Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa

Facultad de Ciencias Naturales y Formales

Escuela Profesional de Matemáticas

Estabilización de un sistema de Boussinesq del tipo Korteweg-de Vries

Tesis presentada por:

BACH. NINA ORTIZ DUGAN PAÚL

Para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas

Asesor: Dr. Vladimir Alfonso Rosas Meneses

AREQUIPA - PERÚ

2017

La matemática es el alfabeto con el que Dios escribió el universo.

Pitágoras

Agradecimientos

A Dios, toda la felicidad y todos los beneficios que he recibido en mi vida te los debo sin duda alguna a ti Dios. No existe ocasión en la cual no estés conmigo.

A mis padres y mis hermanos, por el apoyo y comprensión.

A todos los profesores que han hecho posible mi formación, por las enseñanzas, las críticas y los consejos.

A mi orientador Dr. Vladimir Alfonso Rosas Meneses, por la forma como condujo este trabajo, por el apoyo y por la manera como enseña a sus alumnos.

Índice general

Resumen

En este trabajo consideramos un sistema de Boussinesq del tipo Korteweg-de Vries en un intervalo limitado. Introduciendo condiciones de contorno adecuadas probamos la buena colocación y la estabilidad exponencial de las soluciones con datos iniciales pequeños. Palabras claves: Sistema de Boussinesq, Estabilización, Korteweg-de Vries.

Abstract

A Boussinesq system of Korteweg-de Vries type posed on a bounded interval is considered. Introducing appropriate boundary conditions we prove the global well-posedness together with the exponential stability of the solutions issued from small initial data. Key words: Boussinesq system, Stabilization, Korteweg - de Vries.

Introducción

El sistema de Boussinesq clásico fue obtenido por primera vez por Boussinesq para describir la propagación de ondas en la superficie de un canal de agua. Actualmente, ya se sabe que este tipo de sistema, así como sus generalizaciones, también son extremadamente útiles cuando se estudia la propagación de ondas en grandes lagos, océanos, etc.

J. Bona, M. Chen and J.-C. Saut [5] obtuvieron una familia de sistemas del tipo Boussinesq para describir fenómenos de la misma naturaleza:

$$\begin{cases} \eta_t + w_x + (\eta w)_x + a w_{xxx} - b\eta_{xxt} = 0 \\ w_t + \eta_x + w w_x + c\eta_{xxx} - d w_{xxt} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Los parámetros $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son escogidos de acuerdo con cada situación física, pero deben verificar las siguientes relaciones

$$a + b = \frac{1}{2}\left(\theta^2 - \frac{1}{3}\right), \qquad c + d = \frac{1}{2}(1 - \theta^2) \geq 0, \quad \theta \in [0, 1].$$

En lo que se refiere al estudio matemático de estos sistemas, apenas el problema de Cauchy ha sido estudiado sistemáticamente, el que incluye las propiedades de buena colocación [6]. Entretanto, el uso práctico del sistema de Boussinesq no envuelve solamente el problema de valor inicial, problemas envolviendo condiciones de contorno aparecen con frecuencia en las aplicaciones. En este trabajo, donde nos basamos en el artículo [22], estamos interesados en el decaimiento exponencial de la energía total asociado al sistema de Boussinesq del tipo Korteweg-de Vries (esto es,$a = c > 0$ y

$b = d = 0$) en un intervalo finito $I = (0, L)$

$$\begin{cases} \eta_t + w_x + (\eta w)_x + w_{xxx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t \geqslant 0 \\ w_t + \eta_x + w w_x + \eta_{xxx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t \geqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

satisfaciendo las condiciones de frontera

$$\begin{cases} w(0,t) = 0, \quad w_x(0,t) = \alpha_0 \eta_x(0,t), \quad w_{xx}(0,t) = 0, \quad t > 0 \\ w(L,t) = \alpha_2 \eta(L,t), \quad w_x(L,t) = -\alpha_1 \eta_x(L,t), \quad w_{xx}(L,t) = -\alpha_2 \eta_{xx}(L,t), \quad t > 0 \end{cases} \tag{3}$$

y condiciones iniciales

$$\begin{cases} \eta(x,0) = \eta_0(x), \quad o < x < L \\ w(x,0) = w_0(x), \quad o < x < L \end{cases} \tag{4}$$

En (3), α_0, α_1 y α_2 denotan constantes reales no negativas. Por simplicidad, asumimos que $a = c = 1$. También es esperado que el sistema Korteweg-de Vries admita soluciones globales en $\mathbb{R}$ y que también posee buenas propiedades de control en el toro [19].

Observamos que, multiplicando la primera ecuación de (2) por η, la segunda ecuación por w, integrando en $(0, L)$ y sumando los resultados, obtenemos (formalmente)

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\alpha_2|\eta(L,t)|^2 - \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2 - \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2 - \frac{1}{3}|w(L,t)|^3 - \int_0^L (\eta w)_x \eta dx,$$

donde $E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \left(|\eta|^2 + |w|^2\right) dx$ es la energía total asociada al sistema (2).

Por tanto, es posible observar que las condiciones de frontera (3) actúan como un mecanismo disipativo, por lo menos para el sistema lineal, visto que los dos últimos términos no aparecen en la derivada de la energía del problema lineal. Luego, surgen las siguientes preguntas naturales:

- $E(t) \longrightarrow 0$, cuando $t \longrightarrow +\infty$

- Si este fuera el caso, ¿podemos determinar una tasa de decaimiento?

El teorema central de este trabajo que nos da una respuesta para estas preguntas será enunciado a seguir [22].

Teorema 0.0.1. *Asuma que* $\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha_1 > 0$ *y* $\alpha_2 = 1$*. Entonces, existen constantes* $\rho > 0, \quad C > 0$ *y* $\mu > 0$*, tal que, para cualquier* $(\eta_0, w_0) \in [L^2(I)]^2$ *con* $\|(\eta_0, w_0\|_{[L^2(I)]^2} \leqslant \rho$*, el sistema (2) -(4) admite una única solución* (η, w) *en* $C(\mathbb{R}^+; [L^2(I)]^2) \cap C(\mathbb{R}^{+*}; [H^1(I)]^2) \cap L^2(0,1; [H^1(I)]^2)$ *que satisface*

$$\|(\eta, w)(t)\|_{[L^2(I)]^2} \leqslant Ce^{-\mu t}\|(\eta_0, w_0\|_{[L^2(I)]^2}, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\|(\eta, w)(t)\|_{[H^1(I)]^2} \leqslant C\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}\|(\eta_0, w_0\|_{[L^2(I)]^2}, \quad \forall t > 0, \quad \forall \alpha \in (0, \mu). \tag{6}$$

El principal interés en el Teorema 0.0.1 esta en el hecho que, con las condiciones de frontera propuestas en (3), la estabilidad es validad para cualquier longitud del dominio, al paso que en [18] y [24], por ejemplo, se probó que, sobre condiciones de frontera homogéneas, el decaimiento de las soluciones del sistema lineal no ocurre para algunos valores críticos de la longitud del intervalo $(0, L)$, que son

$$L \notin \left\{ 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + l^2 + kl}{3}} : k, l \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Este hecho puede ser comprobado si consideramos el cambio de variable $v = \eta + w$ y $u = \eta - w$. En este caso, el sistema (2) es transformado en un sistema acoplado de dos ecuaciones Korteweg-de Vries no lineales.

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} + \frac{1}{4}[(v-u)(v+u)]_x + \frac{1}{4}(v-u)(v-u)_x = 0, \\ u_t - u_x - u_{xxx} + \frac{1}{4}[(v-u)(v+u)]_x - \frac{1}{4}(v-u)(v-u)_x = 0. \end{cases}$$

Luego, las condiciones de frontera $v(0,t) = v(L,t) = v_x(L,t) = 0$ y $u(0,t) = u(L,t) = 0$ $u_x(L,t) = 0$, para este tipo de sistema, garantizan la existencia de la solución global, mas el decaimiento exponencial de la energía asociada al problema lineal no ocurre para algunos valores de L.

La prueba del Teorema 0.0.1 es obtenida de la siguiente manera: Primero estudiamos el problema lineal para deducir algunas estimativas a priori y el decaimiento exponencial de las soluciones en la norma L^2. Establecemos el efecto regularizante de Kato usando el método de los multiplicadores, mientras que el decaimiento exponencial es obtenido con la ayuda de algunos argumentos de compacidad que reduce el trabajo a un problema espectral (ver, por ejemplo, [24]). Con esas estimativas, probamos la buena colocación global y la estabilidad exponencial de las soluciones del sistema no lineal partiendo con datos iniciales pequeños en $[L^2(I)]^2$. La idea central consiste en combinar el efecto regularizante de Kato y la tasa de decaimiento de las soluciones en $[H^1(I)]^2$ para establecer una estimativa puntual y, entonces, aplicar el teorema de punto fijo de Banach en el espacio

$$F := \left\{ U = (\eta, w) \in C(\mathbb{R}^+; \left[H^1(I)\right]^2); \quad \|e^{\mu t} U(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; [H^1(I)]^2)} < \infty \right\}, \tag{7}$$

donde $\mu > 0$, será determinado posteriormente.

Vale resaltar que debido a falta de estimativas a priori en la norma $[L^2(I)]^2$, la pregunta de la existencia global de soluciones es difícil de resolver. Entretanto, la existencia global juntamente con la estabilidad exponencial puede ser establecidas para datos iniciales suficientemente pequeños. Para este propósito, el efecto regularizante de Kato y la tasa de decaimiento exponencial en $X_1 = [H^1(I)]$ son combinados en una estimativa puntual en el tiempo.

El análisis descrito arriba fue organizado de la siguiente manera: En el Capítulo 1, están algunas definiciones y algunos resultados importantes que serán utilizados a lo largo del trabajo. En el Capítulo 2, estudiaremos el sistema lineal para deducir algunas estimativas a priori, el decaimiento de las soluciones de este sistema y el efecto regularizande de Kato. En el Capítulo 3, volvemos al problema inicial usando los resultados del Capítulo 2 para establecer una estimativa puntual que será a clave para probar la buena colocación del problema y la estabilidad exponencial de las soluciones con datos iniciales pequeños en $[L^2(I)]^2$. Probamos, entonces, el Teorema central de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, hacemos algunas definiciones y enunciaremos algunos resultados relevantes que serán útiles posteriormente.

1.1. Espacio de las Distribuciones

Definición 1.1.1. *Sea $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, una función continua, donde Ω es un abierto. Definimos soporte de φ como la cerradura en Ω del conjunto de puntos de Ω donde φ no se anula. Vamos a denotar el soporte de φ por $supp(\varphi)$. Luego tenemos*

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \quad \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Definición 1.1.2. *Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones de clase C^∞ en Ω, que poseen soporte compacto en Ω. Decimos que una sucesión de funciones $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ en $C_0^\infty(\Omega)$, cuando son satisfechas las siguientes condiciones:*

i) Existe un subconjunto compacto $K \subset \Omega$ talque $supp(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, y $supp(\varphi) \subset K$;

ii) $\varphi_n^{(j)} \longrightarrow \varphi^{(j)}$, uniformemente, para todo $j \in \mathbb{N}$, cuando $n \longrightarrow \infty$.

Definición 1.1.3. *EL espacio vectorial* $C_0^\infty(\Omega)$*, unido de la noción de convergencia arriba, será denotado por* $D(\Omega)$ *y denominado espacio de las funciones test. Denominamos distribución sobre* Ω *a toda forma lineal* $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$*, continua con respecto a la topología de* $D(\Omega)$*, esto es, si* (φ_n) *es una sucesión en* $D(\Omega)$ *convergiendo para* φ *en* $D(\Omega)$*, entonces*

$$\langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \textit{cuando} \quad n \longrightarrow \infty,$$

donde $\langle T, \varphi \rangle$ *representa el valor de la distribución* T *en la función test* φ*.*

Definición 1.1.4. *El conjunto de las distribuciones escalares sobre* Ω *es un espacio vectorial real, denotado por* $D'(\Omega)$*, denominado espacio de las distribuciones escalares sobre* Ω*.*
Decimos que una sucesión de distribuciones escalares (T_n) *converge para la distribución* T *en* $D'(\Omega)$*, cuando*

$$\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \textit{en} \quad \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \quad \textit{cuando} \quad n \longrightarrow \infty,$$

Con esta noción de convergencia, $D'(\Omega)$ *es un espacio vectorial topológico.*

Definición 1.1.5. *Dada una distribución* $T \in D'(\Omega)$ *y un multi-indice* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$*, denominamos derivada distribucional de orden* $|\alpha| \in \mathbb{N}$ *de* T*, como siendo la distribución* $D^\alpha T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$*, dada por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

donde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ *y* $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$*.*

1.2. Espacios de Sobolev

Definición 1.2.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, abierto. Denotamos por* $L^p(\Omega)$*, con* $1 \leqslant p < \infty$*, el espacio vectorial de las (clases de) funciones medibles* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$*, tal que* $|u|^p$ *es*

Lebesgue integrable en Ω, que, unido de la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

es un espacio de Banach.

En el caso $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$, el espacio de las (clases de) funciones medibles a Lebesgue y esencialmente limitadas en Ω, esto es, existe una constante $C > 0$, tal que

$$|u(x)| \leqslant C, \quad \text{casi siempre en} \quad \Omega,$$

que, unido de la norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|,$$

es un espacio de Banach. En particular, si $p = 2$, tenemos que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert cuya norma y producto interno serán denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

y

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Decimos que una sucesión (φ_n) en $L^p(\Omega)$ converge para φ en $L^p(\Omega)$ si
$\|\varphi_n - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Definición 1.2.2. *Si p y q son índices conjugados, esto es, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces tenemos que el dual topológico de $L^p(\Omega)$, denotado por $[L^p(\Omega)]'$, es el espacio $L^q(\Omega)$. Así mismo, si $1 \leqslant p < \infty$, entonces $L^p(\Omega)$ es separable y si $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ es reflexivo*

Lema 1.2.3. *(Desigualdad de Hölder) Sea $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1, \quad f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$. Entonces, $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

Demostración: Ver [7] pag. 87. $\square$

Definición 1.2.4. *Sean $m \in \mathbb{N}^*$, y $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos el espacio de Sobolev de orden m, denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, como siendo el espacio vectorial de las (clases de) funciones en $L^p(\Omega)$, para los cuales sus derivadas de orden $|\alpha|$, en el sentido de las distribuciones, pertenecen a $L^p(\Omega)$, para todo $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, o sea,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m\},$$

donde $D^\alpha u$ denota la derivada devil o distribucional. El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ unido de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad si \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

es un espacio de Banach y, cuando $p = \infty$, definiendo la norma

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

tenemos que $W^{m,\infty}(\Omega)$ es un espacio de Banach.
Tenemos que $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio separable si $1 \leqslant p < \infty$, y reflexivo si $1 < p < \infty$. En particular, si $p = 2$, el espacio $W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, separable y reflexivo, que es denotado por

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \quad D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m\},$$

cuya norma y producto interno serán denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

y

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

Con la estructura topológica arriba, tenemos $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Definición 1.2.5. *Definimos el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como siendo la cerradura de $D(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$.*

El dual topológico del espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ es representado por $W^{-m,q}(\Omega)$, si $1 \leqslant p < \infty$ con p y q índices conjugados. Si $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, entonces $\varphi|_{D(\Omega)}$ pertenece a $D'(\Omega)$.

En el caso $p = 2$, $\quad W_0^{m,2}(\Omega)$ es denotado por $H_0^m(\Omega)$, cuyo dual es $H^{-m}(\Omega)$.

Teorema 1.2.6. *(Teorema de inmersión) Sean $m \geqslant 1$, $1 \leqslant p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ en un conjunto abierto, limitado y con frontera regular.*

- *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.*
- *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, donde $q \in [p, +\infty)$.*
- *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,*

siendo las inmersiones arriba continuas.

Demostración: Ver [17]. □

Lema 1.2.7. *(Desigualdad de Poincaré) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto limitado en alguna dirección x_i de $\mathbb{R}^n$, o sea, existe una dirección e_i tal que $|\pi_i(\Omega)| < C$, C constante, donde $\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es la proyección sobre el eje e_i. Entonces, existe una constante $C_\Omega > 0$, tal que*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega \|\bigtriangledown u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

para cualquier $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración: Ver [17]. □

Observación 1.2.8. *Por la desigualdad de Poincaré, se muestra que las normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ $\quad$ y $\quad$ $\|\bigtriangledown u\|_{L^2(\Omega)}$ son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$.*

Teorema 1.2.9. *(Rellich-Kondrachov)Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, limitado y con frontera regular.*

- *Si $n > 2m$, entonces $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega)$, donde $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right)$*

- *$n = 2m$, entonces $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega)$, donde $p \in [1, +\infty)$*

- *$n < 2m$, entonces $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c C^k(\overline{\Omega})$, donde k es un entero no negativo tal que $k < m - \frac{n}{2} < k+1$*

donde las inmersiones arriba son compactas.

Demostración: Ver [7] pag. 270. □

Teorema 1.2.10. *(Teorema de la traza) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto limitado de clase C^{m+1} con frontera Γ. Entonces existe una aplicación traza $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1})$, de $H^m(\Omega)$ en $(L^2(\Omega))^m$, tal que*

- *Si $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, entonces $\gamma_0(v) = v|_\Gamma, \quad \gamma_1(v) = \frac{\partial v}{\partial \nu}|_\Gamma, ..., \gamma_{m-1}(v) = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \nu^{m-1}}|_\Gamma$, donde ν es el vector normal unitario exterior a la frontera Γ.*

- *La imagen de γ es el espacio $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$.*

- *El nucleo de γ es $H_0^m(\Omega)$.*

Demostración: Ver [12] pag. 95. □

1.3. Interpolación de espacios de Hilbert

Sean X e Y espacios de Hilbert separables, tales que $X \hookrightarrow Y$, con inmersión continua y densa. Sean $(\cdot,\cdot)_X$ y $(\cdot,\cdot)_Y$ los productos internos en X e Y, respectivamente.

Indicaremos por $D(S)$, el conjunto de las funciones u, definidas en X, tal que la aplicación $v \longmapsto (u, v)_X, \quad v \in X$, es continua en la topología inducida por Y. Entonces, $(Su, v)_Y = (u, v)_X$ define S, como siendo un operador ilimitado en Y, con dominio $D(S)$, denso en Y.

Así, tenemos que S es un operador autoadjunto y estrictamente positivo. Usando la descomposición espectral de operadores autoadjuntos, podemos definir $S^\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}$. En particular, usaremos $A := S^{\frac{1}{2}}$. El operador A es autoadjunto, definido positivo en Y, con dominio X y

$$(u, v)_X = (Au, Av)_Y, \quad \forall u, v \in X.$$

Definición 1.3.1. *Con las hipótesis arriba, definimos el espacio intermediario*

$$[X, Y]_\theta := D(A^{1-\theta}), \quad \theta \in [0, 1],$$

donde $D(A^{1-\theta})$ representa el dominio de $A^{1-\theta}$, unido de la norma

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} = \left(\|u\|_Y + \|A^{1-\theta}u\|_Y\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tenemos las siguientes propiedades:

1. $X \hookrightarrow [X, Y]_\theta \hookrightarrow Y$
2. $\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leqslant \|u\|_X^{1-\theta}\|u\|_Y^\theta, \quad \forall u \in X$
3. Si $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, entonces $[X, Y]_{\theta_0} \hookrightarrow [X, Y]_{\theta_1}$
4. $[[X, Y]_{\theta_0}, [X, Y]_{\theta_1}]_\theta = [X, Y]_{(1-\theta)\theta_0+\theta\theta_1}$

Para la demostración de estas propiedades y otras, ver [15]. □

1.4. Espacios $L^p(0, T; X)$

Definición 1.4.1. *Sean X espacio de Banach y $T > 0$. Denotamos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leqslant p < \infty$, el espacio de vectorial (clase de) funciones $u : (0, T) \to X$, fuertemente medible, tal que la función $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ es integrable segun Lebesgue en $(0, T)$, que unido de la norma*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

es un espacio de Banach. En el caso $p = 2$ y X un espacio de Hilbert, el espacio $L^2(0,T;X)$ es, también, un espacio de Hilbert, cuyo producto interno es dado por

$$\langle u, v\rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_X dt.$$

Si $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(0,T;X)$, el espacio vectorial de las (clases de) funciones $u : (0,T) \to X$, fuertemente medibles, tal que la función $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ pertenece a $L^\infty(0,T)$, que unido de la norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} ess\|u\|_X,$$

es un espacio de Banach.
Así mismo, cuando X es reflexivo y separable y $1 < p < \infty$, tenemos que $L^p(0,T;X)$ es un espacio reflexivo y separable, cuyo dual topologico se identifica al espacio de Banach $L^q(0,T;X')$, donde p y q son índices conjugados y X' es el dual de X.

Teorema 1.4.2. *(Aubin-Lions) Sean B_0, B y B_1, espacios de Banach tales que*

$$B_0 \hookrightarrow_c B \hookrightarrow B_1,$$

donde B_0 y B_1 son reflexivos, $\hookrightarrow$ denota inmersión continua y $\hookrightarrow_c$, inmersión compacta. Defina $W = \{u \in L^p(0,T;B_0); u' \in L^q(0,T;B_1)\}$, donde $1 < p, q < \infty$ y $T < \infty$, unido de la norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^q(0,T;B_1)}.$$

Entonces W es un espacio de Banach y $W \hookrightarrow_c L^p(0,T;B)$.
Demostración: Ver [14]. □

Observación 1.4.3. *Note que, por el Teorema de Aubin-Lions, tenemos el siguiente resultado:*
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $L^2(0,T;B_0)$ y $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion acotada

en $L^2(0,T;B_1)$, entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en W, donde existe una sub sucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k}\to u$, fuerte en $L^2(0,T;B)$, cuando $k\to\infty$.

Definición 1.4.4. *Sean X espacio de Banach y $T>0$. Entonces definimos el espacio de las funciones débilmente continuas como siendo el espacio vectorial de las (clases de) funciones $L^\infty(0,T;X)$, tal que , $u:[0,T]\to X$ es una aplicación $t\mapsto\langle\varphi,u(t)\rangle$ es continua de $[0,T]$ en $\mathbb{R}$, $\forall\varphi\in X'=\mathcal{L}(X;\mathbb{R})$. Este espacio será denotado por $C_w([0,T];X)$.*

Teorema 1.4.5. *Sean X y Y espacio de Banach tales que, $X\hookrightarrow Y$ y X reflexivo. Entonces tenemos*

$$L^\infty(0,T;X)\cap C_w([0,T];Y)=C_w([0,T];X)$$

Demostración: Ver [27]. □

1.5. Algunos resultados importantes

Teorema 1.5.1. *(Punto fijo de Banach) Sean E un espacio de Banach y $F\subset E$ un subespacio cerrado de E. Si $f:F\to F$ es una contracción, entonces existe un único $z\in F$, tal que $f(z)=z$.*

Demostración: Ver [25] pag. 220. □

Teorema 1.5.2. *Sea X un espacio normado y $\overline{B_1(0)}\subset X$, la bola cerrada unitaria. Entonces, $\overline{B_1(0)}$ es compacta si, y solamente si, X posee dimensión finita.*

Demostración: Ver [7] pag. 148. □

Teorema 1.5.3. *Si X es un espacio vectorial normado y M es un subespacio de X de dimensión finita, entonces M es cerrado.*

Demostración: Ver [2]. □

Teorema 1.5.4. *(Convergencia dominada de Lebesgue) Sean (f_n) una sucesión de funciones medibles de Ω en X, $f : \Omega \to X$ y $g \in L^1(\Omega)$. Si*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x), \quad \textit{casi siempre en } \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \textit{casi siempre en } \Omega,$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Demostración: Ver [10] pag. 53. □

Lema 1.5.5. *(Desigualdad de Young) Sean $a, b \geqslant 0$ y $p, q > 0$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces,*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración: Ver [10] pag. 174. □

1.6. Teoría de Semigrupos

Definición 1.6.1. *Sea X un espacio de Banach. Una Aplicación $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ es un semigrupo de operadores lineales acotados de X, si*

i) $S(0) = I$, donde I es la aplicación identidad del espacio X.

ii) $S(s+t) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Decimos que S es de clase C_0, o fuertemente continuo, si

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\|_X = 0, \quad \forall x \in X.$$

Decimos que S es uniformemente continuo si

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t) - I\| = 0.$$

Teorema 1.6.2. *Si $(S(t))_{t\geqslant 0}$ es un semigrupo de clase C_0, entonces existen contantes $w \geqslant 0$ y $M \geqslant 1$, tal que*

$$\|S(t)\| \leqslant Me^{wt}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Demostración: Ver [23] pag. 4. $\square$

Corolário 1.6.3. *Sea $(S(t))_{t\geqslant 0}$ un semigrupo de clase C_0. Entonces, para cada $x \in X$, la aplicación*

$$t \longmapsto S(t)x$$

es continua. Equivalentemente, para cada $x \in X$,

$$\lim_{t\longrightarrow s} S(t) = S(s)x, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración: Ver [23] pag. 4. $\square$

Definición 1.6.4. *Si $\|S(t)\| \leqslant 1, \quad \forall t \geqslant 0$, decimos que S es un semigrupo de contracciones.*

Definición 1.6.5. *El operador A definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \quad \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \quad existe \right\}$$

y

$$Ax = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h},$$

es llamado generador infenitesimal del semigrupo S.

Observación 1.6.6. *Note que A es un operador lineal y $D(A)$ es un subespacio de X.*

Teorema 1.6.7. *Sea $(S(t))_{t\geqslant 0}$ un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Entonces,*

i) $\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_h^{t+h} S(s)xds = S(t)x, \quad \forall x \in X$

ii) $\int_0^t S(s)xds \in D(A), \quad \forall x \in X, \quad y \quad A\left(\int_0^t S(s)xds\right) = S(t)x - x$

iii) Para todo $x \in D(A)$, $S(t)x \in D(A)$ y $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$

iv) Para todo $x \in D(A)$, $S(t)x - S(s)x = \int_0^t AS(\tau)xd\tau = \int_0^t S(\tau)Axd\tau$

Demostración: Ver [23] pag. 4. □

Corolário 1.6.8. *Si A es un generador infenitesimal de un semigrupo de clase C_0, entonces A es cerrado y $\overline{D(A)} = X$.*

Demostración: Ver [23] pag. 5. □

Proposición 1.6.9. *Un operador cerrado con dominio denso es el generador infenitesimal de, en lo máximo, un semigrupo de clase C_0.*

Demostración: Ver [11] pag. 15. □

Definición 1.6.10. *Sean X espacio de Banach, X^* el dual de X y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la dualidad entre X y X^*. Para cada $x \in X$, defina*

$$J(x) = \{x^* \in X^*; \quad \langle x, x^*\rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2\}.$$

Note que, por el teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in X$.

Definición 1.6.11. *Una aplicación dualidad es una aplicación $j : X \to X^*$, tal que $j(x) \in J(x), \quad \forall x \in X$, o sea, $\langle x, j(x)\rangle = \|x\|^2 = \|j(x)\|^2$.*

Definición 1.6.12. *Decimos que el operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$ es disipativo si, para alguna aplicación dualidad j,*

$$Re\langle Ax, j(x)\rangle \leqslant 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Si, además, existe $\lambda > 0$, tal que $Im(\lambda I - A) = X$, entonces decimos que A es m-disipativo.

Observación 1.6.13. *Si X es un espacio de Hilbert, entonces decimos que $A : D(A) \subset X \to X$ es disipativo si*

$$Re\langle Ax, x\rangle \leqslant 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Notación: Decimos que $A \in G(M, w)$, cuando A es el generador infinitesimal de un grupo de clase C_0, S, que satisface

$$\|S(t)\| \leqslant Me^{wt}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Teorema 1.6.14. *(Lumer - Phillips) $A \in G(1,0)$ si, y solamente si, A es m-disipativo y posee dominio denso en X.*

Demostración: Ver [23] pag. 14. $\square$

Proposición 1.6.15. *Sea $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal donde X es un espacio de Banach. Si $\overline{D(A)} = X$, $\quad A$ y A^* son disipativos y A es cerrado (condición equivalente a $A^{**} = A$), entonces $A \in G(1,0)$.*

Demostración: Ver [23] pag. 15. $\square$

1.7. Problema de Cauchy Abstracto

Sea X espacio de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0, $(S(t))_{t \geqslant 0}$ y $f \in L^1(0, T; X)$.
Dado $u_0 \in D(A)$, el problema de Cauchy Abstracto consiste en determinar una función $u(t)$, tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{du}{dt}(t) & = & Au(t), \quad t > 0 \\ u(0) & = & u_0. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Definición 1.7.1. *Decimos que u es solución clásica (o fuerte) de (1.1) en $[0, +\infty)$, si u satisface (1.1) y $u \in C(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$.*

Teorema 1.7.2. *Si $A \in G(M, w)$ y $u_0 \in D(A)$, el problema (1.1) posee una única solución clásica*

Demostración: Ver [11] pag. 104. $\square$

Considere, ahora, el siguiente problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) &= Au(t) + f(t, u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0 \in X. \end{cases} \tag{1.2}$$

Definición 1.7.3. *Una función $u : [0, +\infty) \to X$ es una solución clásica de (1.2) en $[0, +\infty)$ si u satisface (1.2) en $[0, +\infty)$ y si $u \in C(\mathbb{R}; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$. Una función $u \in C([0, T]; X)$, dada por*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds,$$

es llamada de mild solution o solución generalizada de (1.2) en $[0, T]$.
Note que si $f \equiv 0$, entonces $u(t) = S(t)u_0, \quad u_0 \in X$, es una mild solution de (1.1).

Teorema 1.7.4. *Sea $f : [0, +\infty)] \times X \to X$ una función continua en t. Suponga que, para cada $\tau > 0$, existe una constante $L = L(\tau)$, tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant L\|x - y\|,$$

$\forall x, y \in X$ y $\forall t \in [0, \tau]$. Entonces, para cada $u_0 \in X$, (1.2) posee una única mild solution $u \in C([0, \tau]; X)$. Ademas, la aplicación $u_0 \longmapsto u$ es continua de X en $C([0, \tau]; X)$.

Demostración: Ver [11] pag. 124. $\square$

Capítulo 2

El problema lineal

En este capítulo, estableceremos una serie de estimativas a priori que serán usadas posteriormente. Para comenzar, vamos aplicar la Teoría Clásica de Semigrupos para demostrar la existencia y unicidad de soluciones del sistema lineal

$$\eta_t + \omega_x + \omega_{xxx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t \geqslant 0 \tag{2.1}$$

$$\omega_t + \eta_x + \eta_{xxx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t \geqslant 0, \tag{2.2}$$

con condiciones de frontera

$$\begin{cases} \omega(0,t) = 0, \quad \omega_x(0,t) = \alpha_0 \eta_x(0,t), \quad \omega_{xx}(0,t) = 0, \quad t > 0 \\ \omega(L,t) = \alpha_2 \eta(L,t), \quad \omega_x(L,t) = -\alpha_1 \eta_x(L,t), \quad \omega_{xx}(L,t) = -\alpha_2 \eta_{xx}(L,t), \quad t > 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

y condiciones iniciales

$$\eta(0,x) = \eta^0(x), \quad \omega(0,x) = \omega^0(x), \quad 0 < x < L. \tag{2.4}$$

Considere $X_0 = [L^2(I)]^2$, donde $I = (0,L)$ con su producto interno usual y el operador

$$A : D(A) \subset X_0 \to X_0$$

con dominio

$$\begin{aligned} D(A) \;=\; &\{(\eta,\omega)\in[H^3(I)]^2; \quad \omega(0)=0, \quad w(L)=\alpha_2\eta(L), \quad \omega_x(0)=\alpha_0\eta_x(0), \\ &\omega_x(L)=-\alpha_1\eta_x(L), \quad \omega_{xx}(0)=0, \quad \omega_{xx}(L)=-\alpha_2\eta_{xx}(L)\} \end{aligned}$$

y definido por

$$A(\eta,\omega)=(-\omega_x-\omega_{xxx},-\eta_x-\eta_{xxx}).$$

Observación 2.0.1. *Para describir el dominio del operador A, tenemos que analizar el problema de determinar (η,ω) satisfaciendo*

$$(\eta,\omega)\in X_0, \quad A(\eta,\omega)=(f,g)\in X_0,$$

con las condiciones de contorno arriba.

Proposición 2.0.2. *Si $\alpha_i \geqslant 0, \quad i=0,1,2,$ entonces A genera un semigrupo de contracciones lineales de clase $C_0, \quad (S(t))_{t\geqslant 0}$, en X_0.*

Demostración: La idea de la demostración es utilizar la Proposición 1.6.15.
Note que $\overline{D(A)} = X_0$, pues $\overline{C_c^\infty(I)} = L^2(I), \quad C_c^\infty(I)\times C_c^\infty(I) \subset D(A)$ y $\overline{C_c^\infty(I)\times C_c^\infty(I)} = L^2(I)\times L^2(I) = X_0$. Vamos a probar ahora que A y A^* son disipativos.

Primero, vamos a definir $D(A^*)$ y A^*. Note que, por definición, A^* es tal que $\langle y, Ax\rangle = \langle A^*y, x\rangle, \quad \forall x \in D(A)$ y $\forall y \in D(A^*)$. Luego, dados $(f,g)\in D(A)$ y

$(u,v) \in X_0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle (u,v), A(f,g)\rangle_{X_0} &= \langle (u,v), (-g_x - g_{xxx}, -f_x - f_{xxx})\rangle_{X_0} \\
&= \langle u, -g_x - g_{xxx}\rangle_{L^2(I)} + \langle v, -f_x - f_{xxx}\rangle_{L^2(I)} \\
&= -\int_0^L u g_x dx - \int_0^L u g_{xxx} dx - \int_0^L v f_x dx - \int_0^L v f_{xxx} dx \\
&= -(gu|_0^L - \int_0^L g u_x dx) - (g_{xx}u|_0^L - \int_0^L g_{xx} u_x dx) \\
&\quad -(fv|_0^L - \int_0^L f v_x dx) - (f_{xx}v|_0^L - \int_0^L f_{xx} v_x dx) \\
&= -g(L)u(L) + \int_0^L g u_x dx - g_{xx}(L)u(L) + (g_x u_x|_0^L \\
&\quad - \int_0^L g_x u_{xx} dx) - f(L)v(L) + \int_0^L f v_x dx - f_{xx}v|_0^L \\
&\quad +(f_x v_x|_0^L - \int_0^L f_x v_{xx} dx) \\
&= -g(L)u(L) + \int_0^L g u_x dx - g_{xx}(L)u(L) + g_x u_x|_0^L \\
&\quad -(g u_{xx}|_0^L - \int_0^L g u_{xxx} dx) - f(L)v(L) + \int_0^L f v_x dx \\
&\quad - f_{xx}v|_0^L + f_x v_x|_0^L - (f v_{xx}|_0^L - \int_0^L f v_{xxx} dx) \\
&= \int_0^L g(u_x + u_{xxx}) dx + \int_0^L f(v_x + v_{xxx}) dx - g(L)u(L) \\
&\quad - g_{xx}(L)u(L) + g_x u_x|_0^L - g(L)u_{xx}(L) - f(L)v(L) \\
&\quad - f_{xx}v|_0^L + f_x v_x|_0^L - f(L)v_{xx}(L) + f(0)v_{xx}(0).
\end{aligned}$$

Como $(f,g) \in D(A)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle (u,v), A(f,g)\rangle_{X_0} &= \int_0^L g(u_x + u_{xxx}) dx + \int_0^L f(v_x + v_{xxx}) dx - \alpha_2 f(L)u(L) \\
&\quad + \alpha_2 f_{xx}(L)u(L) - \alpha_1 f_x(L)u_x(L) - \alpha_0 f_x(0)u_x(0) - \alpha_2 f(L)u_{xx}(L) \\
&\quad - f(L)v(L) - f_{xx}v|_0^L + f_x(L)v_x(L) - f_x(0)v_x(0) - f(L)v_{xx}(L) \\
&\quad + f(0)v_{xx}(0).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \{(u,v) \in [H^3(I)]^2; \quad v(0)=0, v(L)=\alpha_2 u(L), v_x(0)=-\alpha_0 u_x(0), \\ &\quad v_x(L)=\alpha_1 u_x(L), v_{xx}(0)=0, v_{xx}(L)=-\alpha_2 u_{xx}(L)-2\alpha_2 u(L)\} \end{aligned}$$

y

$$A^* : D(A^*) \subset X_0 \to X_0$$

y dado por

$$A^*(u,v) = (v_x + v_{xxx}, u_x + u_{xxx}).$$

Por un proceso análogo a ese, podemos demostrar que

$$A^{**} = A,$$

o sea, A es cerrado.

Ahora vamos a demostrar que A es disipativo. Sea $(\eta, w) \in D(A)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\langle A(\eta,w),(\eta,w)\rangle_{X_0} &= \langle(-w_x - w_{xxx}, -\eta_x - \eta_{xxx}),(\eta,w)\rangle_{X_0} \\
&= \langle(-w_x - w_{xxx}, \eta)\rangle_{L^2(I)} + \langle(-\eta_x - \eta_{xxx}, w)\rangle_{L^2(I)} \\
&= -\int_0^L w_x \eta dx - \int_0^L w_{xxx}\eta dx - \int_0^L \eta_x w dx - \int_0^L \eta_{xxx} w dx \\
&= -\left(w\eta|_0^L - \int_0^L w\eta_x dx\right) - \left(w_{xx}\eta|_0^L - \int_0^L w_{xx}\eta_x dx\right) \\
&\quad - \int_0^L \eta_x w dx - \left(\eta_{xx} w|_0^L - \int_0^L \eta_{xx} w_x dx\right) \\
&= -w(L)\eta(L) - w_{xx}(L)\eta(L) + \left(w_x\eta_x|_0^L - \int_0^L w_x\eta_{xx} dx\right) \\
&\quad -w(L)\eta_{xx}(L) + \int_0^L \eta_{xx} w_x dx \\
&= -w(L)\eta(L) - w_{xx}(L)\eta(L) + w_x(L)\eta_x(L) - w_x(0)\eta_x(0) \\
&\quad -w(L)\eta_{xx}(L) \\
&= -\alpha_2|\eta(L)|^2 + \alpha_2\eta_{xx}(L)\eta(L) - \alpha_1|\eta_x(L)|^2 - \alpha_0|\eta_x(0)|^2 \\
&\quad -\alpha_2\eta(L)\eta_{xx}(L) \\
&= -\alpha_2|\eta(L)|^2 - \alpha_1|\eta_x(L)|^2 - \alpha_0|\eta_x(0)|^2 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

De forma análoga, tenemos que para cualquier $(u, v) \in D(A^*)$,

$$\langle A^*(u,v),(u,v)\rangle = -\alpha_2|u(L)|^2 - \alpha_1|u_x(L)|^2 - \alpha_0|u_x(0)|^2 \leqslant 0.$$

Así, A y A^* son disipativos. Por tanto, como $\overline{D(A)} = X_0$ y A es cerrado, tenemos que $A \in G(1, 0)$.

Como consecuencia del resultado arriba, tenemos el siguiente Teorema:

Teorema 2.0.3. *Si $(\eta_0, w_0) \in D(A)$, el sistema (2.1)-(2.4) posee una única solución clásica. Si $(\eta_0, w_0) \in X$, el sistema (2.1)-(2.4) posee una única mild solution.*

Demostración: Observe que, con las notaciones anteriores, el sistema (2.1)-(2.4) puede ser escrito como

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) & = & AU(t), \quad t > 0 \\ U(0) & = & U_0, \end{cases}$$

Donde $U = (\eta, w)$ y $U_0 = (\eta_0, w_0)$. Luego, el resultado es obtenido aplicando la Proposición 2.0.2, el Teorema 1.7.2 y el Teorema 1.7.4 ($f \equiv 0$).

La próxima Proposición nos provee estimativas útiles para la solución de (2.1) -(2.4). Las dos primeras son estimativas de energía padrón, mientras que la última revela el efecto regularizante de Kato.

Proposición 2.0.4. *Sean* $(\eta_0, w_0) \in X_0$ *y* $(\eta, w) = S(\cdot)(\eta_0, w_0)$. *Entonces, para todo* $T > 0$,

$$\int_0^L (|\eta_0(x)|^2 + |w_0(x)|^2)dx - \int_0^L (|\eta(x,T)|^2 + |w(x,T)|^2)dx \\ = 2\int_0^T \{\alpha_2|\eta(L,t)|^2 + \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\}dt, \tag{2.5}$$

$$\frac{T}{2}\int_0^L (|\eta_0(x)|^2 + |w_0(x)|^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L (|\eta|^2 + |w|^2)dxdt \\ + \int_0^T (T-t)\{\alpha_2|\eta(L,t)|^2 + \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\}dt. \tag{2.6}$$

Si, además, $\alpha_2 = 1$, *entonces* $(\eta, w) \in L^2(0,T;[H^1(I)]^2)$ *y*

$$\|(\eta, w)\|_{L^2(0,T;[H^1(I)]^2)} \leqslant C\|(\eta_0, w_0)\|_{X_0}, \tag{2.7}$$

donde $C = C(T)$ *es una constante positiva.*

Demostración: Sea $(\eta_0, w_0) \in D(A)$. Multiplicando la ecuación (2.1) por η, la ecuación (2.2) por w, sumando los resultados e integrando en $(0,L)\times(0,T)$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^L\int_0^T \eta_t\eta dtdx + \int_0^L\int_0^T w_x\eta dtdx + \int_0^L\int_0^T w_{xxx}\eta dtdx \\
&\quad + \int_0^L\int_0^T w_t w dtdx + \int_0^L\int_0^T \eta_x w dtdx + \int_0^L\int_0^T \eta_{xxx} w dtdx \\
&= \int_0^L\int_0^T \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\eta|^2 dtdx + \left(\int_0^T w\eta|_0^L dt - \int_0^T\int_0^L w\eta_x dxdt\right) \\
&\quad + \left(\int_0^T w_{xx}\eta|_0^L dt - \int_0^T\int_0^L w_{xx}\eta_x dxdt\right) + \int_0^L\int_0^T \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|w|^2 dtdx \\
&\quad + \int_0^L\int_0^T \eta_x w dtdx + \left(\int_0^T \eta_{xx} w|_0^L dt - \int_0^T\int_0^L \eta_{xx} w_x dxdt\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L (|\eta|^2 + |w|^2)|_0^T dx + \int_0^T w\eta|_0^L dt \\
&\quad - \left(\int_0^T w_x\eta_x|_0^L dt - \int_0^T\int_0^L w_x\eta_{xx} dxdt\right) - \int_0^T\int_0^L \eta_{xx} w_x dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L (|\eta(x,T)|^2 + |w(x,T)|^2)dx - \frac{1}{2}\int_0^L (|\eta_0|^2 + |w_0|^2)dx \\
&\quad + \int_0^T w(L,t)\eta(L,t)dt - \int_0^T w_x(L,t)\eta_x(L,t)dt + \int_0^T w_x(0,t)\eta_x(0,t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L (|\eta(x,T)|^2 + |w(x,T)|^2)dx - \frac{1}{2}\int_0^L (|\eta_0|^2 + |w_0|^2)dx \\
&\quad + \int_0^T \alpha_2|\eta(L,t)|^2 dt + \int_0^T \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2 dt + \int_0^T \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2.
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\int_0^L (|\eta_0|^2 + |w_0|^2)dx - \int_0^L (|\eta(x,T)|^2 + |w(x,T)|^2)dx\right) = \\
&\qquad \int_0^T \alpha_2|\eta(L,t)|^2 + \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2 dt
\end{aligned}
$$

lo que demuestra (2.5). $\square$

Para demostrar (2.6), multiplicamos (2.1) por $(T-t)\eta$, (2.2) por $(T-t)w$, sumando las dos identidades e integramos en $(0,L)\times(0,T)$. Luego, si $(\eta_0,w_0)\in D(A)$,

$$\int_0^T\int_0^L (T-t)\eta_t\eta dxdt + \int_0^T\int_0^L (T-t)w_x\eta dxdt + \int_0^T\int_0^L (T-t)w_{xxx}\eta dxdt$$
$$+\int_0^T\int_0^L (T-t)w_t w dxdt + \int_0^T\int_0^L (T-t)\eta_x w dxdt + \int_0^T\int_0^L (T-t)\eta_{xxx} w dxdt = 0$$

Y entonces, como

$$\int_0^T (T-t)\eta_t\eta dt = \int_0^T (T-t)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\eta|^2 dt = \frac{1}{2}|\eta|^2(T-t)|_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T |\eta|^2 dt,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{2}\int_0^L |\eta|^2(T-t)|_0^T dx + \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T |\eta|^2 dtdx\right) + \left(\int_0^T (T-t)w\eta|_0^L dt\right.\\
&\quad \left.-\int_0^L\int_0^T (T-t)w\eta_x dtdx\right) + \left(\int_0^T (T-t)w_{xx}\eta|_0^L dt - \int_0^L\int_0^T (T-t)w_{xx}\eta_x dtdx\right)\\
&\quad +\left(\frac{1}{2}\int_0^L |w|^2(T-t)|_0^T dx + \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T |w|^2 dtdx\right) + \int_0^T\int_0^L (T-t)\eta_x w dxdt\\
&\quad +\left(\int_0^T (T-t)\eta_{xx}w|_0^L dt - \int_0^T\int_0^L (T-t)\eta_{xx}w_x dxdt\right)\\
&= -\frac{T}{2}\int_0^L |\eta_0|^2 + |w_0|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T |\eta|^2 + |w|^2 dtdx\\
&\quad +\int_0^T (T-t)w(L,t)\eta(L,t)dt + \int_0^T (T-t)w_{xx}(L,t)\eta(L,t)dt\\
&\quad -\left(\int_0^T (T-t)w_x\eta_x|_0^L dt - \int_0^T\int_0^L (T-t)w_x\eta_{xx} dxdt\right)\\
&\quad +\int_0^T (T-t)\eta_{xx}(L,t)w(L,t)dt - \int_0^T\int_0^L (T-t)w_x\eta_{xx}w_x dxdt\\
&= -\frac{T}{2}\int_0^L |\eta_0|^2 + |w_0|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T |\eta|^2 + |w|^2 dtdx\\
&\quad +\int_0^T (T-t)\left\{\alpha_2|\eta(L,t)|^2 - \alpha_2\eta_{xx}(L,t)\eta(L,t) + \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\right.\\
&\quad \left.+\alpha_2\eta(L,t)\eta_{xx}(L,t)\right\} dt.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{T}{2}\int_0^L \left(|\eta_0|^2+|w_0|^2\right)dtdx &= \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T \left(|\eta|^2+|w|^2\right)dtdx \\ &+\int_0^T (T-t)\left\{\alpha_2|\eta(L,t)|^2+\alpha_1|\eta_x(L,t)|^2+\alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\right\}dt,\end{aligned}$$

lo que demuestra (2.6). $\square$

Finalmente, demostraremos (2.7).

Multiplicando (2.1) por xw, (2.2) por $x\eta$, integrando en $(O,L)\times(0,T)$ y sumando los resultados, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^L\int_0^T x\eta_t w dtdx+\int_0^L\int_0^T xw_x w dtdx+\int_0^L\int_0^T xw_{xxx}w dtdx \\ +\int_0^L\int_0^T xw_t\eta dtdx+\int_0^L\int_0^T x\eta_x\eta dtdx+\int_0^L\int_0^T x\eta_{xxx}\eta dtdx=0.\end{aligned}$$

Como $w_xw=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}|w|^2$, sigue que

$$\begin{aligned}\int_0^L\int_0^T x(\eta w)_t dtdx+\int_0^L\int_0^T \frac{x}{2}(|w|^2 &+ |\eta|^2)_x dtdx \\ &+ \int_0^L\int_0^T x(w_{xxx}w+\eta_{xxx}\eta)dtdx=0.(2.8)\end{aligned}$$

Por otro lado, haciendo integraciones por partes y usando la formula

$$w_{xxx}w=\frac{\partial}{\partial x}\left(w_{xx}w-\frac{1}{2}|w_x|^2\right),$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L\int_0^T x(w_{xxx}w+\eta_{xxx}\eta)dtdx = \int_0^T\int_0^L x\frac{\partial}{\partial x}\left(w_{xx}w+\eta_{xx}\eta-\frac{1}{2}\left(|w_x|^2+|\eta_x|^2\right)\right)dxdt\\
= &\int_0^T x[w_{xx}w+\eta_{xx}\eta-\frac{1}{2}(|w_x|^2+|\eta_x|^2)]_0^L dt-\int_0^T\int_0^L\left(w_{xx}w+\eta_{xx}\eta-\frac{1}{2}(|w_x|^2+|\eta_x|^2)\right)dxdt\\
= &\int_0^T L[w_{xx}(L,t)w(L,t)+\eta_{xx}(L,t)\eta(L,t)-\frac{1}{2}|w_x(L,t)|^2-\frac{1}{2}|\eta_x(L,t)|^2]dt\\
&-\int_0^T\int_0^L\left(w_{xx}w+|w_x|^2+\eta_{xx}\eta+|\eta_x|^2-\frac{3}{2}|w_x|^2-\frac{3}{2}|\eta_x|^2\right)dxdt\\
= &\int_0^T\left(-L\alpha_2^2\eta_{xx}(L,t)\eta(L,t)+L\eta_{xx}(L,t)\eta(L,t)-\frac{L}{2}\alpha_1^2|\eta_x(L,t)|^2-\frac{L}{2}|\eta_x(L,t)|^2\right)dt\\
&-\int_0^T(w_xw)|_0^L dt-\int_0^T(\eta_x\eta)|_0^L dt+\int_0^T\int_0^L\frac{3}{2}\left(|w_x|^2+|\eta_x|^2\right)dxdt\\
= &\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L\left(|w_x|^2+|\eta_x|^2\right)dxdt+\int_0^T L(1-\alpha_2^2)\eta_{xx}(L,t)\eta(L,t)dt\\
&-\int_0^T\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)|\eta_x(L,t)|^2dt-\int_0^T w_x(L,t)w(L,t)dt-\int_0^T\eta_x(L,t)\eta(L,t)dt\\
&+\int_0^T\eta_x(0,t)\eta(0,t)dt\\
= &\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L\left(|w_x|^2+|\eta_x|^2\right)dxdt+L(1-\alpha_2^2)\int_0^T\eta_{xx}(L,t)\eta(L,t)dt\\
&-\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T|\eta_x(L,t)|^2dt+\int_0^T\alpha_1\eta_x(L,t)\alpha_2\eta(L,t)dt-\int_0^T\eta_x(L,t)\eta(L,t)dt\\
&+\int_0^T\eta_x(0,t)\eta(0,t)dt\\
= &\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L\left(|w_x|^2+|\eta_x|^2\right)dxdt+(\alpha_1\alpha_2-1)\int_0^T\eta_x(L,t)\eta(L,t)dt\\
&+\int_0^T\eta_x(0,t)\eta(0,t)dt-\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T|\eta_x(L,t)|^2dt+L(1-\alpha_2^2)\int_0^T\eta_{xx}(L,t)\eta(L,t)dt.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^L\int_0^T x(w_{xxx}w+\eta_{xxx}\eta)dtdx &= \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L\left(|w_x|^2+|\eta_x|^2\right)dxdt+(\alpha_1\alpha_2-1)\int_0^T\eta_x(L,t)\eta(L,t)dt\\ &+\int_0^T\eta_x(0,t)\eta(0,t)dt-\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T|\eta_x(L,t)|^2dt\\ &+L(1-\alpha_2^2)\int_0^T\eta_{xx}(L,t)\eta(L,t)dt. \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Note que, por la desigualdad de Young y por el teorema 1.2.10, tenemos que, para todo $\delta>0$,

$$\begin{aligned}\int_0^T\eta_x(0,t)\eta(0,t)dt &= \int_0^T\sqrt{\delta}\eta(0,t)\frac{1}{\sqrt{\delta}}\eta_x(0,t)dt\\ &\leqslant \int_0^T\left(\frac{\delta\eta(0,t)^2}{2}+\frac{\eta_x(0,t)^2}{2\delta}\right)dt\\ &\leqslant C_1\delta\int_0^L\int_0^T(\eta^2+\eta_x^2)dtdx+\frac{1}{2\delta}\int_0^T\eta_x^2(0,t)dt \qquad (2.10)\end{aligned}$$

donde C_1 es una constante positiva. Luego, tomando $\delta>0$ de tal forma que $C_1\delta\leqslant\frac{1}{2}$, tenemos

$$\int_0^T\eta_x(0,t)\eta(0,t)dt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T(\eta^2+\eta_x^2)dtdx+\frac{1}{2\delta}\int_0^T\eta_x^2(0,t)dt$$

y, asumiendo que $\alpha_2=1$, de (2.9), obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^L\int_0^T x(w_{xxx}w+\eta_{xxx}\eta)dtdx &= \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L\left(|w_x|^2+|\eta_x|^2\right)dxdt+(\alpha_1-1)\int_0^T\eta_x(L,t)\eta(L,t)dt\\ &+\int_0^T\eta_x(0,t)\eta(0,t)dt-\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T|\eta_x(L,t)|^2dt.\end{aligned}$$

Reemplazando en (2.8), tenemos

$$\int_0^T\int_0^L x(\eta w)_t dxdt+\int_0^T\int_0^L\frac{x}{2}(w^2+\eta^2)_x dxdt+\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(w_x^2+\eta_x^2)dxdt$$
$$+(\alpha_1-1)\int_0^T\eta_x(L,t)\eta(L,t)dt+\int_0^T\eta_x(0,t)\eta(0,t)dt-\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T|\eta_x(L,t)|^2dt=0,$$

donde

$$\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L (w_x^2+\eta_x^2)dxdt = -\int_0^T\int_0^L x(\eta w)_t dxdt - \int_0^T\int_0^L \frac{x}{2}(w^2+\eta^2)_x dxdt$$
$$-(\alpha_1-1)\int_0^T \eta_x(L,t)\eta(L,t)dt - \int_0^T \eta_x(0,t)\eta(0,t)dt + \frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T |\eta_x(L,t)|^2 dt.$$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L (w_x^2+\eta_x^2)dxdt &= -\int_0^L (x\eta w)|_0^T dx - \int_0^T \frac{x}{2}(w^2+\eta^2)|_0^L dt \\ &+ \int_0^T\int_0^L \frac{w^2+\eta^2}{2}dxdt - (\alpha_1-1)\int_0^T \eta_x(L,t)\eta(L,t)dt \\ &- \int_0^T \eta_x(0,t)\eta(0,t)dt + \frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T |\eta_x(L,t)|^2 dt. \quad (2.11)\end{aligned}$$

Ahora, vamos estimar los términos que aparecen en el lado derecho de la identidad (2.11)

1.-

$$\int_0^T\int_0^L \frac{w^2+\eta^2}{2}dxdt \leqslant \int_0^T E(0)dt = TE(0),$$

donde

$$E(t) = \int_0^L \frac{w^2+\eta^2}{2}dx$$

es la energía total asociada al sistema.

2.-

$$\int_0^T \frac{x}{2}(w^2+\eta^2)|_0^L dt = \frac{L}{2}\int_0^T \left(w^2(L,t)+\eta^2(L,t)\right)dt = L\int_0^T \eta^2(L,t)dt,$$

por las condiciones de frontera.

3.-

$$
\begin{aligned}
-\int_0^L (x\eta w)|_0^T dx &= -\int_0^L x\eta(x,T)w(x,T)dx + \int_0^L x\eta_0(x)w_0(x)dx \\
&\leqslant L\int_0^L |\eta(x,T)||w(x,T)|dx + L\int_0^L \frac{w_0^2+\eta_0^2}{2}dx \\
&\leqslant L\int_0^L \frac{|\eta(x,T)|^2+|w(x,T)|^2}{2}dx + L\int_0^L \frac{w_0^2+\eta_0^2}{2}dx \\
&\leqslant LE(T) + L\int_0^L \frac{w_0^2+\eta_0^2}{2}dx \leqslant 2LE(0),
\end{aligned}
$$

pues la energía es disipativa.

4.-

$$
\begin{aligned}
-(\alpha_1-1)\int_0^T \eta_x(L,t)\eta(L,t)dt &\leqslant |\alpha_1-1|\int_0^T |\eta(L,t)||\eta_x(L,t)|dt \\
&\leqslant \frac{|\alpha_1-1|}{2}\int_0^T |\eta(L,t)|^2+|\eta_x(L,t)|^2dt.
\end{aligned}
$$

5.- Procediendo como en (2.10), tenemos

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T \eta(0,t)\eta_x(0,t)dt &\leqslant \int_0^T |\eta(0,t)||\eta_x(0,t)|dt \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L (|\eta|^2+|\eta_x|^2)dxdt + \frac{1}{2\delta}\int_0^T |\eta_x(0,t)|^2dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L |\eta|^2dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L |\eta_x|^2dxdt + \frac{1}{2\delta}\int_0^T |\eta_x(0,t)|^2dt \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L |\eta_x|^2dxdt + \int_0^T E(0)dt + \frac{1}{2\delta}\int_0^T |\eta_x(0,t)|^2dt \\
&= TE(0) + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L |\eta_x|^2dxdt + \frac{1}{2\delta\alpha_0}\int_0^T \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2dt
\end{aligned}
$$

Así, los términos de frontera en (2.11) pueden ser estimados como sigue

$$
\begin{aligned}
&\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T \eta_x^2(L,t)dt-(\alpha_1-1)\int_0^T \eta(L,t)\eta_x(L,t)dt-\int_0^T \eta(0,t)\eta_x(0,t)dt\\
&-\int_0^T \frac{x}{2}(w^2+\eta^2)|_0^L dt\\
&\leqslant \frac{L}{2}\frac{(\alpha_1^2+1)}{\alpha_1}\int_0^T \alpha_1\eta_x^2(L,t)dt+\frac{|\alpha_1-1|}{2}\int_0^T |\eta(L,t)|^2dt\\
&+\frac{|\alpha_1-1|}{2\alpha_1}\int_0^T \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2dt+TE(0)+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \eta_x^2dxdt+\frac{1}{2\delta\alpha_0}\int_0^T \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2dt\\
&\leqslant TE(0)+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \eta_x^2dxdt+K\int_0^T \left(|\eta(L,t)|^2+\alpha_1|\eta_x(L,t)|^2+\alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\right)dt,
\end{aligned}
$$

donde $K=\text{máx}\left\{\frac{L(\alpha_1^2+1)}{2\alpha_1},\frac{|\alpha_1-1|}{2\alpha_1},\frac{|\alpha_1-1|}{2},\frac{1}{2\delta\alpha_0}\right\}>0$. Combinando las estimativas arriba con (2.11), se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L w_x^2+\eta_x^2dxdt &\leqslant 2LE(0)+TE(0)+TE(0)+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \eta_x^2dxdt\\
&+K\int_0^T \left(|\eta(L,t)|^2+\alpha_1|\eta_x(L,t)|^2+\alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\right)dt.
\end{aligned}
$$

Luego, por (2.5), tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L w_x^2+\eta_x^2dxdt &\leqslant (2L+2T)E(0)+\frac{K}{2}\int_0^L(|\eta_0|^2+|w_0|^2)dx\\
&-\frac{K}{2}\int_0^L(|\eta(x,T)|^2+|w(x,T)|^2)dx\\
&\leqslant (2L+2T+K)E(0).
\end{aligned}
$$

Tomando $C_1:=(2L+2T+K)$, obtenemos las siguientes estimativas

$$
\int_0^T\int_0^L w_x^2+\eta_x^2dxdt\leqslant C_1E(0)=C_1\int_0^L\frac{|\eta_0|^2+|w_0|^2}{2}dx. \tag{2.12}
$$

Portando, tenemos, por (2,6) y (2.12), que

$$\begin{aligned}
\|(\eta,w)\|^2_{L^2(0,T;[H^1(I)]^2)} &= \int_0^T \|(\eta,w)\|^2_{[H^1(I)]^2}dt = \int_0^T \|\eta\|^2_{H^1(I)}dt + \int_0^T \|w\|^2_{H^1(I)}dt \\
&= \int_0^T\int_0^L |\eta|^2+|w|^2dxdt + \int_0^T\int_0^L |\eta_x|^2+|w_x|^2dxdt \\
&= T\int_0^L |\eta_0|^2+|w_0|^2dx - 2\int_0^T (T-t)\left\{|\eta(L,t)|^2+\alpha_1|\eta_x(L,t)|^2\right. \\
&\quad \left.+\alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\right\}dt + \int_0^T\int_0^L |\eta_x|^2+|w_x|^2dxdt \\
&\leqslant T\int_0^L |\eta_0|^2+|w_0|^2dx + C_1\int_0^L \frac{|\eta_0|^2+|w_0|^2}{2}dx \\
&= \left(T+\frac{C_1}{2}\right)\int_0^L |\eta_0|^2+|w_0|^2dx,
\end{aligned}$$

O sea, si $C := T + \frac{C_1}{2}$, entonces tenemos que

$$\|(\eta,w)\|_{L^2(0,T;[H^1(I)]^2)} \leqslant \sqrt{C}\|(\eta_0,w_0)\|_{X_0}.$$

Por la densidad de $D(A)$ en X_0, el resultado se extiende para $(\eta_0,w_0)\in X_0$ arbitrario. De hecho, si $(\eta_0,w_0)\in X_0$, existe una sucesión $(\eta_0^n,w_0^n)\subset D(A)$, tal que $(\eta_0^n,w_0^n)\to(\eta_0,w_0)$ en X_0, cuando $n\to+\infty$. Considerando (η^n,w^n) una sucesión de soluciones asociadas a (η_0^n,w_0^n), la desigualdad e arriba nos dice que tal sucesión es de Cauchy en $L^2(0,T;[H^1(I)]^2)$ y, por la identidad de energía, tenemos el mismo resultado en $C([0,T];X_0)$. Con eso, podemos pasar el límite en el sistema lineal y obtener una función $(\widetilde{\eta},\widetilde{w})\in C([0,T];X_0)\cap L^2(0,T;[H^1(I)]^2)$ que es solución débil del modelo.Luego por la unicidad del límite, $(\widetilde{\eta},\widetilde{w})=(\eta,w)$ (Ver [3]). Así, podemos pasar el límite en (2.5) -(2.7) y obtener el resultado. El mismo argumento, conjuntamente con los argumentos usados en [4], nos permite justificar que los términos de frontera están bien definidos.

Ahora estamos listos para probar la estabilidad exponencial del sistema lineal.

Teorema 2.0.5. *Asuma que* $\alpha_0\geqslant 0,\quad \alpha_1>0$ *y* $\alpha_2=1$. *Entonces, existen constantes*

$C_0 > 0$ y $\mu_0 > 0$, tal que, para cualquier $(\eta_0, w_0) \in X_0$, la solucion de (2.1) -(2.4) satisface

$$\|(\eta(t), w(t))\|_{X_0} \leqslant C_0 e^{-\mu_0 t} \|(\eta_0, w_0\|_{X_0}, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2.13}$$

Demostración: Primeramente basta probar que existe $C > 0$, tal que

$$\|(\eta_0, w_0\|_{X_0}^2 \leqslant C \int_0^T \left(|\eta(L,t)|^2 + \alpha_1 |\eta_x(L,t)|^2 + \alpha_0 |\eta_x(0,t)|^2\right) dt. \tag{2.14}$$

De hecho, demostrado esto, si denotamos
$A(t) := |\eta(L,t)|^2 + \alpha_1 |\eta_x(L,t)|^2 + \alpha_0 |\eta_x(0,t)|^2 > 0, \quad t \geqslant 0$, entonces

$$\begin{aligned} E'(t) &= -A(t), \quad A(t) > 0 \\ E(0) &\leqslant C \int_0^T A(t) dt, \end{aligned}$$

donde $E(t)$ denota la energía asociada al sistema lineal. Luego, integrando en $[0, T]$, tenemos

$$\begin{aligned} E(T) - E(0) &= -\int_0^T A(t) dt \\ &\leqslant -\frac{E(0)}{C} \end{aligned}$$

o sea,

$$E(T) \leqslant E(0) - \frac{E(0)}{C} \leqslant E(0) - \frac{E(T)}{C},$$

donde

$$\left(1 + \frac{1}{C}\right) E(T) \leqslant E(0),$$

esto es,

$$E(T) \leqslant \left(\frac{C}{C+1}\right) E(0).$$

Así, el semigrupo decae exponencialmente. Para ver este hecho vamos a usar el siguiente resultado:

Si existe $T > 0$ y $\gamma \in (0,1)$, tal que $E(T) < \gamma E(0)$, entonces

$$E(t) \leqslant \frac{1}{\gamma} E(0) e^{\left(\frac{\ln \gamma}{T}\right)t}, \quad t \geqslant 0.$$

De hecho, por inducción, tenemos que $E(kT) < \gamma^k E(0), \quad k \in \mathbb{N}$ y como $E(t) \leqslant E(kT)$, para $kT < t < (k+1)T$, tenemos que $E(t) \leqslant E(kT) \leqslant \gamma^k E(0)$. Así, como $kT < t < (k+1)T$, tenemos $\frac{t}{T} < k+1$, esto es, $\frac{t}{T} - 1 < k$, donde $\gamma^k < \gamma^{\frac{t}{T}-1}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} E(t) &\leqslant E(kT) \leqslant \gamma^k E(0) < \gamma^{\frac{t}{T}-1} E(0) = \frac{1}{\gamma} E(0) \gamma^{\frac{t}{T}} \\ &= \frac{1}{\gamma} E(0) e^{\ln\left(\gamma^{\frac{t}{T}}\right)} = \frac{1}{\gamma} E(0) e^{\ln\left(\gamma^{\frac{1}{T}}\right)t} = \frac{1}{\gamma} E(0) e^{\frac{1}{T}\ln(\gamma)t}, \end{aligned}$$

lo que demuestra el resultado. □

Ahora, como $\frac{C}{C+1} \in (0,1)$, entonces $\ln\left(\frac{C}{C+1}\right) < 0$. Luego, $\exists \mu_0 > 0$, tal que $\frac{1}{T}\ln\left(\frac{C}{C+1}\right) = -\mu_0$ y, por el resultado de arriba, tenemos que

$$\begin{aligned} E(t) &= \|(\eta(t), w(t))\|^2_{X_0} \leqslant \left(1 + \frac{1}{C}\right) E(0) e^{-\mu_0 t} \\ &= \left(1 + \frac{1}{C}\right) \|(\eta_0, w_0)\|^2_{X_0} e^{-\mu_0 t}, \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

lo que demuestra el Teorema 2.0.5. □

Vamos a demostrar (2.14) en tres pasos:

PASO 1: (Argumento de Compacidad-Unicidad)

Vamos argumentar por contradicción, aplicando argumentos de Compacidad-Unicidad (Ver [13]). Si (2.14) fuese falso, existiría una sucesión de datos iniciales (η_0^n, w_0^n) en X_0, tal que

$$\begin{aligned} \|(\eta_0^n, w_0^n)\|_{X_0}^2 &= \int_0^L \left(|\eta_0^n|^2 + |w_0^n|^2\right) dx \\ &> n \int_0^T \left(|\eta^n(L,t)|^2 + \alpha_1 |\eta_x^n(L,t)|^2 + \alpha_0 |\eta_x^n(0,t)|^2\right) dt \end{aligned} \tag{2.15}$$

con

$$\|(\eta_0^n, w_0^n)\|_{X_0} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, por (2.7) y (2.15), tenemos que

$$\|(\eta^n, w^n)\|_{L^2(0,T;[H^1(I)]^2)} \leqslant C \|(\eta_0^n, w_0^n)\|_{X_0} = C,$$

o sea,

$$(\eta^n, w^n) = S(\cdot)(\eta_0^n, w_0^n) \quad \text{es limitada en} \quad L^2(0,T;[H^1(I)]^2).$$

Note que por (2.1) y (2.2),

$$\begin{aligned} \eta_t^n &= -w_x^n - w_{xxx}^n \\ w_t^n &= -\eta_x^n - \eta_{xxx}^n. \end{aligned}$$

Además, sabemos que dada un función $u \in L^2(0,T;H_0^1(I))$, tenemos

$u_x(\cdot,t) \in L^2(I), \quad u_{xx}(\cdot,t) \in H^{-1}(I)$ y $u_{xxx}(\cdot,t) \in H^{-2}(I)$. Luego, la sucesión

$$(\eta_t^n, w_t^n) \quad \text{es limitada en} \quad L^2(0,T;[H^{-2}(I)]^2).$$

Así, como $[H^1(I)]^2 \hookrightarrow_c [L^2(I)]^2 \hookrightarrow [H^{-2}(I)]^2$ y $[H^1(I)]^2$ y $[H^{-2}(I)]^2$ son reflexivos, si denotamos

$$W = \left\{(\eta,w) \in L^2(0,T;[H^1(I)]^2)\right\}; \quad (\eta_t, w_t) \in L^2(0,T;[H^{-2}(I)]^2),$$

entonces $W \hookrightarrow_c L^2(0,T;X_0)$, por el Teorema de Aubin-Lions. Luego, el conjunto $\{(\eta^n,w^n); n \in \mathbb{N} \subset W\}$ es relativamente compacto en $L^2(0,T;X_0)$ y, entonces (η^n,w^n) posee una subsucesión, que vamos continuar denotando por (η^n,w^n), tal que

$$(\eta^n,w^n) \to (\eta,w) \quad \text{en} \quad L^2(0,T;X_0), \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty. \tag{2.16}$$

Note también que, por (2.6),

$$\begin{aligned}\frac{T}{2}\int_0^L (|\eta_0^n|^2 + |w_0^n|^2)dx &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L (|\eta^n|^2 + |w^n|^2)dxdt \\ &+ \int_0^T (T-t)\left\{|\eta^n(L,t)|^2 + \alpha_1|\eta_x^n(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x^n(0,t)|^2\right\}dt,\end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned}\int_0^L (|\eta_0^n|^2 + |w_0^n|^2)dx &\leqslant \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L (|\eta^n|^2 + |w^n|^2)dxdt \\ &+2\int_0^T \left\{|\eta^n(L,t)|^2 + \alpha_1|\eta_x^n(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x^n(0,t)|^2\right\}dt,\end{aligned}$$

Así, sigue de (2.15) y (2.16) que (η_0^n, w_0^n) es una sucesión de Cauchy en X_0, donde existe $(\eta_0,w_0) \in X_0$, tal que

$$(\eta_0^n, w_0^n) \to (\eta_0, w_0) \quad \text{en} \quad X_0, \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty.$$

Por otro lado, como (η^n, w^n) es limitada en $L^\infty(0,T;[L^2(I)]^2)$ y (η_t^n, w_t^n) es limitada en $L^2(0,T;[H^{-2}(I)]^2)$, obtenemos que existe una subsecuencia (η^n, w^n), tal que

$$(\eta^n, w^n) \to (\eta, w) \quad \text{en} \quad C(0,T;[H^{-1}(I)]^2), \quad \forall T>0.$$

En particular,

$$(\eta, w)(0) = \lim_{n\to+\infty} (\eta^n, w^n)(0) = \lim_{n\to+\infty} (\eta_0^n, w_0^n) = (\eta_0, w_0).$$

Así, como $(\eta, w) \in L^\infty(0,T;[L^2(I)]^2) \cap C_w(0,T;[H^{-1}(I)]^2)$, tenemos por el Teorema 1.4.5, que

$$(\eta, w) \in C_w(0,T;[L^2(I)]^2).$$

Consecuentemente, pasando el límite débil en el sistema, obtenemos, por unicidad, que

$$(\eta, w) = S(\cdot)(\eta_0, w_0) \quad \text{y} \quad \|(\eta_0, w_0)\|_{X_0} = 1.$$

Además, por (2.15), tenemos que

$$\int_0^T \left(|\eta^n(L,t)|^2 + \alpha_1|\eta_x^n(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x^n(0,t)|^2\right) dt < \frac{1}{n}\int_0^L (|\eta_0^n|^2 + |w_0^n|^2)dx$$

donde, haciendo $n \to +\infty$, obtenemos

$$\int_0^T \left(|\eta(L,t)|^2 + \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\right) dt = 0$$

o sea,

$$\eta(L,\cdot) = \alpha_1\eta_x(L,\cdot) = \alpha_0\eta_x(0,\cdot) = 0, \quad \text{en} \quad L^2(0,T). \tag{2.17}$$

Con eso, los próximos pasos consisten en demostrar que el dato inicial dado arriba es idénticamente nulo.

PASO 2: (Reducción a un problema espectral)

Vamos a utilizar un argumento semejante al usado en [24] (Lemma 3.4) y en [18] (Lema3.2).

Lema 2.0.6. *Dado $T > 0$, sea N_T el espacio de todos los datos iniciales $(\eta_0, w_0) \in X_0$, tal que la solución correspondiente $(\eta, w) = S(\cdot)(\eta_0, w_0)$ de (2.1)-(2.4) satisfaga (2.17). Si $N_T \neq \phi$, para algun $T > 0$, entonces existen $\lambda \in \mathbb{C}$ y $(\eta_0, w_0) \in [H^3(0, L; \mathbb{C})]^2$, tal que*

$$\lambda\eta_0 + w_0' + w_0''' = 0 \tag{2.18}$$

$$\lambda w_0 + \eta_0' + \eta_0''' = 0 \tag{2.19}$$

$$w_0(0) = w_0'(0) = w_0''(0) = 0 \tag{2.20}$$

$$w_0(L) = w_0'(L) = 0 \tag{2.21}$$

$$w_0''(L) = -\eta_0''(L) \tag{2.22}$$

$$\alpha_0\eta_0'(0) = \alpha_1\eta_0'(L) = \eta_0(L) = 0. \tag{2.23}$$

Observación 2.0.7. *Notemos que encontrar $\lambda \in \mathbb{C}$ y $(\eta_0, w_0) \in [H^3(0, L; \mathbb{C})]^2$, $(\eta_0, w_0) \neq (0, 0)$, significa encontrar un autovalor y un autovector para el operador $A(\eta, w) = (-w_x - w_{xxx}, -\eta_x - \eta_{xxx})$ asociado al problema.*

Demostración: Vamos a demostrar que:

1. $\dim(N_T) < +\infty$;

2. $N_T \subset D(A)$;

3. $A(N_T) \subset N_T$.

De hecho, observe que, mostrado esto, $A : \overline{N_T} \to \overline{N_T}$, donde $\overline{N_T}$ es una complexificación de N_T, será un operador lineal definido en un espacio de dimensión finita, con $N_T \neq \phi$. Luego, A poseerá un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ y existirá $(\eta_0, w_0) \in [H^3(0, L; \mathbb{C})]^2$

con $(\eta_0, w_0) \neq (0,0)$, satisfaciendo $A(\eta_0, w_0) = \lambda(\eta_0, w_0)$, o sea, satisfaciendo (2.18)-(2.23).

1) Mostremos que $\overline{B_1(0)}$ es un subconjunto compacto de N_T. De hecho, si (η_0^n, w_0^n) es una sucesión en la bola unitaria $\{(\eta_0, w_0) \in N_T; \quad \|(\eta_0, w_0)\|_{X_0} \leqslant 1\}$, podemos utilizar el mismo argumento usado en el PASO 1 para concluir que (η_0^n, w_0^n) posee una subsucesión convergente en X_0, o sea, la bola unitaria es un subconjunto compacto de N_T, subespacio normado de X_0, o sea, la bola unitaria es un subconjunto compacto de N_T, subespacio normado de X_0. Luego, por el Teorema 1.5.2, N_T posee dimensión finita.

2)Primeramente, observe que si $T_1 < T_2$, entonces $N_{T_2} \subset N_{T_1}$, donde
$\dim(N_{T_2}) \leqslant \dim(N_{T_1})$. De hecho, si $(\eta_0, w_0) \in N_{T_2}$, entonces la solución correspondiente de (2.1)-(2.4) satisface (2.17), o sea, la solución correspondiente de (2.1)-(2.4) satisface

$$\eta(L,\cdot) = \alpha_1 \eta_x(L,\cdot) = \alpha_0 \eta_x(0,\cdot) = 0 \quad \text{en} \quad L^2(0,T_2).$$

En particular, como $T_1 < T_2$, la solución correspondiente también satisface

$$\eta(L,\cdot) = \alpha_1 \eta_x(L,\cdot) = \alpha_0 \eta_x(0,\cdot) = 0 \quad \text{en} \quad L^2(0,T_1).$$

donde $(\eta_0, w_0) \in N_{T_1}$.

Así, la aplicación $T \longmapsto \dim(N_T)$, definida en $\mathbb{R}^+$ a valores en $\mathbb{N}$, es no creciente y, entonces, existen T y $\varepsilon > 0$, tal que $\dim(N_t) = \dim(N_T), \forall \in [T, T+\varepsilon]$.
Vamos a demostrar que $N_T \subset D(A)$.
Sea $(\eta_0, w_0) \in N_T$, $\quad (\eta, w) = S(\cdot)(\eta_0, w_0)$, la solución correspondiente, y $0 < t < \varepsilon$.
Como $S(\tau)(S(t)(\eta_0, w_0)) = S(\tau + t)(\eta_0, w_0)$, para $0 \leqslant \tau \leqslant T$ y
$(\eta_0, w_0) \in N_{T+\varepsilon} = N_T$, tenemos que $S(t)(\eta_0, w_0) \in N_T$, o sea, la solución

correspondiente $(\widetilde{\eta},\widetilde{w}) := S(\cdot)(S(t)(\eta_0,w_0))$ satisface

$$\widetilde{\eta}(L,\cdot) = \alpha_1\widetilde{\eta}_x(L,\cdot) = \alpha_0\widetilde{\eta}_x(0,\cdot) = 0 \quad \text{en} \quad L^2(0,T).$$

Entonces,

$$\frac{S(\tau)(\eta_0,w_0)-(\eta_0,w_0)}{\tau} \in N_T, \tag{2.24}$$

para τ suficientemente pequeño. de hecho

$$\frac{S(\tau)(\eta_0,w_0)-(\eta_0,w_0)}{\tau} \in X_0,$$

y la función

$$\begin{aligned}(\overline{\eta},\overline{w}) &:= S(\cdot)\left(\frac{S(\tau)(\eta_0,w_0)-(\eta_0,w_0)}{\tau}\right) = \frac{S(\cdot)(S(\tau)(\eta_0,w_0)) - S(\cdot)((\eta_0,w_0))}{\tau}\\ &= \frac{(\widetilde{\eta},\widetilde{w})-(\eta,w)}{\tau},\end{aligned}$$

es solución del problema y satisface

$$\overline{\eta}(L,\cdot) = \alpha_1\overline{\eta}_x(L,\cdot) = \alpha_0\overline{\eta}_x(0,\cdot) = 0 \quad \text{en} \quad L^2(0,T).$$

Note, también, que

$$(\eta_0,w_0) \in D(A) \Leftrightarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)(\eta_0,w_0)-(\eta_0,w_0)}{t} \quad \text{existe en} \quad [L^2(I)]^2.$$

Vamos a mostrar que el límite de arriba existe.
Defina $M_T := \{(\widetilde{\eta},\widetilde{w}) = S(\tau)(\widetilde{\eta}_0,\widetilde{w}_0);\quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \quad (\widetilde{\eta}_0,\widetilde{w}_0) \in N_T\}$. Observe que $M_T \subset C([0,T];[L^2(I)]^2)$ y que dado $(\eta,w) \in M_T$, $\quad (\eta,w) \in H^1(0,T+\varepsilon;[H^{-2}(I)]^2)$. Luego, existe el límite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(\eta,w)(t+\cdot)-(\eta,w)}{t} = (\eta',w')(\cdot) \quad \text{en} \quad L^2(0,T;[H^{-2}(I)]^2).$$

Por otro lado, por (2.24) tenemos

$$\frac{(\eta, w)(t+\cdot) - (\eta, w)}{t} \in M_T, \quad \text{para} \quad 0 < t < \varepsilon.$$

Además, note que $\dim(M_T) < \infty$, por un argumento análogo al usado para demostrar que $\dim(N_T) < \infty$. Así, tenemos que M_T es un subespacio de $[L^2(0,T;H^{-2}(I))]^2$ que posee dimensión finita, donde M_T es cerrado en $[L^2(0,T;H^{-2}(I))]^2$.
Luego, $(\eta', w') \in M_T \subset [C([0,T];L^2(I))]^2$, o sea, $(\eta, w) \in [C^1([0,T];L^2(I))]^2$. Por tanto, el límite

$$(\eta', w')(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{(\eta, w)(t) - (\eta, w)(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)(\eta_0, w_0) - (\eta_0, w_0)}{t},$$

existe en $X_0 = [L^2(I)]^2$, o sea, $(\eta_0, w_0) \in D(A)$.
3)De hecho, como $dim(N_T) < \infty$ y N_T es un subespacio de X_0, sigue que N_T es cerrado en X_0. Luego, dado $U_0 \in N_T$,

$$AU_0 = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)U_0 - U_0}{t} \in N_T.$$

Por tanto, $A(N_T) \subset N_T$.
Para llegar a la contradicción, vamos a demostrar que la única solución de (2.18)-(2.23) es la solucion idénticamente nula. Con eso, por un lado, tenemos que el dato inicial posee norma 1, y por otro lado, el dato inicial es idénticamente nulo, lo que generaría una contradicción.

PASO 3: (Existencia de solucion trivial para el problema espectral)

Lema 2.0.8. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $(\eta_0, w_0) \in [H^3(0,L;\mathbb{C})]^2$ satisfaciendo (2.18)-(2.23). Entonces, $\eta_0 = w_0 = 0$.*

Demostración: De hecho, sea $v := \eta_0 + w_0$ en $[0,L]$. Luego, por (2.18)-(2.19) y

(2.21)-(2.23), v satisface la siguiente EDO

$$\begin{cases} \lambda v + v' + v''' = 0 \\ v(L) = v'(L) = v''(L) = 0. \end{cases}$$

Definiendo $Z = \begin{pmatrix} v \\ v' \\ v'' \end{pmatrix}$, tenemos que $Z' = \begin{pmatrix} v' \\ v'' \\ v''' \end{pmatrix}$, donde $Z' = \begin{pmatrix} v' \\ v'' \\ -\lambda v - v' \end{pmatrix}$, o sea, Z satisface

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix} Z, \quad Z(L) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, si $F(x, Z) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix} Z$, tenemos que F es Lipschitz en Z (ya que F es lineal). Entonces, por el Teorema de Picard, existe una única función $Z : [0, L] \to \mathbb{R}^3$, solución del problema de valor inicial arriba.

Más, observe que $Z(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\forall x \in [0, L]$, también es solución del mismo problema. Luego, por unicidad, $v \equiv 0$ en $[0, L]$.

Así, $\eta_0 \equiv -w_0$ en $[0, L]$ y, entonces, por (2.18)-(2.20), tenemos que

$$\begin{cases} \lambda w_0 + w_0' + w_0''' = 0 \\ w_0(0) = w_0'(0) = w_0''(0) = 0, \end{cases}$$

que tiene como única solución $w_0 \equiv 0$. Luego, $(\eta_0, w_0) = (0, 0)$ en $[0, L]$.

Por tanto, por el PASO 1, tenemos que existe $(\eta_0, w_0) \in X_0$, con $\|(\eta_0, w_0)\| = 1$, tal que la solución correspondiente de (2.1)-(2.4) satisface (2.17), o sea, $(\eta_0, w_0) \in N_T$, donde, por el Lema 2.0.6, existen $\lambda \in \mathbb{C}$ y $(\widetilde{\eta}_0, \widetilde{w}_0) \in [H^3(0,L;\mathbb{C})]^2$, con $(\widetilde{\eta}_0, \widetilde{w}_0) \neq (0,0)$ satisfaciendo (2.18)-(2.23). Por otro lado, por el Lema 2.0.8, $(\widetilde{\eta}_0, \widetilde{w}_0) = (0,0)$, lo que es una contradicción.

Observación 2.0.9. *Note que si $\alpha_1 = 0$, el decaimiento exponencial (2.13) no siempre es valido. De hecho, cuando $L = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{N}^*$, tenemos que $(\lambda, \eta_0, w_0) := (0, sen(x-L), 0)$ satisfaciendo (2.18)-(2.23) y, ademas,*

$$\frac{dE}{dt} = -|\eta(L,t)|^2 - \alpha_0 |\eta_x(0,t)|^2 = 0,$$

donde $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (\eta^2 + w^2)dx$ es la energía asociada al sistema (2.1)-(2.4). Luego, $E(t) = E(0) = \frac{L}{2}$, o sea, la energía no es disipativa. Un fenómeno similar fue probado en [24] para la KdV.

Definición 2.0.10. *Para $s \in [0,3]$, defina X_s como siendo el espacio de las funciones $(\eta, w) \in [H^s(I)]^2$ que satisfacen las condiciones de s-compatibilidad*

$$\begin{aligned}
&w(0) = 0 \quad y \quad w(L) = \eta(L), \quad cuando \quad \frac{1}{2} < s \leqslant \frac{3}{2}, \\
&w(0) = 0 \quad y \quad w(L) = \eta(L), \quad w'(0) = \alpha_0 \eta'(0), \quad w'(L) = -\alpha_1 \eta'(L), \\
&w''(0) = 0 \quad y \quad w''(L) = -\eta''(L), \quad cuando \quad \frac{5}{2} < s \leqslant 3,
\end{aligned}$$

unido de la norma Hilbertiana

$$\|(\eta, w)\|_{X_s}^2 = \|\eta\|_{H^s(I)}^2 + \|w\|_{H^s(I)}^2.$$

Luego, por el Teorema 2.0.5 arriba y por algunos argumentos de interpolación de espacios, tenemos el siguiente corolario:

Corolário 2.0.11. *Sean α_0, α_1 y α_2 como en el Teorema 2.0.5. Entonces, para $s \in [0,3]$, existen $C_s > 0$ y $\mu_0 > 0$, tal que para cualquier $(\eta_0, w_0) \in X_s$, la solución correspondiente (η, w) de (2.1)-(2.4) pertenece a $C(\mathbb{R}^+; X_s)$ y satisface*

$$\|\eta(t), w(t)\|_{X_s} \leqslant C_s e^{-\mu_0 t} \|(\eta_0, w_0)\|_{X_s}. \tag{2.25}$$

Demostración: Primeramente observe que, por el Teorema 2.0.5, (2.25) ya fue demostrado en el caso $s = 0$, Vamos a demostrar en el caso $s = 3$.
Sea $U_0 = (\eta_0, w_0) \in X_3 = D(A)$ y defina $U(t) = (\eta(t), w(t)) = S(t)U_0, \quad t \geqslant 0$, donde $(S(t))_{t\geqslant 0}$ es el semigrupo generado por A. Luego, si $V(t) := U_t(t)$, entonces V satisface el problema

$$\begin{cases} V_t(t) = AU_t(t) = AV(t) \\ V(0) = AU(0) = AU_0 =: V_0, \end{cases}$$

con $AU_0 \in X_0$.
Así, por el Teorema 2.0.5, existen constantes C_0 y $\mu_0 > 0$, tal que

$$\|V(t)\|_{X_0} \leqslant C_0 e^{-\mu_0 t} \|V_0\|_{X_0}, \quad t \geqslant 0.$$

Como $V(t) = AU(t)$ y $V_0 = AU_0$, tenemos que

$$\|AU(t)\|_{X_0} \leqslant C_0 e^{-\mu_0 t} \|AU_0\|_{X_0}, \quad t \geqslant 0.$$

Por otro lado, como $U_0 = (\eta_0, w_0) \in X_3 = D(A) \subset X_0$ y $U(t) = S(t)U_0$, tenemos que, por el Teorema 2.0.5,

$$\|U(t)\|_{X_0} \leqslant C_0 e^{-\mu_0 t} \|U_0\|_{X_0}, \quad t \geqslant 0.$$

Portando, como las normas $\|U\|_{X_3}$ y $\|U\|_{X_0} + \|AU\|_{X_0}$ son equivalentes, concluimos que

$$\|U\|_{X_3} \leqslant C_0 e^{-\mu_0 t} \|U_0\|_{X_0} + C_0 e^{-\mu_0 t} \|AU_0\|_{X_0} = C_0 e^{-\mu_0 t} \left(\|U_0\|_{X_0} + \|AU_0\|_{X_0} \right),$$

donde,

$$\|U\|_{X_3} \leqslant C_0 e^{-\mu_0 t} \|U_0\|_{X_3}, \quad t \geqslant 0.$$

Así, como $X_s = [X_0, X_3]_{\frac{s}{3}}, \quad 0 < s < 3$, y $S(t) : X_s \to X_s$, sigue de la teoría de la interpolación (Ver [26], Capitulo 5), que existe $C_s > 0$, satisfaciendo

$$\|U(t)\|_{X_s} \leqslant C_s e^{-\mu_0 t} \|U_0\|_{X_s},$$

lo que demuestra el corolario. $\square$

Capítulo 3

Buena colocación y estabilidad exponencial del problema no lineal

Es este capítulo, regresamos nuestra atención para la buena colocación y propiedades de estabilidad de (2)-(4):

$$\begin{cases} \eta_t + w_x + (\eta w)_x + w_{xxx} = 0, & 0 < x < L, \quad t \geqslant 0 \\ w_t + \eta_x + w w_x + \eta_{xxx} = 0, & 0 < x < L, \quad t \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

satisfaciendo las condiciones de frontera

$$\begin{cases} w(0,t) = 0, \quad w_x(0,t) = \alpha_0 \eta_x(0,t), \quad w_{xx}(0,t) = 0, \quad t > 0 \\ w(L,t) = \alpha_2 \eta(L,t), \quad w_x(L,t) = -\alpha_1 \eta_x(L,t), \quad w_{xx}(L,t) = -\alpha_2 \eta_{xx}(L,t), \quad t > 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

y condiciones iniciales

$$\begin{cases} \eta(x,0) = \eta_0(x), & o < x < L \\ w(x,0) = w_0(x), & o < x < L \end{cases} \tag{3.3}$$

Sean $U = (\eta, w)$, $\quad (S(t))_{t \geqslant 0}$, el semigrupo generado por la parte lineal del problema, $U_0 = (\eta_0, w_0)$ y $N(U) = -((\eta w)', w w')$, donde ' denota $\frac{\partial}{\partial x}$. Observamos, entonces, que podemos escribir (3.1)-(3.3) como el problema de Cauchy Abstracto

$$\begin{cases} U_t = AU + N(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

con las condiciones de frontera (3.2).

Observamos que, por los resultados obtenidos en el Capítulo 2, podemos reformular el problema arriba de la siguiente manera: Encontrar una función $U = U(t)$, tal que

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)N(U(s))ds, \tag{3.4}$$

y considerando las condiciones de frontera (3.2).

Así, usando el efecto regularizante de Kato, probado en la proposición 2.0.4, y un argumento de punto fijo, vamos a demostrar, primeramente, que (3.4) es localmente bien puesto en el espacio $X_0 = [L^2(I)]^2$.

Teorema 3.0.1. *Dado $(\eta_0, w_0) \in X_0$, existe un tiempo $T > 0$ y una unica mild solution $(\eta, w) \in C([0,T]; X_0) \cap L^2(0,T; X_1)$ de (3.1)-(3.2).*

Demostración: Para cada $(f, g) \in L^1(0,T; X_0)$, considere el problema

$$\begin{cases} \eta_t + w_x + w_{xxx} = f \\ w_t + \eta_x + \eta_{xxx} = g, \end{cases}$$

juntamente con las condiciones (3.2) y (3.3).

Como ese problema posee solucion regular, podemos considerar datos regulares y concluir las estimativas siguientes por un argumento de densidad. Inicialmente, observe que

$$(\eta, w)(t) = S(t)(\eta_0, w_0) + \int_0^t S(t-s)(f(\cdot, s), g(\cdot, s))ds,$$

donde $(S(t))_{t\geqslant 0}$ es el semigrupo de clase C_0 dado por la proposición 2.0.2. Luego, de las afirmaciones 1 y 2 abajo, tenemos que existe $C = C(T) > 0$, tal que

$$\|(\eta, w)\|_{C([0,T];X_0)} + \|(\eta, w)\|_{L^2(0,T;X_1)} \leqslant \left\{ \|(\eta_0, w_0)\|_{X_0} + \int_0^T \|(f, g)\|_{X_0} ds \right\}. \qquad (3.5)$$

De hecho, observe inicialmente que la solucion del problema arriba puede ser escrita como

$$(\eta, w) = (\eta_1, w_1) + (\eta_2, w_2),$$

donde (η_1, w_1) y (η_2, w_2) son soluciones respectivamente, de

$$\begin{cases} \eta_{1,t} + w_{1,x} + w_{1,xxx} = 0 \\ w_{1,t} + \eta_{1,x} + \eta_{1,xxx} = 0, \end{cases}$$

satisfaciendo las condiciones (3.2)-(3.3), y

$$\begin{cases} \eta_{2,t} + w_{2,x} + w_{2,xxx} = f \\ w_{2,t} + \eta_{2,x} + \eta_{2,xxx} = g, \end{cases}$$

con condiciones de contorno homogéneas

$$\begin{cases} w_2(0,t) = 0, \quad w_{2,x}(0,t) = \alpha_0 \eta_{2,x}(0,t) = 0, \quad w_{2,xx}(0,t) = 0, \quad t > 0 \\ w_2(L,t) = \alpha_2 \eta_2(L,t) = 0, \quad w_{2,x}(L,t) = -\alpha_1 \eta_{2,x}(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ w_{2,xx}(L,t) = -\alpha_2 \eta_{2,xx}(L,t) = 0, \quad t > 0 \end{cases}$$

y condiciones iniciales

$$\begin{cases} \eta_2(x,0) = 0, \quad 0 < x < L \\ w_2(x,0) = 0, \quad 0 < x < L. \end{cases}$$

Luego, sigue de la Proposición 2.0.4, que

$$\|(\eta_1, w_1)\|_{C(\mathbb{R}^+;X_0)} + \|(\eta_1, w_1)\|_{L^2(0,T;X_1)} \leqslant C\|(\eta_0, w_0)\|_{X_0},$$

Donde $C = C(T)$ es una constante positiva.

Con relación a (η_2, w_2), tenemos los siguientes resultados:

Afirmación 1: Existe $C > 0$, tal que

$$\|(\eta_2, w_2)\|_{C([0,T];X_0)} \leqslant C\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}.$$

Demostración: Observe que

$$(\eta_2, w_2)(t) = \int_0^t S(t-s)((f,g)(\cdot,s))ds,$$

donde $(S(t))_{t\geqslant 0}$ es un semigrupo de clase C_0 dado por la Proposición 2.0.2. Note, también, que

$$\|1_{[0,t]}S(t-s)((f,g)(\cdot,s))\|_{X_0} \leqslant \|(f,g)(\cdot,s)\|_{X_0} \in L^1(0,T).$$

Luego, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, tenemos que

$$(\eta_2, w_2) \in C([0,T]; X_0). \tag{3.6}$$

Además,

$$\|(\eta_2, w_2)\|_{X_0} \leqslant \int_0^t \|(f,g)(\cdot,s)\|_{X_0} ds \leqslant \|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}. \tag{3.7}$$

Por tanto, por (3.6) y (3.7), concluimos la Afirmación 1.

Afirmación 2: Existe $C > 0$, tal que

$$\|(\eta_2, w_2)\|_{L^2(0,T;X_1)} \leqslant C\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}.$$

Demostración: De forma análoga a la demostración del efecto regularizante de Kato, tenemos que, multiplicando la primera ecuación arriba por xw_2, la segunda por $x\eta_2$, integrando en $(0,T)\times(0,L)$ y sumando las identidades, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L x(\eta_2 w_2)_t dxdt &+ \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L x(|w_2|^2+|\eta_2|^2)_x dxdt \\ &+ \int_0^T\int_0^L x(w_{2,xxx}w_2+\eta_{2,xxx}\eta_2)dxdt \\ &= \int_0^T\int_0^L x(fw_2+g\eta_2)dxdt. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Mas, procediendo como en (2.9), tenemos que

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^L x(w_{2,xxx}w_2+\eta_{2,xxx}\eta_2)dxdt = \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(|w_{2,x}|^2+|\eta_{2,x}|^2)dxdt \\ &+(\alpha_1-1)\int_0^T \eta_2(L,t)\eta_{2,x}(L,t)dt+\int_0^T \eta_2(0,t)\eta_{2,x}(0,t)dt \\ &-\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T|\eta_{2,x}(L,t)|^2dt, \end{aligned} \tag{3.9}$$

observe que $\alpha_2=1$. Además, en (3.8),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L x(|w_2|^2+|\eta_2|^2)_x dxdt &= \frac{1}{2}\left[\int_0^T x(|w_2|^2+|\eta_2|^2)|_0^L dt \right. \\ &\quad \left. -\int_0^T\int_0^L(|w_2|^2+|\eta_2|^2)_x dxdt\right] \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L(|w_2|^2+|\eta_2|^2)dxdt. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Así, substituyendo (3.9) y (3.10) en (3.8), por la condiciones de frontera, se obtiene

$$\begin{aligned}&\int_0^L x\eta_2(x,T)w_2(x,T)dx-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L(|w_2|^2+|\eta_2|^2)dxdt \\ &+\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(|w_{2,x}|^2+|\eta_{2,x}|^2)dxdt = \int_0^T\int_0^L x(fw_2+g\eta_2)dxdt,\end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L(|\eta_{2,x}|^2+|w_{2,x}|^2)dxdt &= \frac{2}{3}\left[-\int_0^L x\eta_2(x,T)w_2(x,T)dx\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L(|w_2|^2+|\eta_2|^2)dxdt+\int_0^T\int_0^L x(fw_2+g\eta_2)dxdt\right]\\
&\leqslant \frac{L}{3}\int_0^L(|\eta_2(x,T)|^2+|w_2(x,T)|^2)+\frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L(|w_2|^2+|\eta_2|^2)dxdt\\
&+\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L|xfw_2+xg\eta_2|dxdt\\
&=\frac{L}{3}\|(\eta_2,w_2)(T)\|_{X_0}^2+\frac{1}{3}\int_0^T\|(\eta_2,w_2)(\cdot,t)\|_{X_0}^2dt+\frac{2}{3}\int_0^T\langle(xf,xg),(w_2,\eta_2)\rangle_{X_0}dt.
\end{aligned}$$

Luego, por (3.7), tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L(|\eta_{2,x}|^2+|w_{2,x}|^2)dxdt &\leqslant \frac{L}{3}\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}^2+\frac{T}{3}\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}^2\\
&+\frac{2L}{3}\int_0^T\|(f,g)\|_{X_0}\|(\eta_2,w_2)\|_{X_0}dt\\
&\leqslant \frac{L}{3}\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}^2+\frac{T}{3}\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}^2\\
&+\frac{2L}{3}\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}\int_0^T\|(f,g)\|_{X_0}dt\\
&\leqslant \left(L+\frac{T}{3}\right)\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, por la Afirmación 1 y por la desigualdad arriba, concluimos la Afirmación 2, con constante $C=\sqrt{L+\frac{T}{3}}$. Observe que $C=C(T,L)$ es no decreciente en T, pues si $T_1\leqslant T_2$, entonces $\sqrt{L+\frac{T_1}{3}}\leqslant\sqrt{L+\frac{T_2}{3}}$.

Ahora, dado $U_0=(\eta_0,w_0)\in X_0$, vamos a mostrar que (3.4) admite una única solución. Para eso, considere la siguiente aplicación Γ, dada por

$$(\Gamma U)(t)=S(t)U_0+\int_0^t S(t-s)N(U(s))ds,$$

donde $(S(t))_{t\geqslant 0}$ es el semigrupo generado por la parte lineal del problema y $N(U)=N(\eta,w)=-((\eta w)_x,ww_x)$.

La demostración consiste en probar que Γ posee un único punto fijo en alguna bola cerrada $\overline{B_R(0)}$ del espacio

$$E := L^2(0,T;X_1),$$

dotado de su norma natural. Vamos a usar el siguiente resultado:

Afirmación 3: Existe una constante $K > 0$, tal que

$$\|N(U_1 - N(U_2))\|_{X_0} \leqslant K\left(\|U_1\|_{X_1} + \|U_2\|_{X_1}\right)\|U_1 - U_2\|_{X_1}, \quad \forall U_1, U_2 \in X_1. \quad (3.11)$$

Demostración: Observe que

$$\|w\eta'\|_{L^2(I)} \leqslant \|w\|_{L^\infty(I)}\|\eta'\|_{L^2(I)} \leqslant C\|w\|_{H^1(I)}\|\eta\|_{H^1(I)}, \quad (3.12)$$

$\forall(\eta, w) \in H^1(I) \times H^1(I)$, con $C > 0$, pues $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$. Luego, si $U_1 = (\eta_1, w_1)$ y $U_2 = (\eta_2, w_2)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|N(U_1)-N(U_2)\|_{X_0}^2 &= \|((\eta_2 w_2)'-(\eta_1 w_1)', w_2w_2'-w_1w_1')\|_{X_0}^2 \\
&= \|(\eta_2 w_2)'-(\eta_1 w_1)'\|_{L^2(I)}^2+\|w_2w_2'-w_1w_1'\|_{L^2(I)}^2 \\
&= \|\eta_2' w_2+\eta_2 w_2'-\eta_1' w_1-\eta_1 w_1'\|_{L^2(I)}^2+\|w_2w_2'-w_1w_1'\|_{L^2(I)}^2 \\
&= \|\eta_2' w_2+\eta_1' w_2-\eta_1' w_2+\eta_2 w_2'-\eta_1' w_1+\eta_2 w_1'-\eta_2 w_1' \\
&\quad -\eta_1 w_1'\|_{L^2(I)}^2+\|w_2w_2'+w_1w_2'-w_1w_2'-w_1w_1'\|_{L^2(I)}^2 \\
&\leqslant \|w_2(\eta_2'-\eta_1')\|_{L^2(I)}^2+\|\eta_1'(w_2-w_1)\|_{L^2(I)}^2 \\
&\quad +\|\eta_2(w_2'-w_1')\|_{L^2(I)}^2+\|w_1'(\eta_2-\eta_1)\|_{L^2(I)}^2 \\
&\quad +\|w_2'(w_2-w_1)\|_{L^2(I)}^2+\|w_1(w_2'-w_1')\|_{L^2(I)}^2 \\
&\leqslant C^2\|w_2\|_{H^1(I)}^2\|\eta_2-\eta_1\|_{H^1(I)}^2+C^2\|\eta_1\|_{H^1(I)}^2\|w_2-w_1\|_{H^1(I)}^2 \\
&\quad +C^2\|\eta_2\|_{H^1(I)}^2\|w_2-w_1\|_{H^1(I)}^2+C^2\|w_1\|_{H^1(I)}^2\|\eta_2-\eta_1\|_{H^1(I)}^2 \\
&\quad +C^2\|w_2\|_{H^1(I)}^2\|w_2-w_1\|_{H^1(I)}^2+C^2\|w_1\|_{H^1(I)}^2\|w_2-w_1\|_{H^1(I)}^2 \\
&= C^2\left(\|\eta_1\|_{H^1(I)}^2+\|w_1\|_{H^1(I)}^2+\|\eta_2\|_{H^1(I)}^2+\|w_2\|_{H^1(I)}^2\right)\|w_2-w_1\|_{H^1(I)}^2 \\
&\quad +C^2\left(\|w_1\|_{H^1(I)}^2+\|w_2\|_{H^1(I)}^2\right)\|\eta_2-\eta_1\|_{H^1(I)}^2 \\
&\leqslant C^2\left(\|\eta_1\|_{H^1(I)}^2+\|w_1\|_{H^1(I)}^2+\|\eta_2\|_{H^1(I)}^2+\|w_2\|_{H^1(I)}^2\right)\|w_2-w_1\|_{H^1(I)}^2 \\
&\quad +C^2\left(\|\eta_1\|_{H^1(I)}^2+\|w_1\|_{H^1(I)}^2+\|\eta_2\|_{H^1(I)}^2+\|w_2\|_{H^1(I)}^2\right)\|\eta_2-\eta_1\|_{H^1(I)}^2 \\
&= C^2\left(\|U_1\|_{X_1}^2+\|U_2\|_{X_1}^2\right)\|U_1-U_2\|_{X_1}^2.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\|N(U_1)-N(U_2)\|_{X_0}\leqslant C\left(\|U_1\|_{X_1}^2+\|U_2\|_{X_1}^2\right)\|U_1-U_2\|_{X_1},
$$

Concluyendo la demostración de la Afirmación 3. □

Sea $T>0$ y $R>0$ números reales cuyos valores serán especificados posteriormente y considere $B_R(0) \subset E$. Por la Afirmación 3, $N(U) \in L^1(0,T;X_0)$, visto que

$$\int_0^T \|N(U)\|_{X_0} dt \leqslant K \int_0^T \|U\|_{X_1} dt = C\|U\|_E^2 \leqslant CR^2 < \infty.$$

Luego, por (3.5), $\Gamma U \in E$. Observe, también, que

$$\|\int_0^t S(t-s)N(U(s))ds\|_E \leqslant C \int_0^T \|N(U)\|_{X_0} ds,$$

por la Afirmación 2. Así,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma U\|_E &\leqslant \|S(\cdot)U_0\|_E + C\int_0^T \|N(U)\|_{X_0} ds \\
&\leqslant \|S(\cdot)U_0\|_E + KC\int_0^T \|U\|_{X_1}^2 ds \\
&= \|S(\cdot)U_0\|_E + KC\|U\|_E^2.
\end{aligned}$$

Tomando $R = 2\|S(\cdot)U_0\|_E$, tenemos, por la Proposición 2.0.4, que $R \leqslant \overline{C}(T)\|U_0\|_{X_0}$. Además,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma U\|_E &\leqslant \frac{R}{2} + KCR^2 \\
&\leqslant \frac{R}{2} + KC\overline{C}(T)\|U_0\|_{X_0} R \\
&= \left(\frac{1}{2} + KC\overline{C}(T)\|U_0\|_{X_0}\right) R,
\end{aligned}$$

donde $K, C > 0$. Por tanto, como $\overline{C}(T) \leqslant K\sqrt{T}, \quad K > 0$, sigue que para $T > 0$ suficientemente pequeño, Γ es una aplicación de la bola $B_R(0)$ en ella misma. además, por la Afirmación 2, tenemos, por un argumento análogo al usado arriba, que dados

U_1 y $U_2 \in B_R(0) \subset E$,

$$
\begin{array}{rcl}
\|\Gamma U_1 - \Gamma U_2\|_E & = & \|\displaystyle\int_0^t S(t-s)(N(U_1) - N(U_2))ds\|_E \\
& \leqslant & C\|N(U_1(s)) - N(U_2(s))\|_{L^1(0,T;X_0)} \\
& = & C\displaystyle\int_0^T \|N(U_1) - N(U_2)\|_{X_0} ds \\
& \leqslant & CK\displaystyle\int_0^T (\|U_1\|_{X_1} + \|U_2\|_{X_1})\|U_1 - U_2\|_{X_1} ds \\
& \leqslant & 2RCK\displaystyle\int_0^T \|U_1 - U_2\|_{X_1} ds \\
& \leqslant & 2RCK\left(\displaystyle\int_0^T 1^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\displaystyle\int_0^T \|U_1 - U_2\|_{X_1}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leqslant & 2RCK\sqrt{T}\|U_1 - U_2\|_E,
\end{array}
$$

o sea,

$$
\|\Gamma U_1 - \Gamma U_2\|_E \leqslant 2RCK\sqrt{T}\|U_1 - U_2\|_E.
$$

Luego, si $R > 0$ es suficientemente pequeño, tenemos que Γ es una contracción de la bola en ella misma. Así, por el Teorema de Punto Fijo de Banach, existe una única solución $U \in E$ del problema de punto fijo (3.4). Observe, también, que $U \in C([0,T];X_0)$. De hecho,

$$
\begin{array}{rcl}
\|U(t)\|_{X_0} & \leqslant & \|S(t)U_0\|_{X_0} + \displaystyle\int_0^t \|S(t-s)N(N(s))\|_{X_0} ds \\
& \leqslant & \|U_0\|_{X_0} + \displaystyle\int_0^t \|N(N(s))\|_{X_0} ds \\
& \leqslant & \|U_0\|_{X_0} + K\displaystyle\int_0^t \|N(s)\|_{X_1}^2 ds
\end{array}
$$

donde,

$$\begin{aligned}
\|U\|_{C([0,T];X_0)} &= \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|U(t)\|_{X_0} \\
&\leqslant \|U_0\|_{X_0} + K \max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t \|N(s)\|^2_{X_1} ds \\
&= \|U_0\|_{X_0} + K \int_0^T \|N(s)\|^2_{X_1} ds \\
&= \|U_0\|_{X_0} + K\|U\|^2_E < \infty,
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración del teorema. □

Observe que el teorema arriba garantiza la existencia de solución local para (3.1)-(3.3). Debido a la falta de estimativas a priori en la norma de X_0, la pregunta de existencia global de soluciones es difícil de resolver. Entretanto, la existencia global juntamente con la estabilidad exponencial pueden ser establecidos para datos iniciales suficientemente pequeños. Para este propósito, el efecto regularizante de Kato y la tasa de decaimiento exponencial en X_1 son combinados en una estimativa puntual en el tiempo.

Lema 3.0.2. *Para cualquier $\mu \in (0, \mu_0)$, existe una constante $C = C(\mu) > 0$, tal que para cualquier $U_0 \in X_0$,*

$$\|S(t)U_0\|_{X_1} \leqslant C\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3.13}$$

Demostración: Sea $\mu \in (0, \mu_0)$, $U_0 \in X_0$ y defina $U(t) := S(t)U_0, \quad t \geqslant 0$. Tomando $T = 1$, por la Proposición 2.0.4, tenemos que existe una constante $\overline{C} > 0$, tal que

$$\|U(\cdot)\|_{L^2(0,1;X_1)} \leqslant \overline{C}\|U_0\|_{X_0}. \tag{3.14}$$

En particular, $U(t) \in X_1$, casi siempre en (0,1), Así, podemos encontrar un sucesión decreciente $(t_n)_{n\geqslant 0}$ en $(0, 1]$, con $t_n \to 0^+$, tal que $U(t_n) \in X_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Como $U(t_n) = S(t_n)U_0$, tenemos que, modificando (2.1)-(2.4) de tal forma que $S(t_n)U_0 \in X_1$

sea el dato inicial del problema, por el corolario 2.0.11,

$$U(\cdot) \in C([t_n, +\infty); X_1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Luego, como $t_n \to 0^+$, tenemos que

$$U(\cdot) \in C(\mathbb{R}^+; X_1),$$

esto es,

$$U(t) \in X_1, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Además, por el mismo argumento, tenemos que

$$\|U(T)\|_{X_1} \leqslant C_1 e^{-\mu_0(T-t)} \|U(t)\|_{X_1}, \quad \forall T \geqslant t, \tag{3.15}$$

siempre que $U(t) \in X_1$.

Tome $T \in (0, 1]$. Por (3.15), se obtiene

$$\left(C_1^{-1} \|U(T)\|_{X_1}\right)^2 e^{2\mu_0(T-t)} \leqslant \|U(t)\|_{X_1}^2,$$

donde, integrando en relación a t en (0,T),

$$\left(C_1^{-1} \|U(T)\|_{X_1}\right)^2 \int_0^T e^{2\mu_0(T-t)} dt \leqslant \int_0^T \|U(t)\|_{X_1}^2 dt.$$

Luego, como

$$\int_0^T e^{2\mu_0(T-t)} dt = \frac{e^{2\mu_0 T} - 1}{2\mu_0},$$

sigue que

$$\begin{aligned}
\|U(T)\|_{X_1} &\leqslant \|U\|_{L^2(0,1;X_1)} C_1 \sqrt{\frac{2\mu_0}{e^{2\mu_0 T}-1}} \\
&\leqslant \overline{C} C_1 \sqrt{\frac{2\mu_0}{e^{2\mu_0 T}-1}} \|U_0\|_{X_0} \\
&\leqslant \overline{C} C_1 \frac{1}{\sqrt{T}} \|U_0\|_{X_0}.
\end{aligned}$$

Por tanto, para $t \in (0,1]$ arbitrario, tenemos

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_{X_1} &\leqslant \frac{\overline{C} C_1}{\sqrt{t}} e^{\mu t} e^{-\mu t} \|U_0\|_{X_0} \\
&\leqslant \overline{C} C_1 e^{\mu} \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t \in (0,1].
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Si $t > 1$, por (3.15) y (3.16), tenemos

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_{X_1} &\leqslant C_1 e^{-\mu_0(t-1)} \|U(1)\|_{X_1} \\
&\leqslant C_1^2 \overline{C} e^{-\mu_0(t-1)} \|U_0\|_{X_0}.
\end{aligned}$$

No en tanto, como $\mu < \mu_0$ y $t > 1$, existe $C_2 > 0$, tal que

$$\sqrt{t} \leqslant C_2 e^{(\mu_0 - \mu)t},$$

o sea,

$$e^{-\mu_0 t} \leqslant C_2 \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}.$$

Así,

$$\|U(t)\|_{X_1} \leqslant C_1^2 \overline{C} e^{-\mu_0 t} e^{\mu_0} \|U_0\|_{X_0} \leqslant C_1^2 \overline{C} C_2 \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} e^{\mu_0} \|U_0\|_{X_0}.$$

Por tanto, si $C := C_1^2\overline{C}C_2e^{\mu_0} > 0$, entonces

$$\|U(t)\|_{X_1} \leqslant C\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t > 1,$$

lo que demuestra el Lema. $\square$

Estamos listos para probar la buena colocación y la estabilidad exponencial de las soluciones partiendo de datos iniciales suficientemente pequeños en X_1.

Definición 3.0.3. *Tome $\mu \in (0, \mu_0)$. definimos el espacio*

$$F := \left\{U = (\eta, w) \in C(\mathbb{R}^+; X_1); \quad \|e^{\mu t}U(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;X_1)} < \infty\right\},$$

con la siguiente norma

$$\|U\|_F = \|e^{\mu t}U(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;X_1)} = \sup_{t\geqslant 0} ess\|e^{\mu t}U(t)\|_{X_1}.$$

Teorema 3.0.4. *Existe r_0, tal que, para todo dato inicial $(\eta_0, w_0) \in X_1$ con $\|(\eta_0, w_0)\|_{X_1} \leqslant r_0$, la ecuación integral (3.4) admite una única solución $(\eta, w) \in F$.*

Demostración:Sea $U_0 = (\eta_0, w_0) \in X_1$, tal que $\|U_0\|_{X_1} < r_0$, $\;B_R(0) \subset F$ y $U(\cdot) := (\eta, w)(\cdot) \in B_R(0)$, con r_0 y $R > 0$ a ser determinados posteriormente.
Considere la aplicación

$$\Gamma : B_R(0) \subset F \to C(\mathbb{R}^+; X_1)$$

dada por

$$(\Gamma U)(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)N(U(s))ds, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Vamos a mostrar que Γ posee un único punto fijo en la bola $B_R(0) \subset F$, para $r_0 > 0$

suficientemente pequeño. Primeramente, observe que, por (3.5),

$$\Gamma U \in C(\mathbb{R}^+; X_0) \cap L^2_{Loc}(\mathbb{R}^+; X_1),$$

con $(\Gamma U)(0) = U_0$.

Note también que $\Gamma U \in F$. De hecho, por (2.25), existe $C_1 > 0$, tal que

$$\|S(t)U_0\|_{X_1} \leqslant C_1 e^{-\mu_0 t}\|U_0\|_{X_1} \leqslant C_1 e^{-\mu t}\|U_0\|_{X_1},$$

pues $\mu < \mu_0$. Luego,

$$\|e^{\mu t} S(t)U_0\|_{X_1} \leqslant e^{\mu t}\|S(t)U_0\|_{X_1} \leqslant e^{\mu t}\left(C_1 e^{-\mu t}\|U_0\|_{X_1}\right) = C_1\|U_0\|_{X_1}, \quad t \geqslant 0.$$

Además, para todo $t \geqslant 0$, tenemos, por el Lema 3.0.2,

$$\begin{aligned}
\|e^{\mu t}\int_0^t S(t-s)N(U(s))ds\|_{X_1} &\leqslant e^{\mu t}\int_0^t \|S(t-s)N(U(s))\|_{X_1} ds \\
&\leqslant e^{\mu t} C\int_0^t \frac{e^{-\mu(t-s)}}{\sqrt{t-s}}\|N(U(s))\|_{X_0} \\
&= C\int_0^t \frac{e^{\mu s}}{\sqrt{t-s}}\|N(U(s))\|_{X_0} ds,
\end{aligned}$$

donde $C > 0$. Luego, por la Afirmación 3, obtenemos $K > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\|e^{\mu t}\int_0^t S(t-s)N(U(s))ds\|_{X_1} &\leqslant C\int_0^t \frac{e^{\mu s}}{\sqrt{t-s}}\left(K\|U(s)\|_{X_1}^2\right)ds \\
&= CK\int_0^t \frac{e^{-\mu s}}{\sqrt{t-s}}\left(e^{\mu s}\|U(s)\|_{X_1}\right)^2 ds \\
&\leqslant CK\|U\|_F^2\int_0^t \frac{e^{-\mu s}}{\sqrt{t-s}}ds \\
&= CK\|U\|_F^2\int_0^t \frac{e^{\mu(s-t)}}{\sqrt{s}}ds \\
&\leqslant CK\|U\|_F^2\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}}ds + \int_1^{\max\{1,t\}} \frac{e^{-\mu(t-s)}}{\sqrt{s}}ds\right) \\
&\leqslant CK\|U\|_F^2\left(2s^{\frac{1}{2}}|_0^1 + \int_1^{\max\{1,t\}} e^{-\mu(t-s)}ds\right) \\
&\leqslant CK\|U\|_F^2\left(2+\frac{1}{\mu}\right).
\end{aligned}$$

Así, tomando $R > 0$ de tal forma que $R < \frac{1}{2CK(2+\mu^{-1})}$ y r_0 de tal forma que $r_0 < \frac{R}{2C_1}$, tenemos que

$$\|e^{\mu t}\Gamma U\|_{X_1} \leqslant C_1 r_0 + CK(2+\mu^{-1})R^2 < \frac{R}{2}+\frac{R}{2} = R < \infty.$$

Por tanto, $\Gamma U \in F$, con $\|\Gamma U\|_F \leqslant R < \infty$, o sea, Γ aplica la bola $B_R(0) \subset F$ en ella misma. Además, dados $U, V \in B_R(0) \subset F$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma U - \Gamma V\|_F &= \|e^{\mu t}\int_0^t S(t-s)(N(U(s)) - N(V(s)))ds\|_{X_1} \\
&\leqslant C\int_0^t \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{t-s}}\|N(U(s)) - N(V(s))\|_{X_0}ds,
\end{aligned}$$

donde $C > 0$. Entonces, se muestra, de forma similar, que Γ es una contracción. Así, por el Teorema del Punto fijo de Banach, Γ posee un único punto fijo en la bola $B_R(0) \subset F$.

La unicidad es probada de manera usual, considerando dos soluciones U y V con datos iniciales U_0 y aplicando el Lema de Gronwall. Como los argumentos usados para probar que $U = V$ son análogos a los que acabamos de usar, omitiremos la demostración.

Ahora, estamos listos para probar el Teorema Central de este trabajo presentado en la introducción. Vamos a enunciarlo nuevamente para facilitar la lectura.

Teorema 3.0.5. *Asuma que* $\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha_1 > 0$ *y* $\alpha_2 = 1$. *Entonces, existen constantes* $\rho > 0, \quad C > 0$ *y* $\mu > 0$*, tal que, para cualquier* $(\eta_0, w_0) \in X_0$ *con* $\|(\eta_0, w_0\|_{X_0} \leqslant \rho$*, el sistema (3.1) -(3.3) admite una única solución*

$$(\eta, w) \in C(\mathbb{R}^+; X_0) \cap C(\mathbb{R}^{+*}; X_1) \cap L^2(0, 1; X_1)$$

que satisface

$$\|(\eta, w)(t)\|_{X_0} \leqslant Ce^{-\mu t}\|(\eta_0, w_0\|_{X_0}, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{3.17}$$

$$\|(\eta, w)(t)\|_{X_1} \leqslant C\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}\|(\eta_0, w_0\|_{X_0}, \quad \forall t > 0, \quad \forall \alpha \in (0, \mu). \tag{3.18}$$

Demostración: Observe que haciendo $T = 1$ en la demostración del Teorema 3.0.1, obtenemos, por (3.5) y por la Afirmación 3, que

$$\|\Gamma U\|_{L^2(0,1;X_1)} \leqslant \|S(\cdot)U_0\|_{L^2(0,1;X_1)} + CK\int_0^1 \|U\|_{X_1}^2 dt.$$

Luego, tomando $R := 2\|S(\cdot)U_0\|_{L^2(0,1;X_1)} > 0$ y $\rho_1 > 0$, tal que $\|U_0\|_{X_0} < \rho_1$, tenemos que

$$\|\Gamma U\|_{L^2(0,1;X_1)} \leqslant \frac{R}{2} + CKR^2,$$

pues estamos suponiendo que $U \in B_R(0) \subset L^2(0, 1; X_1)$. Note que, por (3.14), tenemos $R \leqslant \overline{C}\|U_0\|_{X_0}$, donde $R^2 \leqslant \overline{C}\|U_0\|_{X_0}R$. Así,

$$\|\Gamma U\|_{L^2(0,1;X_1)} \leqslant \frac{R}{2} + CK\overline{C}\|U_0\|_{X_0}R \leqslant \left(\frac{1}{2} + C\overline{C}K\rho_1\right)R,$$

y, entonces, tomando $\rho_1 > 0$ de tal manera que $\rho_1 \leqslant \frac{1}{2C\overline{C}K}$, tenemos que Γ es una aplicación de la bola $B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$ en ella misma. Vamos a mostrar que Γ es una contracción. De hecho, sean U y $V \in B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$. De forma análoga a la demostración del Teorema 3.0.1, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma U - \Gamma U\|_{L^2(0,1;X_1)} &\leqslant C\|N(U) - N(V)\|_{L^1(0,1;X_0)} \\
&\leqslant CK \int_0^1 (\|U\|_{X_1} + \|V\|_{X_1})\|U - V\|_{X_1} ds \\
&\leqslant 2RCK \int_0^1 \|U - V\|_{X_1} ds \\
&\leqslant 2RCK\|U - V\|_{L^2(0,1;X_1)},
\end{aligned}$$

o sea,

$$\|\Gamma U - \Gamma U\|_{L^2(0,1;X_1)} \leqslant 2RCK\|U - V\|_{L^2(0,1;X_1)}.$$

Luego, como $R \leqslant \overline{C}\|U_0\|_{X_0}$, se tiene

$$\|\Gamma U - \Gamma U\|_{L^2(0,1;X_1)} \leqslant 2\overline{C}CK\|U_0\|_{X_0}\|U - V\|_{L^2(0,1;X_1)}.$$

Así, tomando $\rho_2 > 0$ de tal forma que $\rho_2 \leqslant \frac{1}{2\overline{C}CK}$, obtenemos que si $\|U_0\|_{X_0} \leqslant \rho$, con $\rho := \text{mín}\{\rho_1, \rho_2\}$, entonces Γ es una contracción de la bola $B_R(0)$ en ella misma, entonces, por el teorema del Punto Fijo de Banach, la ecuación integral (3.4) posee una única solución $U \in B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$, donde $R = 2\|S(\cdot)U_0\|_{L^2(0,1;X_1)}$. En particular, existe $t_0 \in (0,1)$, tal que $\|U(t_0)\|_{X_1} \leqslant R$. Si, además, tuvieramos que $R \leqslant r_0$, entonces, por el teorema 3.0.1, $U(\cdot)$ puede ser extendida a $\mathbb{R}^+$ como solución de (3.1)-(3.3). Además, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_{X_1} &\leqslant C_1 e^{-\mu(t-t_0)}\|U(t_0)\|_{X_1} \\
&\leqslant C_1\overline{C}e^{\mu_0}e^{-\mu t}\|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t \geqslant t_0 \quad \text{y} \quad \forall \mu \in (0, \mu_0).
\end{aligned}$$

Vamos probar (3.17). Observe que si $t > 1$, entonces, en particular, $t > t_0$ y como

$[H^1(I)]^2 \hookrightarrow [L^2(I)]^2$, tenemos que existe $C_I > 0$, tal que

$$\|U(t)\|_{X_0} \leqslant C_I \|U(t)\|_{X_1} \leqslant C_I C_1 \overline{C} e^{\mu_0} e^{-\mu t} \|U_0\|_{X_0},$$

o sea, si $C := C_I C_1 \overline{C} e^{\mu_0}$, entonces

$$\|U(t)\|_{X_0} \leqslant C e^{-\mu t} \|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t > 1.$$

Ahora, si $0 \leqslant t \leqslant 1$, por (3.5) y por la Afirmación 3, tenemos

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_{X_0} &\leqslant \|U\|_{C([0,1];X_0)} \\
&\leqslant \|U\|_{C([0,1];X_0)} + \|(\eta, w)\|_{L^2(0,1;X_1)} \\
&\leqslant C\|U_0\|_{X_0} + C \int_0^1 \|N(U(t))\|_{X_0} dt \\
&\leqslant C\|U_0\|_{X_0} + CK\|U\|^2_{L^2(0,1;X_1)}.
\end{aligned}$$

Como $U \in B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$, con $R \leqslant \overline{C}\|U_0\|_{X_0}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_{X_0} &\leqslant C\|U_0\|_{X_0} + CK\overline{C}\|U_0\|_{X_0} R \\
&= \left(C + CK\overline{C}R\right) \|U_0\|_{X_0} \\
&= \left(C + CK\overline{C}R\right) e^{\mu_0 t} e^{-\mu_0 t} \|U_0\|_{X_0} \\
&\leqslant \left(C + CK\overline{C}R\right) e^{\mu_0} e^{-\mu_0 t} \|U_0\|_{X_0}.
\end{aligned}$$

Luego, si $\widetilde{C} := \left(C + CK\overline{C}R\right) e^{\mu_0}$, entonces

$$\|U(t)\|_{X_0} \leqslant \widetilde{C} e^{-\mu t} \|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall \mu \in (0, \mu_0).$$

Vamos a demostrar (3.18).

Si $0 < t \leqslant 1$, entonces, como

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)N(U(s))ds,$$

tenemos, por el Lema 3.0.2,

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_{X_1} &\leqslant \|S(t)U_0\|_{X_1} + \|\int_0^t S(t-s)N(U(s))ds\|_{X_1} \\
&\leqslant \|S(t)U_0\|_{X_1} + C\int_0^t \|N(U(s))\|_{X_0} ds \\
&\leqslant \|S(t)U_0\|_{X_1} + CK\int_0^1 \|U\|_{X_1}^2 ds \\
&= \|S(t)U_0\|_{X_1} + CK\|U\|_{L^2(0,1;X_1)}^2 \\
&\leqslant \|S(t)U_0\|_{X_1} + CKR^2 \\
&\leqslant \overline{C}\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0} + CK\widetilde{C}\|U_0\|_{X_0}R \\
&= \overline{C}\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0} + CK\widetilde{C}e^{\mu t}\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\sqrt{t}\|U_0\|_{X_0}R \\
&\leqslant \overline{C}\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0} + \overline{\overline{C}}\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0} \\
&\leqslant K\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t \in (0,1] \quad \text{y} \quad \mu \in (0,\mu_0),
\end{aligned}$$

donde $\overline{\overline{C}} = CK\widetilde{C}e^{\mu_0}R$ y $K := \text{máx}\{\overline{C}, \overline{\overline{C}}\}$. Ahora, si $t > 1$, en particular, $t > t_0$ y, entonces, por la desigualdad de arriba, tenemos

$$\|U(t)\|_{X_1} \leqslant C_1\overline{C}e^{-\mu t}\|U_0\|_{X_0}.$$

Luego, si $0 < \alpha < \mu$, entonces como $t > 1$, obtenemos que existe $C_2 > 0$, tal que

$$\frac{\sqrt{t}}{e^{(\mu-\alpha)t}} \leqslant C_2,$$

donde,

$$e^{-\mu t} \leqslant C_2\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}.$$

Por tanto,

$$\|U(t)\|_{X_1} \leqslant C_1\overline{C}C_2\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0},$$

donde, si $C := C_1\overline{C}C_2$, entonces,

$$\|U(t)\|_{X_1} \leqslant C\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t > 1 \quad \text{y} \quad \alpha \in (0, \mu),$$

lo que prueba el Teorema Principal de este trabajo. □

Conclusiones

Se obtuvo buena colocación del modelo de ecuaciones de Boussinesq de tipo Korteweg-de Vries.

Se obtuvo el decaimiento de las soluciones de un modelo de ecuaciones de Boussinesq de tipo Korteweg-de Vries, en un dominio limitado con condiciones de frontera específicas para datos iniciales pequeños.

Recomendaciones

El sistema de boussinesq ha sido estudiado en el caso en que las constantes son iguales a la identidad, para valores diferentes de la identidad modelan otros sistemas físicos para los cuales pueden estudiase buena colocación, como también el estudio de soluciones periódicas.

Un tema interesante es estudiar una propiedad de continuación única para el sistema lineal que en el caso de la KdV unidimensional aun es un problema en abierto y que podría ser estudiados en trabajos futuros.

Bibliografía

[1] R. A. Adams and J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics Series; Elsevier, 140, (2002).

[2] G. Bachman and L. Narici, *Functional Analysis*, Academic Press Inc., (1972).

[3] J. M. Ball, *Strongly continuos semigroups, weak solutions and variations of the constants formula,* , Proceedings of the American Mathematical Society, 63 (1977), 370 - 373.

[4] E. Bisognin, V. Bisognin and G. P. Menzala, *Exponential stabilization of a Korteweg-de Vries equations with localized damping*, Advances in Differential Equations, 8 (2003), 443 - 469.

[5] J. L. Bona, M. Chen and J.-C. Saut, *Boussinesq equations and other systems for small amplitude long waves in nonlinear dispersive media I : Derivation and the linear theory*, J. Nonlinear Sci., 12 (2002), 283-318.

[6] J. L. Bona, M. Chen and J. C. Saut, *Boussinesq equations and other systems for small amplitude long waves in nonlinear dispersive media. II : The nonlinear theory*, Nonlinearity, 17 (2004), 925-952.

[7] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, MASSON, Paris, (1983).

[8] E. Cerpa and E. Crépeau, *Rapid exponential stabilization for a linear Korteweg-de Vries equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B, 11 (2009), 655-668.

[9] E. Cerpa and E. Crépeau, *Boundary controllability for the nonlinear Korteweg-de Vries equation on any critical domain*, Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire, 26 (2009), 457-475.

[10] G. B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, Pure and Applied Mathematics: A Wiley - Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts, (1999).

[11] A. M. Gomes, *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicacoes as Equacoes de Evolucao*, 2 Edicao, Rio de Janeiro, UFRJ - IM, (2005).

[12] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley Easterm Limited, (1989).

[13] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, pertubations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1, in Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*, vol. 8, Masson, Paris, 1988, Contrôllabilité exacte [Exact controllability], com apêndices por E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau e J. Rauch.

[14] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, (1969).

[15] J. L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Dunod, Paris, (1968).

[16] L. A. Medeiros e M. M. Miranda, *Introducao aos Espacos de Sobolev e as Equacoes Diferenciais Parciais*, 1 Edicao, IM- UFRJ, (2011).

[17] L. A. Medeiros e M. M. Miranda, *Espacos de Sobolev (Iniciacao aos Problemas Elíticos nao Homogêneos)*, 1 Edicao, IM - UFRJ, (2000).

[18] S. Micu, J. H. Ortega and A. F. Pazoto, *On the controllability of a coupled system of two Korteweg-de Vries equations*, Communications in Contemporary Mathematics, 5 (2009), 799-827.

[19] S. Micu, J. Ortega, L. Rosier and B.-Y. Zhang, *Control and stabilization of a family of Boussinesq systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 24 (2009), 273-313.

[20] G. Perla Menzala, C. F. Vasconsellos and E. Zuazua, *Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, Quart. Appl. Math., 60 (2002), 111-129.

[21] A. F. Pazoto, *Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 11 (2005), 473-486 (eletronic).

[22] A. F. Pazoto and L. Rosier, *Stabilization of a Boussinesq system of KdVKdV type*, Systems and Control Letters, 57 (2008), 595-601.

[23] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 44, (1983).

[24] L. Rosier, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2 (1997), 33-55.

[25] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, (1976).

[26] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, (1971).

[27] R. Temam, *Navier - Stokes equations. Theory and Numerical Analysis*, Third Edition, Studies in Mathematics and its Applications, 2, North- Holland Publishing Co., Amsterdam, (1984).