *Sea* M *una variedad riemanniana compacta, sin puntos conjugados. Si el flujo geodésico de* M *es expansivo, entonces el recubrimiento universal* $\hat{M}$ *de* M*, es un espacio métrico casi-convexo.*

Un ejemplo de tales variedades son las variedades compactas de curvatura seccional negativa.

3.2. El Axioma de Asintoticidad

En esta sección M denotará una variedad riemanniana compacta y $\hat{M}$ su recubrimiento universal con la métrica inducida y si p, q son puntos de M luego se denotará por $\gamma_{p,q}$ la geodésica que une p a q.

***Definición* 3.2.1** *Sean γ, β dos geodésicas de $\hat{M}$. Decimos que estas geodésicas son asintóticas si existe una constante positiva C de modo que*

$$\mathrm{d}(\gamma(t), \beta(t) \leq C \quad \forall t > 0$$

Si $\beta(t)$ es asintótica a $\gamma(t)$ y $\beta(-t)$ es asintótica a $\gamma(-t)$, entonces decimos que las geodésicas γ y β son bi-asintóticas.

Un ejemplo obvio se da en variedades de curvatura nula en donde las geodésicas paralelas son bi-asintóticas.

A continuación definimos el axioma de asintoticidad.

***Definición* 3.2.2** *M satisface el **axioma de asintoticidad**, si para geodésica p.l.a γ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$ se satisface la siguiente propiedad.*
Sean $q \in M$, $q_n \to q$ una sucesión de puntos de M, $(p_n, v_n) \in TM$ una sucesión de modo que $(p_n, v_n) \to (p, v)$ y γ_n la geodésica con $\gamma_n(0) = p_n$ y $\gamma_n'(0) = v_n$. Entonces para cada sucesión de números reales $t_n \to \infty$, la sucesión β_n de geodésicas que unen q_n a $\gamma_n(t_n)$ convergen a una geodésica β asintótica a γ

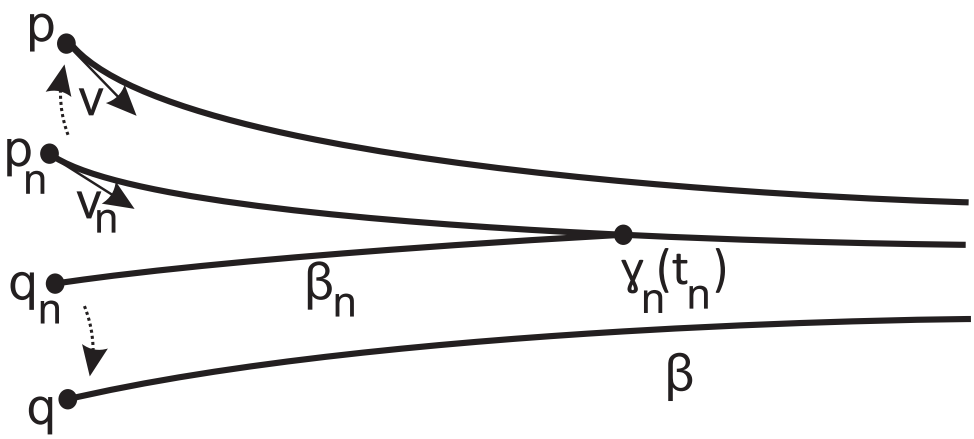

Figura 3.1:

Capítulo 4

La Condición de Unicidad

En variedades simplemente conexas y de curvatura negativa, dada una geodésica γ, la única geodésica asintótica a γ es ella misma, esto se debe a que las geodésicas divergen exponencialmente, ver Anosov [1] para mayor detalle.
A seguir damos una definición en relación a la bi-asintoticidad de geodésicas.

Definición* 4.0.1** *Sea M una variedad completa, simplemente conexa y sin puntos conjugados. Decimos que M satisface la* ***condición de unicidad *si y solo si la única geodésica bi-asintótica a una geodésica γ, es ella misma.*

Como ya habiamos afirmado, los recubrimientos universales de variedades sin puntos conjugados y de curvatura negativa satisfacen la condición de unicidad.
Variedades de curvatura no positiva cuyo flujo geodésico es expansivo, también satisfacen esta condición (esto es una consecuencia del teorema de la faja plana)
Por otro lado, una variedad de curvatura nula, no satisface esta condición, dado que su recubrimiento universal será un espacio euclideano en donde para una recta hay infinidad de rectas paralelas.

A continuación enunciamos el resultado de esta tesis.

Teorema
Sea M una variedad compacta sin puntos conjugados. Entonces el flujo geodésico es expansivo si y solamente si el recubrimiento universal $\hat{M}$ de M satisface la condición de unicidad.

Para la demostración del resultado principal, es necesario dar algunos resultados preliminares que a continuación enunciamos y demostramos.

***Lema* 4.0.1** *Si el flujo geodésico $\varphi_t : T_1M \to T_1M$ es expansivo, entonces existen números positivos r y B, de modo que para cada bola abierta $B_r(\theta)$ de radio r en T_1M y para cada par de puntos $\xi = (p, v)$, $\eta = (q, w)$ de $B_r(\theta)$ se tiene que*

$$\bar{d}((\xi, \eta) \leq B \text{ máx}\{d(p, q), \ \|P_{p,q}v - w\|, \ \|P_{q,p}w - v\|\}$$

Donde $\bar{d}$ es la distancia de T_1M, $P_{p,q}$ es el transporte paralelo a lo largo de la geodésica que une p a q y $P_{q,p}$ es el transporte paralelo a lo largo de la geodésica que une q a p

Demostración.

Como M es compacta, luego el fibrado unitario T_1M es compacto porque existe un número positivo r de modo que la bola $B_r(\theta)$ es una bola geodésica para todo $\theta \in T_1M$
Sean $\alpha : [0, 1] \to M$ la geodésica minimizante con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = 1$ y $P_{pq}(t)$ el transporte paralelo de v a lo largo de α.
Es conveniente también poner $P_{pq}v = P_{pq}(1)$
Sea ahora, $P_{qp}(t)$ el transporte paralelo de w a lo largo de la geodésica minimizante $\alpha(-t)$
Denotemos por $\overline{w} = P_{qp}(1)$, luego es conveniente denotar $\overline{w} = P_{qp}w$. Note que si $\overline{P}_{p,q}(t)$ es el transporte paralelo de $\overline{w}$ a lo largo de α, entonces se tiene que $\overline{P}_{p,q}(1) = w$

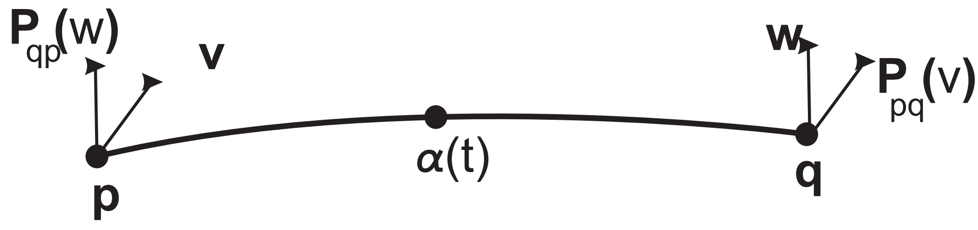

Figura 4.1: Transporte paralelo

Consideremos el campo vectorial $Z(t)$ a lo largo de α dado por:

$$Z(t) = P_{pq}(t) + t[\overline{P}_{pq}(t) - P_{pq}(t)]; \quad t \in [0, 1]$$

entonces vemos que $Z(0) = v$ y que $Z(1) = w$, note también que

$$\frac{D}{\partial t} Z(t) = \overline{P}_{pq}(t) - P_{pq}(t)$$

Consideremos ahora $\gamma(t) = (\alpha(t), Z(t))$, $t \in [0,1]$ una curva diferenciable en TM que une $\xi = (p, v)$ a $\eta = (q, w)$, esto es, $\gamma(0) = \xi = (p, v)$ y $\gamma(1) = \eta = (q, w)$. Entonces

$$d(\xi, \eta) \leq long(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{|\alpha'(t)|^2 + |\frac{D}{\partial t} Z(t)|^2} dt$$

Entonces

$$d(\xi, \eta) \leq \int_0^1 |\alpha'(t)| dt + \int_0^1 |\overline{P}_{pq}(t) - P_{pq}(t)| dt$$

Como $\overline{P}_{pq}(t)$ y $P_{pq}(t)$ son campos paralelos, luego:

$$d(\xi, \eta) \leq d(p, q) + \int_0^1 |\overline{P}_{pq}(1) - P_{pq}(1)|$$

Por lo tanto

$$d(\xi, \eta) \leq d(p, q) + |w - P_{pq}(v)|$$

De forma similar al razonamiento anterior, se tiene que:

$$d(\eta, \xi) \leq d(q, p) + |v - P_{qp}(w)|$$

Sumando obtenemos que:

$$d(\xi, \eta) \leq d(p, q) + \frac{1}{2}|v - P_{qp}(w)| + \frac{1}{2}|w - P_{pq}(v)| \blacksquare$$

El siguiente resultado relaciona la expansividad del flujo geodésico con la distancia entre geodésicas.

***Lema* 4.0.2** *Si el flujo geodésico $\varphi_t : T_1M \to T_1M$ es expansivo, entonces para cada número natural n existe un número positivo $\delta(n)$ con $\lim_{n \to +\infty} \delta(n) = 0$ de modo que para cada par de geodésicas γ y β en $\hat{M}$ y para algún $t < s$ se satisface que*

$$d(\gamma(t), \beta(t)) < \frac{1}{n}$$

$$d(\gamma(s), \beta(s)) < \frac{1}{n}$$

entonces se tiene que:

$$d(\gamma(r), \beta(r)) < \delta(n), \quad \forall r \in [t, s]$$

Demostración.

Consideremos ϵ la constante de expansividad del flujo geodésico φ_t.

La demostración será hecha por el absurdo.

En este sentido existen sucesiones $n_k \to \infty$, t_k, s_k, r_k con $t_k < r_k < s_k$, de geodésicas γ_k, β_k de $\hat{M}$ y un número δ de modo que:

1. $d(\gamma : k(t_k), \beta_k(t_k)) < \frac{1}{n_k}$

2. $d(\gamma_k(s_k), \beta_k(s_k)) < \frac{1}{n_k}$

3. $d(\gamma_k(r_k), \beta_k(r_k)) \geq \delta$

Sea r dado por el lema anterior y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $r \leq \epsilon$. Como en el recubrimiento universal $\hat{M}$ un segmento geodésico de $\hat{M}$ depende continuamente de sus puntos finales, mas aún, de las hipótesis, el segmento geodésico entre dos puntos es único.

Y entonces de los items 1, 2 y 3 para cada número $D > 0$ suficientemente grande es posible encontrar geodésica α_k de $\hat{M}$ de modo que:

1. $d(\gamma_k(t_k), \alpha_k(t_k)) < \frac{1}{n_k}$

2. $d(\gamma_k(s_k), \alpha_k(s_k)) < \frac{1}{n_k}$

3. $d(\gamma_k(r_k), \alpha_k(r_k)) = \text{ínf}\{\delta, \frac{\rho}{D}\}$

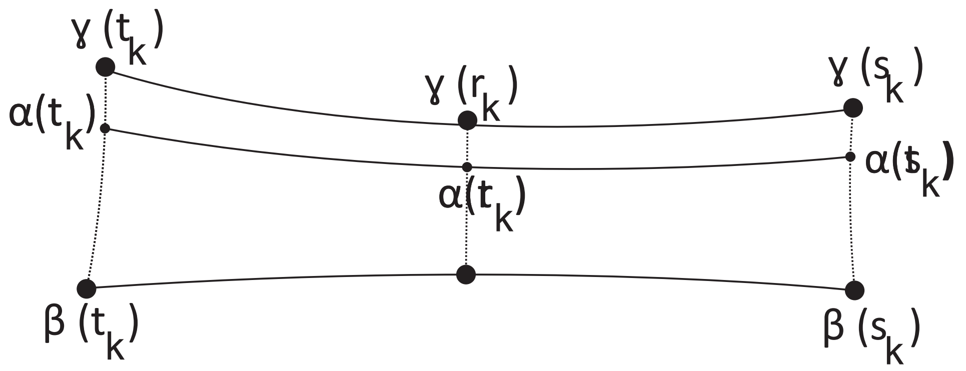

Figura 4.2:

Por suposición, $d(\gamma(t_k), \beta(t_k)) < \frac{1}{n_k}$, $d(\gamma(s_k), \beta(s_k)) < \frac{1}{n_k}$ y $d(\gamma(r_k), \beta(r_k)) \geq \delta$, y como M no tiene puntos conjugados, esto implica que

$\{|t_k - s_k|,\, |t_k - r_k|,\, |s_k - r_k|\} \to +\infty$.
Sea ahora $M_0 \subset \hat{M}$ un dominio fundamental de $\hat{M}$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\gamma_k(r_k) \in M_0$, (caso contrario por propiedades de M_0 existe una sucesión de isometrías g_k de $\hat{M}$ de modo que $g_k(\gamma_k((r_k)) \in M_0)$.

Teniendo en cuenta que M es compacta, y que $\|\gamma_k'(r_k)\| = 1$, por el teorema de Bolzano-Weierstrass y por compacidad de M, existen subsucesiones de $(\gamma_k(r_k), \gamma_k'(r_k))$ y de $(\alpha_k(r_k), \alpha_k'(r_k))$, que sin pérdida de generalidad, seguirán siendo denotadas de igual forma, esto es,

$$(\gamma_k(r_k)), \gamma_k'(r_k)) \to (p, v) \quad (\alpha_k(r_k)), \alpha_k'(r_k)) \to (q, w)$$

donde p, q son puntos de M_0 y v, w son vectores tangentes unitarios.

Denotemos por γ_v y γ_w las geodésicas con condiciones iniciales (p, v) y (q, w) respectivamente.
Entonces del item 3 tomando límite, tenemos que

$$d(\gamma_v(0), \gamma_w(0)) = \lim_{n\to\infty} (d(\gamma(r_k), \alpha_k(r_k))) = \inf\{\delta, \frac{\rho}{D}\}$$

Por otro lado, como el flujo geodésico es expansivo, entonces $(\hat{M}, d)$ es un ***espacio casi convexo*** (ver Ruggiero[] para mayores detalles) y como $|t_k - s_k| \to \infty$, teniendo encuenta 1 y 2 de arriba, entonces en el límite obtenemos que:

$$d(\gamma_v(t), \gamma_w(t)) \leq \frac{\rho}{D}$$

Se sigue del lema anterior que para D suficientemente grande, finalmente, tenemos que:

$$d(\varphi_t(p, v), \varphi_t(q, w)) \leq \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Lo que es claramente una contradiccón a la expansividad del flujo geodésico$\blacksquare$

Finalmente demostramos el resultado principal de esta tesis.

4.1. Demostración del resultado principal

En esta sección demostraremos el resultado principal de este trabajo de tesis, para lo cual nuevamente enunciamos este resultado.

Teorema

Sea M una variedad compacta sin puntos conjugados. Entonces el flujo geodésico es expansivo si y solamente si el recubrimiento universal $\hat{M}$ de M satisface la condición de unicidad.

Demostración.

La necesidad es obvia, una vez que si el flujo geodésico no fuera expansivo, entonces existirían dos órbitas diferentes cuya distancia sería finita; luego proyectadas estas a la variedad, se tendría dos geodésicas diferentes biasintóticas.

Para la suficiencia, esto es, supongamos que el flujo geodésico φ_t es expansivo con constante de expansividad ϵ.

Consideremos dos geodésicas γ y β de $\hat{M}$ las cuales son biasintóticas, esto es, existe una constante positiva C de modo que

$$d(\gamma(t), \beta(t)) \leq C \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Consideremos ahora una variación por geodésicas en el siguiente sentido:

Para todo número real positivo t considere las geodésicas $\sigma_t(s)$ y $\sigma_{-t}(s)$ que unen $\gamma(t)$ a $\beta(t)$ y $\gamma(-t)$ a $\beta(-t)$ respectivamente, esto es,

$$\sigma_t, \sigma_{-t} : [0, 1] \to \hat{M}$$

son geodésicas tales que:

$$\sigma_t(0) = \gamma(t), \quad \sigma_t(1) = \beta(t)$$

$$\sigma_{-t}(0) = \gamma(-t), \quad \sigma_{-t}(1) = \beta(-t)$$

Como se supuso que las geodésicas γ y β son biasintóticas cuya distancia $d(\gamma(t), \beta(t) \leq C$, esto implica que las longitudes de los segmentos geodésicos σ_t y σ_{-t} son menores o iguales que C, esto es,

$$long(\sigma_t) \leq C \quad \text{y} \quad long(\sigma_{-t}) \leq C$$

Uniremos los puntos $\sigma_t(s)$ y $\sigma_{-t}(s)$ por medio de segmentos geodésicos denotados por $\gamma_{t,s}$ Esto es,

$$\gamma_{t,s} : [0,1] \to \hat{M}$$

es una geodésica de modo que $\gamma_{t,s}(0) = \sigma_t(s)$ y $\gamma_{t,s}(1) = \sigma_{-t}(s)$
Como el flujo geodésico es expansivo, entonces el recubrimiento universal es un espacio casi convexo, luego *satisface el axioma de asintoticidad*
Luego es fácil ver que existe un número positivo δ de modo que si $d(\gamma_{t,s}(0), \gamma_{t,0}(0)) \leq \delta$ y $d(\gamma_{t,s}(1), \gamma_{t,0}(1)) \leq \delta$, entonces podemos concluir que:

$$d(\gamma_{t,s}(\rho), \gamma_{t,0}(\rho)) \leq \epsilon$$

para todo $\rho \in [0,1]$

Por otro lado, teniendo en cuenta que las longitudes de los segmentos geodésicos σ_t y σ_{-t} son acotadas superiormmente por una constante positiva C, entonces existe un número natural m de modo que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $m+1$ números en [0, 1]

$$s_{n,0} = 0, \quad s_{n,1}, \quad s_{n,2} \quad s_{n,3} \ldots s_{n,m} = 1$$

de modo que:

$$d(\sigma_n(s_{n,1}), \sigma_n(s_{n,2})) \leq \delta$$

$$d(\sigma_n(s_{n,1}), \sigma_n(s_{n,3})) \leq \delta$$

$$\vdots$$

$$d(\sigma_n(s_{n,1}), \sigma_n(s_{n,m})) \leq \delta$$

y que

$$d(\sigma_{-n}(s_{n,1}), \sigma_{-n}(s_{n,2})) \leq \delta$$

$$d(\sigma_{-n}(s_{n,1}), \sigma_{-n}(s_{n,3})) \leq \delta$$

$$\vdots$$

$$d(\sigma_{-n}(s_{n,1}), \sigma_{-n}(s_{n,m})) \leq \delta$$

En términos de las geodésicas $\gamma_{n,s}$, esto significa que:

$$d(\gamma_{n,s_{n,1}}(\rho), \gamma_{n,s_{n,2}}(\rho)) \leq \epsilon$$

$$d(\gamma_{n,s_{n,2}}(\rho), \gamma_{n,s_{n,3}}(\rho)) \leq \epsilon$$

$$\vdots$$

$$d(\gamma_{n,s_{n,m-1}}(\rho), \gamma_{n,s_{n,m}}(\rho)) \leq \epsilon$$

para cualquier $\rho \in [0, 1]$

Note que si B_m es la bola geodésica de centro en $\gamma(0)$ y de radio "$C + m\epsilon$", entonces de la última desigualdad se concluye que para todo $i = 1, \ldots m - 1$

$$B_m \cap \gamma_{n,s_{n,i}}([0, 1]) \neq \phi$$

Tomando $n \to \infty$, para una subsucesión si fuera el caso,

$$\gamma_{n,s_{n,k}} \to \gamma_k$$

esto es, las geodésicas $\gamma_{n,s_{n,k}}$ convergen para un geodésica γ_k con $k = 1, \ldots m$ de modo que

$$d(\gamma_k(t), \gamma_{k+1}(t)) \leq \epsilon$$

para todo número real t

Todas estas geodésicas son bi asintóticas, entonces por hipótesis (expansividad del flujo geodésico), estas tienen que ser iguales, esto es,

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \ldots \gamma_{m+1}$$

Y teniendo que cuenta que

$$\gamma_0 = \gamma \quad \text{y} \quad \gamma_{m+1} = \beta$$

concluimos que

$$\gamma = \beta \blacksquare$$

Conclusiones

1. Se puede estudiar propiedades geométricas de una variedad riemanniana a través de propiedades dinámicas del flujo geodésico.

2. Variedades riemannianas sin puntos conjugados que satisfacen la condición de unicidad son espacios métricos casi-convexos.

3. Es posible establecer una relación entre la distancia del fibrado unitario (con respecto a la métrica de Sasaki) y la distancia de la variedad riemanniana.

4. La condición de expansividad del flujo geodésico es reflejada en la no bi-asintoticidad de geodésicas en el recubrimiento universal.

Bibliografía

[1] Anosov: *Geodesic flow on closed Riemannian manifols of negative curvature.* Tr. Mat. Inst. Steklova 90 (1967).

[2] A. Katov, B. Kasselblatt: *Introduction to te Modern Theory of Dynamical Systems.* Cambridge University Press. Cambridge, New York.

[3] E. Lages Lima: *Variedades Diferenciais.*

[4] G. Knieper: *Mannigfaltigkeieten ohne Konjugierte Punktle.* Inagural disetation, Bonn 1985.

[5] E. Lages Lima: *Grupo fundamental e espaços de recubrimiento.* 2012. 4^{ta} edição IMPA.

[6] M. Perdigão do Carmo: *Diferential Geomety of Curves and Surfaces.* Prentince-Hall, New Jersey 1976

[7] M. Perdigão do Carmo: *Geometria Riemanniana.* 2015. 5^{ta}. edição, IMPA.

[8] R. Ruggiero: *Expansive geodesic fows in manifolds whit no conjugate points.* Ergodic theory & Dynamical System, (1997), 17, 211-225.

[9] R. Ruggiero: *On a conjeture about expansive geodesic flows.* Ergocic Theory & Dynamical System, (1996), 16, 545-553.

[10] R. Ruggiero: *Expansive Dynamics and Hyperbolic Geometry.* Boletim de la Sociedade Brasileira de Matematica, Vol. 25, N. 2, 139-172.

[11] M. Spivak: *Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume 1.*Publish or Perish; Edición: Third Edition with Corrections (1999)