

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE
AREQUIPA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y FORMALES

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



SINGULARIDADES TANGENCIALES DE CAMPOS DE VECTORES SUAVES POR
PARTES

Tesis presentada por: **Bach. Achire Quispe
Jesus Enrique** Para optar el título profesio-
nal de Licenciado en Matemáticas. Asesor:
Mg. Edwing Alexander Gonzales Quilca

AREQUIPA-PERÚ

2018

Abstract

The work concerns to the study of tangencies between a piecewise smooth vector field and its discontinuity. We consider fields defined on manifolds, which present discontinuities of jump in a submanifold of codimension one.

In the first part, we classify all types of tangency present in generic piecewise smooth vector fields. These are finite in number and it depends on the dimension of the phase space. But, although the singularities are generic, they are not always structurally stable, because the local configuration of the orbits and the discontinuity determine some bifurcations.

In the second part we do a local study of some of the tangential singularities: the fold, the cusp, the swallow tail and the double fold. We describe in great detail the behavior of the orbits next to these singularities and conclude with normal forms for each one of them. From this study it is concluded that the fold, the cusp and the swallow tail are structurally stable. On the other hand, reviewing previous studies, we see the presence of several bifurcations in the double fold of the Invisible-Invisible type, which suggest that this singularity may not be structurally stable.

Resumen

El trabajo concierne al estudio de las tangencias entre un campo suave por partes y su discontinuidad. Consideramos campos definidos en variedades, que presentan discontinuidades de salto sobre una subvariedad de codimensión uno.

En la primera parte clasificamos todos los tipos de tangencia presentes en campos suaves por partes genéricos. Estos son en número finito y depende de la dimensión del espacio de fase. Pero, aunque las singularidades son genéricas no siempre son estructuralmente estables, por que la configuración local de las órbitas y la discontinuidad determinan algunas bifurcaciones.

En la segunda parte hacemos un estudio local de algunas de las singularidades tangenciales: la doblez, la cúspide, la cola de golondrina y la doble doblez. Nosotros describimos con gran detalle el comportamiento de las órbitas próximo de estas singularidades y concluimos con formas normales para cada una de ellas. De tal estudio se concluye que la doblez, la cúspide y la cola de golondrina son estructuralmente estables. Por otro lado, revisando estudios previos, vemos la presencia de varias bifurcaciones en la doble doblez de tipo Invisible-Invisible, lo que hace conjeturar que posiblemente esta singularidad no sea estructuralmente estable.

Para mis profesores.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por que sin el nada fuese posible, por la vida y por lo que hizo en cada uno de nosotros.

Agradezco a mis padres por todo lo que sembraron en mi que ahora aflora en buenos frutos.

Agradezco a mi familia: mi querida esposa Marina, y mi preciosa hija Camila, son la inspiración de mis actuales días.

Agradezco a mis profesores por el conocimiento que me compartieron, por mostrarme el camino a seguir para poder superarme.

Agradezco a mi asesor, profesor Mg. Edwing Gonzales Quilca, quien colaboró directamente en la presentación de esta tesis.

Infinitamente gracias a todos los que me sugerían concluir esta tesis lo más antes posible, fue por la insistencia que finalmente pude concluir este trabajo.

Índice general

Agradecimientos	II
Introducción	IV
1. Campos de vectores suaves por partes en variedades	1
1.1. Campos de vectores en variedades	3
1.2. La topología C^r	4
1.3. Campos de vectores suaves por partes	5
1.4. Estabilidad estructural	14
2. Singularidades tangenciales genéricas	18
2.1. Contacto genérico de un campo y una subvariedad de codimensión uno . . .	18
2.2. Singularidades tangenciales	21
2.3. Genericidad de las singularidades tangenciales	22
3. Estabilidad estructural local de singularidades tangenciales genéricas	28
3.1. Tangencia Cuadrática	30
3.2. Cúspide	32
3.3. Cola de golondrina	35
3.4. Doble tangencia cuadrática	39
Conclusiones y recomendaciones	43
Bibliografía	44

Introducción

Sistemas dinámicos

Un sistema donde las variables dependen del tiempo es llamado un sistema dinámico. Modelos usados para describir los sistemas dinámicos son las ecuaciones diferenciales (caso de tiempo continuo) e iteración de funciones (caso discreto). La importancia de estos modelos es que describen el sistema y permiten predecir su evolución a corto y largo plazo.

Existe una teoría matemática bien desarrollada que estudia las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), sobre la hipótesis de diferenciabilidad de los términos que intervienen, donde se muestra existencia y unicidad de soluciones para EDOs y así se obtiene un flujo de órbitas que determina la evolución de los estados. Sin embargo, dada una ecuación diferencial, no es fácil encontrar en forma explícita la solución de la ecuación. Existen varios métodos para hallar soluciones de ecuaciones, pero la mayoría se limita a resolver ecuaciones lineales. La presencia de no linealidad en la ecuación diferencial eleva la dificultad grandemente y muchas veces resulta imposible encontrar una solución de esta. Por tanto, nuevos métodos fueron necesarios, tales como los numéricos que aproximan la solución en un dominio discretizado o los geométricos que descartando la posibilidad de encontrar una solución explícita intenta describir el comportamiento cualitativo relevante para entender la evolución del sistema.

La teoría geométrica-cualitativa de los sistemas dinámicos, iniciada con Poincaré, se enfoca en aspectos cualitativos tales como recurrencia (cierta periodicidad en la órbitas), comportamiento asintótico (convergencia de órbitas), sensibilidad a las condiciones iniciales (caos), sensibilidad a los parámetros del modelo (bifurcaciones), etc. Muchos impor-

tantes resultados fueron obtenidos en esta área, tales como el Teorema del flujo tubular que describe el comportamiento local de órbitas regulares, el Teorema de Hartman-Grobman que describe el comportamiento local en singularidades hiperbólicas, el Teorema de Peixoto que establece condiciones necesarias y suficientes para que un modelo bidimensional sea robusto o estructuralmente estable en el sentido que pequeñas perturbaciones sobre los parámetros no afecten los aspectos cualitativos del modelo, el Teorema de Kupka-Smale que generaliza las condiciones de Peixoto a dimensión mayor, el Teorema de Poincaré-Bendixon que afirma que en el plano o en la esfera el comportamiento recurrente es simple (periódico o fijo), etc [19].

Sistemas dinámicos suaves por partes

Sin embargo, en aplicaciones surgen modelos en los cuales no se tiene la hipótesis de diferenciabilidad. Por ejemplo al modelar la evolución de un sistema eléctrico con interruptores o un sistema mecánico con componentes que impactan, en sistemas de control, en finanzas, etc [27]. Lo que se observa es que el comportamiento es continuo o diferenciable por un lapso de tiempo, hasta el accionar de algún interruptor, entonces la dinámica cambia bruscamente en un microscópico intervalo de tiempo. Si bien el sistema no presenta discontinuidad rigurosamente hablando, el intervalo de tiempo donde sucede el cambio es pequeño comparado con el tiempo observable, por tanto un modelo adecuado en este caso es uno que considere un cambio discontinuo en el sistema en ese instante de tiempo. Modelos con elementos discontinuos provienen de esta manera y resulta imprescindible su comprensión.

La teoría de los sistemas dinámicos diferenciables no se puede aplicar directamente a sistemas con discontinuidades. Pero si podemos adaptar la teoría a este caso colocando las definiciones necesarias para su estudio. Estas y otras consideraciones son exhibidas en el magistral libro de Filippov [12] y el reciente libro de Bernardo et. al. [5]. En el libro de Filippov se enuncian resultados de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo, implicando sobre hipótesis muy débiles que, en este caso es posible obtener un sistema dinámico generalizado en el sentido que no se

tiene unicidad de soluciones. Se establece así la base necesaria para poder hacer un estudio cualitativo de los sistemas dinámicos con componentes no diferenciables.

Un caso particularmente interesante es cuando las discontinuidades son de salto y ocurren en hiperplanos, más generalmente en subvariedades de codimensión uno. Es decir se supone que el espacio de fase, digamos una variedad M , es dividido por una subvariedad de codimensión uno N en regiones, digamos M_1, \dots, M_k , y que los campos son diferenciables en las regiones M_i , excepto tal vez en el borde de las regiones M_i donde ocurre la transición de una región a otra. Campos definidos de esta manera son llamados campos suaves por partes. En el interior de las regiones M_i el campo es diferenciable y por tanto la teoría general se aplica. Lo diferente e interesante al considerar campos suaves por partes es el comportamiento de las órbitas cerca de la subvariedad de discontinuidad N . Es claro que para entender la dinámica de campos suaves por partes es fundamental estudiar el contacto entre un campo y una subvariedad, pues dependiendo del tipo de contacto se tendrá diferentes tipos de dinámicas.

Trabajos relacionados

El área de los sistemas dinámicos no diferenciables se ha desarrollado recientemente desde los 60. El primer trabajo en el área fue el trabajo de Andronov et. al. [3] sobre bifurcaciones de puntos singulares en sistemas no diferenciables. También los trabajos de Feigin [11] sobre C -bifurcaciones, Peterka y Babitskii [4] sobre osciladores de impacto, y Filippov [12] sobre movimientos deslizantes. Poco a poco fueron aceptándose convenciones y generalizaciones para la teoría siempre conectándolo con aplicaciones, es decir, buscando que la teoría y las aplicaciones guarden relación y armonía. Desde el inicio fue notado que estos sistemas no diferenciables poseían una rica e interesante dinámica, aún en dimensiones menores.

Actualmente, la literatura sobre este tema es extensa, se cuenta con los trabajos de Brogliato [6], [7], el análisis detallado de Kunze [17], y los libros sobre bifurcaciones en sistemas discontinuos [5], [18], y varios artículos publicados. Estos libros contienen además de teoría muchos ejemplos bien explicados de sistemas mecánicos y de control. También

hay una significativa literatura en la comunidad de control y electrónica, por ejemplo el libro [27] que tiene hermosos ejemplos que exhiben dinámica caótica inducido por la discontinuidad.

Sobre el contacto genérico de un campo y una subvariedad tenemos los trabajos de Vishik [26], Percell [21], Sotomayor y Teixeira [23], etc. Los autores caracterizan las tangencias genéricas que pueden ocurrir, y exhiben formas normales locales para estas tangencias. Obviamente a mayor dimensión más tangencias genéricas tenemos. El contacto no genérico da lugar a bifurcaciones, y es de interés estudiar estas bifurcaciones.

Objetivos del trabajo

En el presente trabajo estudiamos el comportamiento de los campos suaves por partes en las proximidades del conjunto de discontinuidad. Más específicamente, estudiamos las tangencias entre la curva de discontinuidad y las partes del campo a cada lado de ella. La dinámica cerca de una tangencia puede ser complicada, por ejemplo puede ocurrir que las órbitas espiralen alrededor de una singularidad o alguna línea en la discontinuidad. Por esto nosotros, seguimos la sugerencia de Thom y Smale, y empezamos estudiando aquellos campos que son robustos, en el sentido que su comportamiento cualitativo no presenta cambios topológicos por pequeñas perturbaciones. El problema general que abordamos es buscar propiedades genéricas necesarias y suficientes para que un campo sea robusto cerca de una tangencia.

Resultados

Usando la clasificación de tangencias genéricas de Vishik [26] vemos que entre un campo X en M (de dimensión n) y una subvariedad N (de codimensión 1) existen n tipos de singularidades tangenciales genéricas, que nosotros llamamos: singularidades tangenciales de orden k , con $1 \leq k \leq n$. Denotemos por S_X^k el conjunto de singularidades tangenciales de orden k de X . Sabemos de las formas normales de Vishik que los S_X^k son subvariedades de N de codimensión k . Además, nosotros denotamos por S_X^0 el conjunto de puntos donde

el campo es transversal a la subvariedad N . Notemos que S_X^0 es un subconjunto abierto de N . Además notemos que $N = S_X^0 \cup S_X^1 \cup \dots S_X^n$, donde la unión es disjunta.

Ahora, dado un campo suave por partes Z , sabemos que localmente ella tiene dos ramas, digamos X e Y . Entonces por un lado X tiene n tipos de singularidades tangenciales genéricas y por el otro Y también tiene n tipos de singularidades tangenciales. Aquí nosotros establecemos una condición necesaria para estabilidad estructural del campo Z , que los conjuntos de tangencia de las ramas X e Y sean transversales. Luego nosotros mostramos que esta condición es genérica, es decir, que el conjunto de campos que cumplen esas condiciones forman un conjunto abierto y denso en el espacio de campos, con la topología C^r . La principal herramienta para la demostración de este resultado es el Teorema de transversalidad de Thom y sus generalizaciones en términos de jets de aplicaciones diferenciables.

Suponiendo que se cumple la condición de transversalidad para las ramas del campo Z , esto es, asumiendo que $S_X^i \pitchfork S_Y^j$ para todo $0 \leq i, j \leq n$, nosotros obtenemos una preclasificación de las singularidades tangenciales genéricas presentes en Z . Antes observe que no todas las combinaciones son posibles, por que la condición de transversalidad implica que $0 < i + j \leq n$. Por tanto, el campo genérico Z presenta $(n + 1)! - 1$ tipos de singularidades tangenciales genéricas. En el Capítulo 3 hacemos un estudio local de algunas de estas singularidades, estudiamos el campo deslizante asociado próximo de la singularidad y observamos que si $p \in S_X^k \cap S_Y^0$, entonces el campos deslizante tiene una tangencia genérica de orden $k - 1$ en p (esta tangencia ocurre entre el campo deslizante y S_X^k). Además estudiamos la relación entre el campo deslizante y las variedades invariantes asociadas a los conjuntos de tangencia. Nosotros obtenemos formas normales topológicas para : Doble, Cúspide, Cola de Golondrina y Doble Doble, y describimos el comportamiento local de las órbitas. Este estudio permite concluir que estas singularidades son localmente estables, excepto la doble doblez cuyo estudio hecho aquí no es conclusivo.

Organización del trabajo

En el Capítulo 1 presentamos los campos de vectores suaves por partes. Para ellos adaptamos las definiciones de órbita, retrato de fase, etc, para lo cual seguimos las convenciones de Filippov. En el espacio de los campos suaves por partes se define la topología C^r , y una relación de equivalencia, lo que naturalmente induce el concepto de estabilidad estructural en ese espacio.

En el Capítulo 2 nosotros hacemos una preclasificación de las singularidades tangenciales de campos suaves por partes, esto sigue de los resultados de Vishik. Adicionamos una condición de transversalidad de los conjuntos de tangencia y mostramos que es una propiedad genérica.

En el Capítulo 3, hacemos el estudio local de algunas de las singularidades tangenciales genéricas en dimensión mayor o igual a cuatro. Empezamos con la doblez, la cúspide y la cola de golondrina, y para cada una de ellas exhibimos formas normales. De ahí se concluye que estas singularidades son estructuralmente estables. Finalmente estudiamos la forma normal de la doble doblez, exhibimos dos tipos de comportamiento distinto en la doble doblez del tipo Invisible-Invisible. Aunque ambos son bastante entendidos, resta aún mostrar la estabilidad estructural de esta singularidad.

Concluimos el trabajo con algunas sugerencias para trabajos futuros en esta línea.

Capítulo 1

Campos de vectores suaves por partes en variedades

En este capítulo nosotros definimos campos de vectores en variedades que son el escenario natural donde se presentan. Al hacer estudios locales, siempre podemos por medio de una carta llevarlo a un espacio euclidiano \mathbb{R}^n , donde sabemos es una aplicación punto-vector. Pero, al estudiar aspectos globales este no necesariamente es el caso, y la topología de la variedad influye en la posible dinámica que presenta el campo.

En el espacio de todos los campos de vectores de clase C^r definidos en una variedad compacta fijada definimos la conocida C^r topología, con la cual, dos campos de vectores son próximos si los campos y sus derivadas parciales hasta orden r son próximas. De esta manera se puede medir las perturbaciones de los campos de vectores.

El tema central y objeto de estudio en esta tesis son los campos de vectores suaves por partes, aunque para simplificar la notación nosotros solo consideramos campos de vectores suaves en dos partes, esto es, fijamos una variedad compacta y una subvariedad de codimensión uno que separa la variedad en dos partes, y consideramos los campos de vectores suaves excepto sobre la subvariedad donde el campo puede tener discontinuidades de salto. La subvariedad que separa la variedad ambiente será llamada superficie de discontinuidad. Para campos de vectores suaves por partes se ha propuesto varias extensiones de los conceptos de órbita, equivalencia topológica, etc. Para este trabajo nosotros usamos la convención de Filippov para definir órbitas o trayectorias para los campos de vectores

suaves por partes, con esto se muestra que por todo punto en el espacio de fase pasa una o más órbitas, o sea, se mantiene la existencia pero se pierde la unicidad por causa de la discontinuidad. De esta manera, un campo de vectores suave por partes da lugar a un sistema dinámico generalizado (sin unicidad), y el objetivo es entender el comportamiento cualitativo de las órbitas de un campo concluyendo con la representación gráfica de su retrato de fase.

Dos campos de vectores (suaves o suaves por partes) pueden tener retratos de fase similares desde el punto de vista topológico-cualitativo, en ese caso decimos que los campos son topológicamente equivalentes. La equivalencia topológica define una relación en el espacio de campos definidos en una variedad compacta prefijada. El problema general que se plantea es clasificar todas las clases de equivalencia de campos de vectores, un problema difícil e imposible. Recientemente se estableció otra meta en los sistemas dinámicos, se trata de clasificar y caracterizar todos los campos de vectores que son robustos bajo perturbaciones (estructuralmente estables), en otras palabras, clasificar las clases de equivalencias abiertas en el espacio de campos con la topología C^r .

El problema de clasificar los campos estructuralmente estables es muy importante debido a que es una propiedad del modelo usado, que en general es hipotético y sujeto a errores. Si un campo o modelo es estructuralmente estable, entonces podremos estar seguros que nuestro modelo se aproxima a la realidad. Este problema fue abordado por primera vez por matemáticos rusos Andronov y Leontovich [3], quienes estudiaron el problema de estabilidad estructural de campos definidos en regiones del plano, luego el matemático brasileño Mauricio Peixoto generalizó estos resultados para campos en variedades bidimensionales; además Peixoto muestra que el conjunto de campos estructuralmente estables es un conjunto denso en el espacio de campos con la C^r topología. Luego, Peixoto y Smale intentan clasificar campos estructuralmente estables en variedades de dimensión mayor, pero grandes sorpresas aparecen, y el problema se torna difícil, aún ahora es un problema abierto. Para campos de vectores suaves por partes, Filippov, Teixeira obtuvieron importantes resultados sobre estabilidad estructural en dimensión baja. Uno de los principales problemas al considerar campos de vectores suaves por partes es comprender el comportamiento de sus órbitas próximo de la superficie de discontinuidad, en particular

las tangencias del campo con esta superficie, asunto que será abordado en el desarrollo de esta tesis en los próximos capítulos.

1.1. Campos de vectores en variedades

Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable compacta. Si bien para estudios locales no es necesario la compacidad, a fin de abordar aspectos globales es que requerimos que el espacio de fase sea una variedad compacta.

Un campo de vectores de clase C^r en M es una aplicación de clase C^r , $X: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ que, a cada punto $p \in M$ asocia un vector $X(p)$ en el espacio tangente T_pM .

Denotaremos por $\mathfrak{X}^r(M)$ el espacio de los campos de vectores de clase C^r en M . Notemos que $\mathfrak{X}^r(M)$ tiene estructura de espacio vectorial.

Una curva integral de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ pasando por un punto $p \in M$ es una aplicación de clase C^{r+1} , $\alpha: I \rightarrow M$, donde I es un intervalo que contiene al 0, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$, para todo $t \in I$. La imagen de una curva integral es llamada de órbita o trayectoria del campo X .

Si $f: M \rightarrow N$ es un difeomorfismo de clase C^{r+1} y $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, entonces el pull-forward $Y = f_*X$, definido por $Y(q) = Df(f^{-1}(q))X(f^{-1}(q))$, es un campo de clase C^r en N . Además, si $\alpha: I \rightarrow M$ es una curva integral de X , entonces $f \circ \alpha: I \rightarrow N$ es una curva integral de Y . En particular, f lleva trayectorias de X en trayectorias de Y .

Así, si $x: U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$ es una carta local, $Y = x_*X$ es un campo de clase C^r en U_0 ; decimos que Y es una expresión local de X en la carta local (x, U) .

Con estas consideraciones, los teoremas locales sobre existencia, unicidad y diferenciabilidad de soluciones se extiende a campos en variedades. En resumen tenemos el siguiente resultado mostrado en [19].

Proposición 1.1.1. *Sea M una variedad compacta y $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Existe en M un flujo global de clase C^r para X . Esto es, una aplicación $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\phi(0, p) = p$ y $\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t, p)) = X(\phi(t, p))$.*

1.2. La topología C^r

Inicialmente consideremos el espacio $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ de aplicaciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ de clase C^r , $r \geq 0$, definidas en una variedad compacta M . Definiremos en este espacio una norma.

Tomemos en M un recubrimiento finito por abiertos V_1, V_2, \dots, V_k tal que V_i esté contenido en el dominio de una carta local (x_i, U_i) con $x_i(U_i) = B(0, 2)$ y $x_i(V_i) = B(0, 1)$, donde $B(0, 1)$ y $B(0, 2)$ son las bolas de radio 1 y 2 y centro en el origen de \mathbb{R}^m . Para $f \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$ denotamos por $f^i = f \circ x_i^{-1} : B(0, 2) \rightarrow \mathbb{R}^s$. Definimos:

$$\|f\|_r = \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{u \in B(0, 1)} \{ \|f^i(u)\|, \|Df^i(u)\|, \dots, \|D^r f^i(u)\| \}.$$

En efecto esto define una norma que es completa en el espacio $C^r(M, \mathbb{R}^s)$. Esta norma naturalmente induce una topología en el espacio $C^r(M, \mathbb{R}^s)$. Es fácil mostrar que esta topología no depende del recubrimiento V_1, V_2, \dots, V_s utilizado.

En esta topología dos aplicaciones $f, g \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$ están próximas si las aplicaciones f y g y sus derivadas hasta orden r están próximas en todos los puntos de M :

$$\|f - g\|_r < \epsilon \Leftrightarrow \|D^j f^i(x) - D^j g^i(x)\| < \epsilon, \forall 1 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq r, \text{ y } x \in B(0, 1)$$

Sea ahora M y N variedades, con M compacta y supongamos que N esta inmersa en un espacio euclidiano \mathbb{R}^s (por el teorema de Whitney toda variedad abstracta puede ser inmersa homeomórficamente en un espacio euclidiano, aunque esto no es necesario por que en este trabajo estamos suponiendo que las variedades son subvariedades de espacios euclidianos). Denotemos por $C^r(M, N)$ el conjunto de aplicaciones de clase C^r de M en N . Como $C^r(M, N) \subset C^r(M, \mathbb{R}^s)$ entonces naturalmente en $C^r(M, N)$ es inducida una topología (esta topología no depende del espacio ambiente \mathbb{R}^s que contiene a N).

Con la topología C^r definida arriba, es mostrado en [19], que el espacio de difeomorfismos de M de clase C^r , denotado por $\text{Dif}^r(M)$, es un subconjunto abierto de $C^r(M, M)$.

Finalmente consideremos el espacio $\mathfrak{X}^r(M)$ de campos de vectores de clase C^r en una variedad compacta M . Suponiendo que $M \subset \mathbb{R}^k$, tenemos que $\mathfrak{X}^r(M)$ es un subconjunto cerrado de $C^r(M, \mathbb{R}^k)$. Por tanto la topología C^r es inducida en $\mathfrak{X}^r(M)$. Con esta topología, $\mathfrak{X}^r(M)$ es un espacio de Baire separable. Además, todo campo de vectores $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ puede ser aproximado por un campo de clase C^∞ [19].

Otra manera de generar la topología C^r en $C^r(M, N)$ es considerando las siguientes vecindades básicas. Para una aplicación $f \in C^r(M, N)$, cartas locales $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $f(U) \subset V$, un compacto $K \subset U$ de M y un número $\epsilon > 0$, definimos

$$\mathcal{N}(f, \phi, U, \psi, V, K, \epsilon)$$

como el conjunto de aplicaciones $g \in C^r(M, N)$ con $g(U) \subset V$, tales que

$$\|D^k \psi \circ f \circ \phi^{-1}(x) - D^k \psi \circ g \circ \phi^{-1}(x)\| < \epsilon$$

para todo $k = 0, 1, 2, \dots, r$ y $x \in K$. La topología generada por estas vecindades básicas es llamada la topología "compacto-abierta C^r " o "topología débil de Whitney". Cuando M es compacto esta topología coincide con la topología C^r definida arriba [14].

1.3. Campos de vectores suaves por partes

Sea M una variedad compacta y sea N una subvariedad compacta de codimensión 1 de M . En este trabajo estamos interesados en estudiar campos de vectores que presentan discontinuidad sobre una subvariedad compacta $N \subset M$ de codimensión 1. Como el estudio es local próximo de N , y localmente se tiene que N separa M en dos partes, vamos a suponer que esto vale globalmente, o sea, supondremos que $M = M^+ \cup M^-$, donde M^+ y M^- son variedades con borde común $\partial M^+ = \partial M^- = N$. Una situación de estas sería con $M = S^2$ y la discontinuidad $N = S^1$ el ecuador de la esfera, que la divide en dos partes.

Localmente la subvariedad N es imagen inversa de un valor regular de una función de M . Otra vez, por simplicidad y dado que el estudio es local, vamos a suponer que la subvariedad entera N es imagen inversa del valor regular 0 de una función $h: M \rightarrow \mathbb{R}$, así $M^- = h^{-1}(-\infty, 0]$, $M^+ = h^{-1}[0, \infty)$ y $N = h^{-1}(0)$.

Denotaremos por $\Omega^r(M, N)$ el espacio de campos de vectores suaves por partes Z tangentes a M de la siguiente forma

$$Z(p) = \begin{cases} X(p), & \text{si } h(p) > 0; \\ Y(p), & \text{si } h(p) < 0. \end{cases}$$

donde $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$. El campo Z será denotado por $Z = (X, Y)$.

Naturalmente tenemos la identificación $i: \mathfrak{X}^r(M) \times \mathfrak{X}^r(M) \rightarrow \Omega^r(M, N)$, $i(X, Y) = Z$. Usando esta identificación llevamos la topología C^r producto de $\mathfrak{X}^r(M) \times \mathfrak{X}^r(M)$ hacia $\Omega^r(M, N)$. En esta topología dos campos suaves por partes $Z = (X, Y)$ y $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$ serán próximos si los campos X y \tilde{X} y sus derivadas hasta orden r son próximos en M^+ y también los campos Y y \tilde{Y} y sus derivadas hasta orden r son próximos en M^- .

Observe que los campos en $\Omega^r(M, N)$ son de clase C^r excepto en N donde presentan discontinuidad de salto (las derivadas laterales hasta orden r existen pero no coinciden). Así, la teoría local fuera de N coincide con la teoría clásica de campos suaves. Entonces el asunto principal está en estudiar los campos de vectores en las proximidades de N .

Comenzamos extendiendo los conceptos generales de sistemas dinámicos para campos de vectores suaves por partes, conceptos tales como órbitas, singularidades, etc.

Para definir órbitas soluciones usaremos la convención de Filippov [12]. Según el método convexo de Filippov, al campo de vectores suave por partes $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, N)$ le asociamos un campo multivaluado \mathcal{Z} definido en M por

$$\mathcal{Z}(p) = \begin{cases} X(p), & \text{si } h(p) > 0; \\ \{\lambda X(p) + (1 - \lambda)Y(p), \lambda \in [0, 1]\} & \text{si } h(p) = 0; \\ Y(p), & \text{si } h(p) < 0. \end{cases}$$

Observemos que el campo \mathcal{Z} es multivaluado en N , y es definido en $p \in N$ como el conjunto de vectores que son combinación convexa de $X(p)$ y $Y(p)$.

Luego consideramos la inclusión diferencial asociada a Z

$$x' \in \mathcal{Z}(x), \quad x \in M. \tag{1.3.1}$$

Definición 1.3.1. Una curva integral para el campo $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, N)$ que pasa por $p \in M$ es una curva absolutamente continua $x: I \rightarrow M$ definida en un intervalo I que contiene a 0, tal que $x(0) = p$ y $x'(t) \in \mathcal{Z}(x(t))$ para todo $t \in I$.

La formalización de la existencia de curvas integrales para la inclusión diferencial (1.3.1) puede ser encontrada en el libro de Filippov [12]. En este libro se muestra existencia de curvas integrales para (1.3.1) pasando por cualquier punto $p \in M$; sin embargo, estas soluciones no son únicas. Como M es compacto estas órbitas son definidas globalmente en

todo \mathbb{R} . En el libro también es establecido dependencia continua de las curvas integrales de los parámetros en el lado derecho de la inclusión diferencial (1.3.1).

Definición 1.3.2. Un segmento de órbita del campo $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, N)$ es la imagen de una curva integral de Z . Una órbita de Z por p es la imagen de una curva integral maximal $x: \mathbb{R} \rightarrow M$, con $\phi(0) = p$.

A continuación vamos a describir los tipos de órbitas que puede tener un campo suave por partes.

Dado un campo $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, N)$, denotaremos $Xh(p) = \langle X(p), \nabla h(p) \rangle$, y definimos por inducción $X^{k+1}h(p) = \langle X(p), \nabla X^k h(p) \rangle$. Aquí $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto interno en $T_p M$ inducido del espacio euclidiano ambiente.

Sobre la subvariedad de discontinuidad N podemos distinguir dos subconjuntos:

Conjunto de transversalidad Es el conjunto de puntos en N donde ambos campos X y Y son transversales a N . Lo denotaremos por

$$O_Z = \{p \in N, Xh(p)Yh(p) \neq 0\}.$$

Conjunto de tangencia Es el conjunto de puntos de N donde por lo menos uno de los campos X o Y es tangente a N . Lo denotaremos por:

$$S_Z = \{p \in N, Xh(p)Yh(p) = 0\}.$$

Genericamente¹ S_Z es un subconjunto flaco² en N . Los puntos en S_Z son llamados singularidades tangenciales y son el objeto de estudio de este trabajo.

El conjunto O_Z es un subconjunto abierto de N . Sobre este conjunto se puede distinguir aún los siguientes subconjuntos:

Región de costura positiva Es el conjunto de puntos de N donde ambos campos X e Y apuntan para M^+ . Lo denotaremos por

$$SWR^+(Z) = \{p \in N, Xh(p) > 0, Yh(p) > 0\}$$

¹Una propiedad es genérica si es válida por un conjunto abierto y denso.

²Un conjunto es flaco si es unión numerable de cerrados con interior vacío.

Región de costura negativa Es el conjunto de puntos de N donde ambos campos X y Y apuntan para M^- . Lo denotaremos por

$$SWR^-(Z) = \{p \in N, Xh(p) < 0, Yh(p) < 0\}$$

Región de deslice Es el conjunto de puntos de N donde el campo X apunta para M^- y el campo Y apunta para M^+ . Lo denotaremos por

$$SLR(Z) = \{p \in N, Xh(p) < 0, Yh(p) > 0\}$$

Región de escape Es el conjunto de puntos de N donde el campo X apunta para M^+ y el campo Y apunta para M^- . Lo denotaremos por

$$ESCR(Z) = \{p \in N, Xh(p) > 0, Yh(p) < 0\}$$

Ejemplo 1.3.3. Consideremos el campo suave por partes planar

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, \sin x) & ; y > 0 \\ Y(x, y) = (-1, x) & ; y < 0 \end{cases}$$

En este caso, la discontinuidad es definida por la función $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = y$. Las tangencias de los campos X e Y con la discontinuidad son halladas resolviendo los sistemas

$$\begin{cases} h(x, y) = y = 0 \\ Xh(x, y) = \sin x = 0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} h(x, y) = y = 0 \\ Yh(x, y) = x = 0 \end{cases}$$

De donde se tiene que $S_X = \{(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}\}$, $S_Y = \{(0, 0)\}$ y $S_Z = S_X \cup S_Y$. El complemento de S_Z es el conjunto O_Z . Observemos en la figura (1.1) que los puntos de tangencia dividen la discontinuidad en intervalos los cuales pueden ser clasificados en:

$$SWR^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} ((2k-1)\pi, 2k\pi)$$

$$SLR = \bigcup_{k=1}^{\infty} (2k\pi, (2k+1)\pi)$$

$$ESCR = \bigcup_{k=1}^{\infty} (-(2k+1)\pi, -2k\pi)$$

$$SWR^- = \bigcup_{k=1}^{\infty} (-2k\pi, -(2k-1)\pi)$$

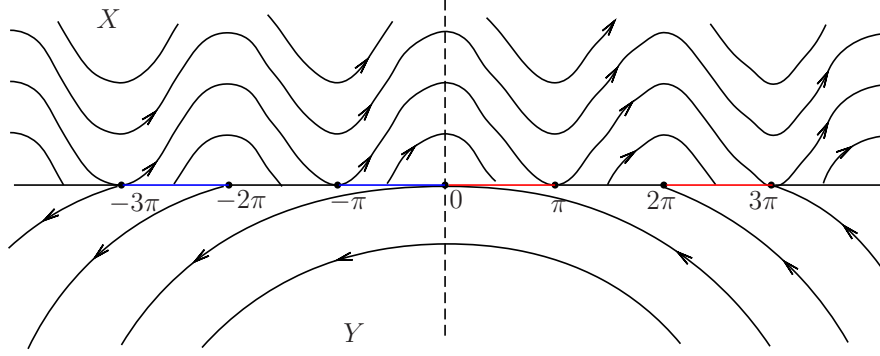


Figura 1.1: Campo de vectores del ejemplo 1.3.3 exhibiendo los puntos de tangencia y las distintas regiones en la discontinuidad. De rojo la región de deslice, de azul la región de escape, y de negro la región de costura.

En SWR^+ las órbitas de Y llegan a N y las órbitas de X salen de N , entonces órbitas son formadas concatenando los segmentos de órbitas de Y y de X . Es fácil ver que localmente hay unicidad de órbitas pasando por un punto sobre esta región. Similarmente hay unicidad local de órbitas en SWR^- .

En SLR las órbitas de X y Y están llegando a la subvariedad N , y por tanto, la única forma de continuar estas órbitas es caminar sobre la superficie N . En efecto, sobre SLR es definido un campo vectorial Z^N tangente a N tal que $Z^N(p) \in \mathcal{Z}(p)$ para todo $p \in SLR$. El vector $Z^N(p)$ es escogido como el vector en $\mathcal{Z}(p)$ que es tangente a N (ver figura 1.2). Como X y Y apuntan para lados distintos de N entonces $Z^N(p)$ existe y es dado por

$$Z^N(p) = \lambda X(p) + (1 - \lambda)Y(p), \text{ donde } \lambda = \frac{Yh(p)}{Yh(p) - Xh(p)} \quad (1.3.2)$$

El campo Z^N definido arriba es llamado *campo vectorial deslizante* asociado a Z . Observe-mos que una órbita de Z^N es un órbita de Z . Otras órbitas son formadas concatenando segmentos de órbita de X y Y que llegan a SLR con las órbitas de Z^N . Así, vemos que por un punto pasa una familia a un parámetro de órbitas de Z .

Similarmente en $ESCR$ es definido el campo vectorial deslizante Z^N por la ecuación (1.3.2). Órbitas pasando por un punto en $ESCR$ son formadas concatenando segmentos de órbitas del campo deslizante con segmentos de órbita del campo X o Y . En este caso tampoco tenemos unicidad.

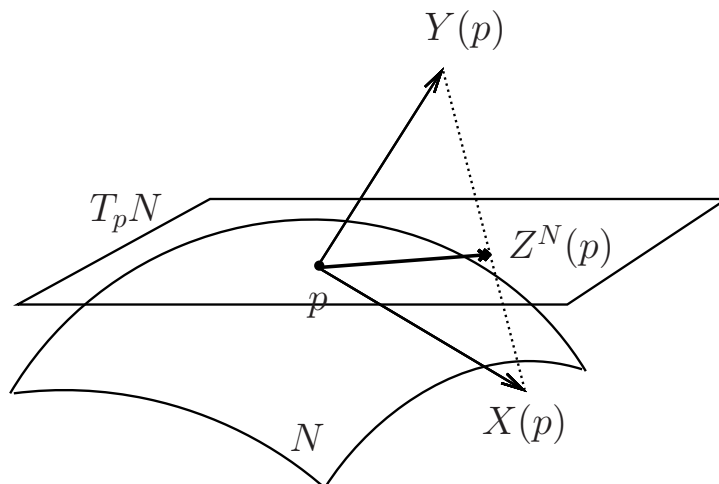


Figura 1.2: En la región donde los campos X y Y apuntan en direcciones opuestas es definido un campo tangente a N . Para cada punto p se escoge el único vector en el cono formado por $X(p)$ y $Y(p)$ que es tangente a N . El campo así definido es llamado campo deslizando y sus órbitas determinan como evolucionan las órbitas que llegan a la discontinuidad en esta región.

Un punto p tal que $0 \in \mathcal{Z}(p)$ es llamado *punto estacionario*. En este caso el punto p es una órbita del campo Z .

Observemos que si $p \in SLR \cup ESCR$ y $X(p) = \alpha Y(p)$ con $\alpha \geq 0$, entonces tenemos que $Z^N(p) = 0$, luego p es un punto estacionario. Un punto crítico del campo deslizando es llamado *pseudo-equilibrio*.

En resumen, una órbita para un campo suave por partes es una curva suave por partes que podría tener autointersección, pero estas ocurrirían en N . Genéricamente las órbitas de un campo $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, N)$ son curvas suaves por partes formadas concatenando segmentos de órbita de X , Y y del campo deslizando Z^N , con orientación coherente. En casos degenerados, el contacto entre el campo y N puede ser especial y dar lugar a otros tipos de órbitas. Los siguientes ejemplos exhiben órbitas deslizantes especiales, los cuales suceden en sistemas degenerados.

Ejemplo 1.3.4. Sea el campo constante por partes Z definido en \mathbb{R}^2 por $Z(x, y) = (1, 0)$ si $y > 0$, y $Z(x, y) = (1, 1)$ si $y < 0$. La discontinuidad para este campo es la línea $y = 0$.

Note que la rama superior de Z es tangente a la discontinuidad en todo punto. Así, el cono $\mathcal{Z}(x, 0)$ contiene al vector $(1, 0)$ tangente a la discontinuidad, por tanto hay una órbita que camina sobre la discontinuidad (observe que no se trata de una órbita deslizante por que no está en la región de deslice)(Ver figura 1.3, lado izquierdo). Órbitas de este tipo serán llamadas órbitas deslizantes de orden superior.

Ejemplo 1.3.5. Consideremos el campo tridimensional lineal por partes

$$Z(x, y, z) = \begin{cases} (0, 1, -y) & ; z > 0 \\ (a, -1, -y) & ; z < 0. \end{cases}$$

donde a es un parámetro positivo. La superficie de discontinuidad es el plano $z = 0$. Para este campo, tenemos que las tangencias de las ramas superior $X(x, y, z) = (0, 1, -y)$ y la rama inferior $Y(x, y, z) = (a, -1, -y)$ coinciden y están a lo largo del eje x . Sobre esta recta tenemos que el cono $\mathcal{Z}(x, 0, 0)$ formado por $X(x, 0, 0) = (0, 1, 0)$ y $Y(x, 0, 0) = (a, -1, 0)$ contiene al vector tangente $Z^*(x, 0, 0) = (a/2, 0, 0)$ el cual determina una órbita deslizante de orden superior que camina sobre el eje x (ver figura 1.3, lado derecho)

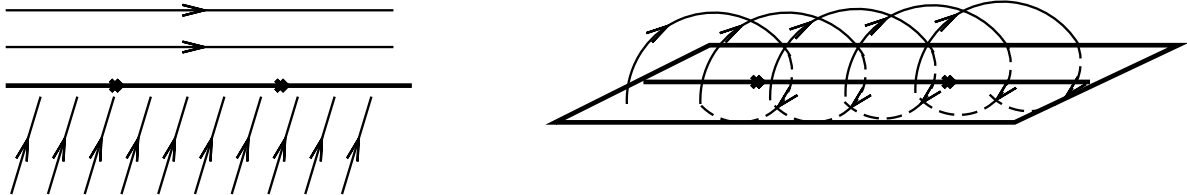


Figura 1.3: Órbitas deslizantes degeneradas. A la izquierda, un campo bidimensional tangente a la discontinuidad en todo punto, y a la derecha un campo tridimensional con doble tangencia a lo largo de una línea.

En el caso genérico, para nuestro fines, vamos a clasificar las órbitas de un campo $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, N)$ como sigue:

Órbitas regulares Son órbitas formadas concatenando segmentos de órbitas de X y Y que encuentran N transversalmente.

Órbitas tangentes Son órbitas formadas concatenando segmentos de órbitas de X y Y que contienen por lo menos algún punto de tangencia.

Órbitas deslizantes Son órbitas del campo deslizante Z^N .

Órbitas mixtas Son órbitas formadas concatenando segmentos de órbitas de X, Y con segmentos de órbita del campo deslizante Z^N , y que contienen por lo menos un segmento regular y uno deslizante.

Similarmente son clasificados los segmentos de órbita en: regular, tangente, deslizante y mixta.

Definición 1.3.6. Un segmento de pseudo-órbita del campo $Z = (X, Y)$ es una curva continua formada concatenando segmentos de órbitas de X, Y , y del campo vectorial deslizante Z^N no necesariamente en orientación coherente. Una pseudo-órbita es un segmento de pseudo-órbita maximal.

Pseudo-órbitas no tienen orientación definida, pudiendo ser orientadas de dos maneras. Clasificaremos las pseudo-órbitas de un campo $Z = (X, Y)$ como sigue

Pseudo-órbitas regulares Son aquellas formadas concatenando segmentos de órbitas de X y Y que intersectan N transversalmente.

Pseudo-órbitas tangentes Son aquellas formadas concatenando segmentos de órbitas de X y Y que contiene alguna tangencia.

Pseudo-órbitas mixtas Son aquellas formadas concatenando segmentos de órbitas de X, Y y del campo deslizante Z^N , y que contiene por lo menos un segmento regular y un segmento deslizante

Similarmente clasificamos segmentos de pseudo-órbitas en: regular, tangente y mixta.

En el siguiente ejemplo ilustramos los varios tipos de órbitas y pseudo-órbitas.

Ejemplo 1.3.7. Consideremos el campo planar

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1 - x - y, 1 + x - y) & ; y > 0 \\ Y(x, y) = (0, 1) & ; y < 0. \end{cases}$$

El retrato de fase de X es una espiral convergiendo al equilibrio en $p = (0, 1)$. Y el retrato de fase de Y consta de rectas verticales orientadas hacia arriba. El campo X es tangente a

la discontinuidad $y = 0$ en el punto $(-1, 0)$, donde tiene una tangencia cuadrática visible. Esta tangencia divide la discontinuidad en dos partes, $x < -1$ que es de deslice y $x > -1$ que es de costura positiva. En la región de deslice el campo deslizante apunta hacia la dirección del eje x positivo, por tanto la órbita deslizante camina hacia la tangencia, y luego se dirige hacia el equilibrio.

Aquí observamos distintos tipos de órbitas (Ver figura 1.4). La órbita que empieza en a , sigue para b , luego muere en p , es una órbita regular. La órbita que va de c a d , luego a q y finalmente muere en p es una órbita tangente. La órbita que va de e para f , luego a u y q , finalmente muere en p , es una órbita mixta. La curva continua que empieza en v y sigue para u , luego para f siguiendo la órbita de X en sentido contrario, de f hacia e siguiendo la órbita de Y en sentido contrario es una pseudo-órbita regular.

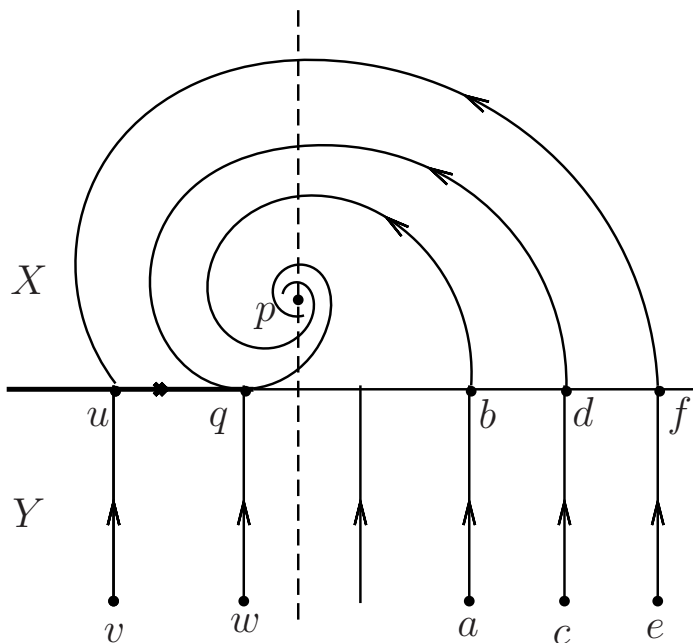


Figura 1.4: Retrato de fase de un campo suave por partes exhibiendo distintos tipos de órbitas.

1.4. Estabilidad estructural

En el espacio de campos de vectores $\Omega^r(M)$ definimos una relación de equivalencia, a fin de clasificarlos de acuerdo al comportamiento topológico de su retrato de fase.

Definición 1.4.1. Dos campos $Z, \tilde{Z} \in \Omega^r(M, N)$ son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo N -invariante $f: M \rightarrow M$, que lleva órbitas de Z en órbitas de \tilde{Z} preservando la orientación de las órbitas. Decimos que f es una equivalencia topológica entre Z y \tilde{Z} .

Una equivalencia topológica lleva singularidades en singularidades, órbitas regulares en órbitas regulares, tangencias en tangencias, órbitas deslizantes en órbitas deslizantes, órbitas cerradas en órbitas cerradas; en resumen, preserva la estructura topológica de las órbitas. Así, cuando el interés está en los aspectos cualitativos de los campos de vectores suaves por partes, la equivalencia topológica resulta ser una relación natural para clasificar y estudiar campos.

En la literatura existen varias definiciones de equivalencia entre campos de vectores suaves por partes (ver [5], [8], [12]). Naturalmente una equivalencia debe llevar órbitas en órbitas preservando su orientación. También es natural exigir que una equivalencia debe preservar la subvariedad de discontinuidad, aunque algunos autores relajan esta condición; sin embargo dada su importancia en aplicaciones nosotros exigimos que una equivalencia preserve la discontinuidad N .

observamos que, por lo menos para campos con tangencia genérica, el hecho que una equivalencia lleva órbitas en órbitas implica que una equivalencia lleva pseudo-órbitas en pseudo-órbitas.

Proposición 1.4.2. *Sea $f: M \rightarrow M$ una equivalencia entre Z_1 y Z_2 . Entonces f lleva pseudo-órbitas de Z_1 en pseudo-órbitas de Z_2 .*

Demostración. Sea $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k$ un segmento de pseudo-órbita de Z_1 , donde cada γ_i es un segmento de órbita de Z_1 y el signo $+$ indica concatenación. Como f lleva órbitas en órbitas, sigue que $f(\gamma_i)$ son segmentos de órbita de Z_2 . Por la continuidad de f sigue que $f(\gamma) = f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + \dots + f(\gamma_k)$ es una curva continua. Concluimos que $f(\gamma)$ es un segmento de pseudo-órbita de Z_2 . \square

De la relación de equivalencia definida en $\Omega^r(M, N)$ y la C^r topología sigue naturalmente el concepto de estabilidad estructural.

Definición 1.4.3. Decimos que $Z \in \Omega^r(M, N)$ es estructuralmente estable si existe una vecindad \mathcal{V} de Z en $\Omega^r(M, N)$ tal que todo $\tilde{Z} \in \mathcal{V}$ es topológicamente equivalente a Z .

Aquí, el objetivo general es caracterizar los campos de vectores suaves por partes estructuralmente estables. Esta tarea es en general difícil, mas aún en dimensión superior (mayor que 2). Para este fin, el estudio puede comenzar estudiando el comportamiento local, y así buscar propiedades genéricas y necesarias para estabilidad estructural.

En el resto de esta sección vamos exhibir ejemplos de campos de vectores estructuralmente estables y estructuralmente inestables.

Ejemplo 1.4.4. Consideremos el campo X y su perturbado \tilde{X} mostrado en la figura 1.5. Observe que X posee una pseudo-órbita regular conectando las sillas, en cuanto \tilde{X} presenta una pseudo-órbita mixta conectando las sillas. Como una equivalencia preserva la discontinuidad, estos dos campos no son equivalentes. De esta manera vemos que cualquier campo que tiene una pseudo-órbita regular conectando sillas es estructuralmente inestable.

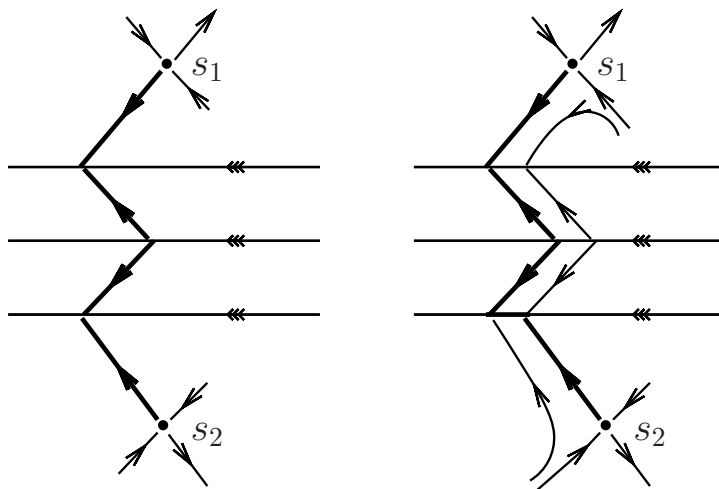


Figura 1.5: A la izquierda una campo exhibiendo una pseudo-conexión de sillas, y a la derecha una perturbación que rompe la conexión de sillas.

Ejemplo 1.4.5. Sea el campo suave por partes definido en la esfera, cuyas ramas, definidas en los hemisferios norte y sur son $X(x, y) = (0, 1)$ y $Y(x, y) = (\sin \theta, \cos \theta)$, donde θ es un parámetro. Observemos que se tiene cuatro puntos de tangencia invisible q_1, q_2, q_3, q_4 lo que separa el círculo de discontinuidad S^1 en cuatro regiones, una de costura positiva, seguido de una región de escape, una de costura negativa y una de deslice. En la región de escape hay un único pseudoequilibrio repulsor p_1 y en la región de deslice un único pseudoequilibrio atractor p_2 . La dinámica de este campo es simple, todas las órbitas nacen en p_1 y mueren en p_2 . Lo único interesante es que saliendo de la región de escape, la órbita puede pasar una o varias veces por la región de costura antes de alcanzar la región de deslice, esto dá lugar a distintos tipos topológicos que dependen del ángulo de rotación θ . Además es interesante observar las pseudo-órbitas regulares del campo; cuando $\theta/2\pi \in \mathbb{Q}$ todas las pseudo-órbitas son cerradas, y en otro caso las pseudo-órbitas son densas en la esfera. Así distinguimos dos tipos topológicos sensibles, lo que muestra que el campo Z es estructuralmente inestable según nuestra definición, aunque su comportamiento dinámico sea simple y robusto.

$$X(x, y) = (1, 0) \quad Y(x, y) = (\sin \theta, \cos \theta)$$

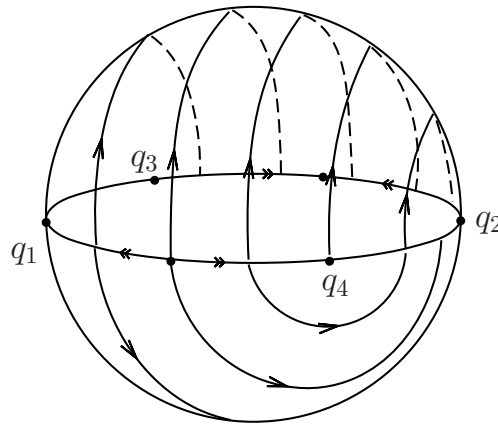
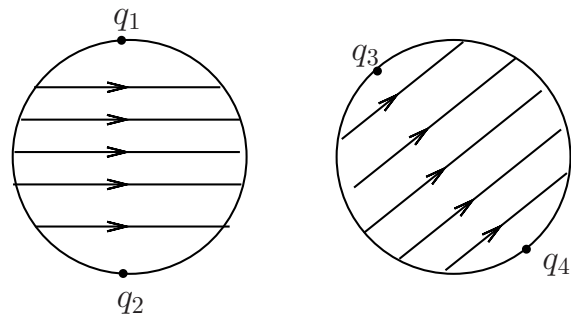


Figura 1.6: Campo en la esfera que presenta pseudo-órbitas cerradas cuando θ/π es racional, y pseudo-órbitas recurrentes densas en la esfera cuando θ/π es irracional.

Capítulo 2

Singularidades tangenciales genéricas

Uno de los principales problemas al considerar campos de vectores suaves por partes es comprender el comportamiento de las órbitas próximo de la superficie de discontinuidad. Las órbitas de las ramas del campo suave por partes podrían ser tangentes a la superficie de discontinuidad y hacerlo de muchas maneras. El contacto entre un campo y una subvariedad fue estudiado anteriormente por Percell [21] y Vishik [26], los autores clasifican el contacto genérico, es decir aquel que es estable bajo perturbaciones y que está presente naturalmente. Estos resultados son aplicados para campos de vectores suaves por partes [2],[23], obteniéndose condiciones sobre las tangencias que son necesarias para estabilidad estructural de estos campos. Además de la genericidad de las tangencias, en este capítulo establecemos condiciones de transversalidad sobre los conjuntos de tangencia de las ramas de los campos, las cuales son necesarias para estabilidad estructural de estos. Más aún, siguiendo las ideas de Percell, y usando teoremas de transversalidad nosotros mostramos que esta condición es genérica.

2.1. Contacto genérico de un campo y una subvariedad de codimensión uno

Sea M una variedad compacta $n + 1$ dimensional y N una subvariedad compacta de dimension n . Supongamos que N divide M en dos pedazos, esto es, que existe una partición

$M = M^+ \cup M^-$ donde M^\pm son variedades con bordo común $\partial M^\pm = N$.

Vamos a fijar una función C^∞ , $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ que tiene 0 como valor regular y tal que $h^{-1}(0) = N$, $h^{-1}(-\infty, 0] = M^-$ y $h^{-1}[0, \infty) = M^+$. Dado un campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, denotaremos la derivada de Lie de h en la dirección de X por $Xh(p) = \langle X(p), \nabla h(p) \rangle$, y definimos por inducción $X^{k+1}h(p) = XX^k h(p)$, para todo $p \in M$.

Dado un campo $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, N)$, el comportamiento local próximo de la subvariedad de discontinuidad N depende en parte del contacto de los campos X y Y con N . Así vemos la necesidad de estudiar el contacto genérico y estable entre un campo y una subvariedad. En esta sección presentamos los resultados de Vishik [26] y Percell [21] sobre tangencias genéricas y así obtenemos condiciones necesarias para estabilidad estructural local de campos suaves por partes.

Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in N$. Decimos que p es un punto regular de X si la órbita que pasa por p atraviesa transversalmente N , esto es, si $Xh(p) \neq 0$.

Decimos que p es una singularidad tangencial de X si la órbita por p es tangente a N en p , esto es, si $Xh(p) = 0$ y $X(p) \neq 0$. Decimos que p es una singularidad tangencial genérica de X si cumple una y solo una de las siguientes condiciones:

- $Xh(p) = 0$ y $X^2h(p) \neq 0$ (doblez o singularidad tangencial de orden 1);
- $Xh(p) = X^2h(p) = 0$, $X^3h(p) \neq 0$ y el conjunto $\{\nabla h(p), \nabla Xh(p), \nabla X^2h(p)\}$ es linealmente independiente (cúspide o singularidad tangencial de orden 2)
- $Xh(p) = X^2h(p) = X^3h(p) = 0$, $X^4h(p) \neq 0$ y el conjunto $\{\nabla h(p), \nabla Xh(p), \nabla X^2h(p), \nabla X^3h(p)\}$ es linealmente independiente (cola de golondrina o singularidad tangencial de orden 3)
- \vdots
- $Xh(p) = X^2h(p) = \dots = X^n h(p) = 0$, $X^{n+1}h(p) \neq 0$ y el conjunto $\{\nabla h(p), \nabla Xh(p), \nabla X^2h(p), \dots, \nabla X^n h(p)\}$ es linealmente independiente (singularidad tangencial de orden n).

Observación 2.1.1. Notemos que el término singularidad tangencial genérica depende de la dimensión del espacio de fase. Por ejemplo una doblez será genérica si la dimensión

es mayor o igual a dos, la cúspide es genérica en dimensión mayor o igual a tres, etc. En general, si el espacio de fase tiene dimensión $n + 1$ y la discontinuidad tiene dimensión n entonces existen n tipos de tangencias genéricas. La genericidad de estas tangencias se basa en el hecho que las condiciones que las definen están relacionadas con transversalidad de subvariedades en el espacio de campos. En efecto, si p es una singularidad tangencial de orden k , entonces las subvariedades $h(x) = 0$, $Xh(x) = 0, \dots, X^k h(x) = 0$ se encuentran transversalmente en p , y p no pertenece a la subvariedad $X^{k+1}h(x) = 0$.

El siguiente resultado debido a Vishik [26] exhibe las formas normales para las singularidades genéricas.

Teorema 2.1.2. *Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y supongamos que $\dim(M) = n + 1$ y $r = \infty$. Si $p \in N$ es una singularidad tangencial genérica de X de orden k ($1 \leq k \leq n$), entonces existe un sistema de coordenadas locales $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ en p tal que*

- N es dado por $x_1 = 0$ y
- $X(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (\epsilon x_2, x_3, \dots, x_{k+1}, 1, 0, \dots, 0)$, donde $\epsilon = \text{sgn}(X^{k+1}h(p))$.

Denotamos por $\mathfrak{X}_0^r(M)$ el conjunto de campos $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ tal que todo punto de N o es regular o es una singularidad genérica de X . El siguiente resultado es consecuencia del Teorema de Percell [21]:

Teorema 2.1.3. *El conjunto $\mathfrak{X}_0^r(M)$ es un subconjunto abierto y denso en $\mathfrak{X}^r(M)$.*

Demostración. Es fácil ver que el conjunto es abierto. La densidad es mostrado para el caso $r = \infty$ en Percell [21]. Como todo campo de clase C^r puede ser aproximado por un campo de clase C^∞ , entonces el teorema sigue del Teorema de Percell. \square

Estos resultados serán importantes para estudiar campos de vectores suaves por partes. En efecto, para que un campo de vectores $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, N)$ sea estructuralmente estable es necesario que $X, Y \in \mathfrak{X}_0^r(M)$.

2.2. Singularidades tangenciales

Dados un campo de vectores $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, N)$ y un punto no estacionario $p \in N$, tenemos tres posibilidades a suceder:

Caso Regular-Regular: Ambos campos X y Y son transversales a N en p ;

Caso Singular-Regular: Uno de los campos X o Y es tangente a N y el otro es transversal a N en el punto p ;

Caso Singular-Singular: Ambos campos X y Y son tangentes a N en p .

El comportamiento local para cada caso es particular, siendo el caso Regular-Regular relativamente simple y mientras que el caso Singular-Singular tiene dinámica complicada.

Del estudio hecho en la sección 2.1, el campo $Z = (X, Y)$ será estructuralmente estable solamente si $X, Y \in \mathfrak{X}_0^r(M)$, esto es, si todas las singularidades tangenciales de X y Y son genéricas. Denotemos por S_X y S_Y el conjunto de puntos de tangencia de X y Y , respectivamente. Tenemos la siguiente descomposición

$$S_X = S_X^1 \cup S_X^2 \cup \dots \cup S_X^n \quad (2.2.1)$$

$$S_Y = S_Y^1 \cup S_Y^2 \cup \dots \cup S_Y^n \quad (2.2.2)$$

donde S_X^k y S_Y^k denota el conjunto de singularidades tangenciales de orden k de X y Y respectivamente, para $k = 1, \dots, n$. Los conjuntos S_X^k y S_Y^k son subvariedades de N de codimensiones $\text{codim}(S_X^k) = \text{codim}(S_Y^k) = k$.

Vemos que otra condición necesaria para estabilidad estructural de $Z = (X, Y)$ es que las variedades S_X^k y S_Y^l sean transversales, $S_X^k \pitchfork S_Y^l$ para todos $1 \leq k, l \leq n$. Cuando $S_X^k \pitchfork S_Y^l$, el conjunto $S_X^k \cap S_Y^l$ es una subvariedad de N de codimension $k + l$.

También observemos que la transversalidad de S_X^k y S_Y^l implica que S_X y S_Y son transversales. Así, localmente en la intersección, N es separado por S_X y S_Y en cuatro regiones: SLR , $ESCR$, SWR^- y SWR^+ . Sabemos que en $SLR \cup ESCR$ es definido el campo vectorial deslizante por la formula

$$Z^N = \frac{YhX - XhY}{Yh - Xh}. \quad (2.2.3)$$

Consideremos también el llamado *campo vectorial deslizante normalizado* $\bar{Z}^N = YhX - XhY$. La ventaja de considerar \bar{Z}^N en lugar de Z^N es que este campo es bien definido y

es de clase C^r sobre todo N . Observe que como $\bar{Z}^N = (Yh - Xh)Z^N$ entonces los campos Z^N y \bar{Z}^N son equivalentes en SLR y, los campos Z^N y $-\bar{Z}^N$ son equivalentes en $ESCR$.

Observemos ahora que $\bar{Z}^N(p) = 0$ si $p \in S_X \cap S_Y$. Así, el conjunto singular $S_X \cap S_Y$ es una subvariedad invariante formado de puntos críticos para el campo deslizante normalizado \bar{Z}^N . Luego, asociado a la linealización de \bar{Z}^N en $S_X \cap S_Y$ hay $n - 2$ autovalores nulos cuyos autovectores son tangentes a $S_X \cap S_Y$. Cuando los otros dos autovalores tienen parte real no nula decimos que el campo \bar{Z}^N es normalmente hiperbólico en $S_X \cap S_Y$. Aunque hiperbolicidad normal del campo deslizante normalizado es suficiente para estabilidad estructural local de Z^N , ella no es una condición necesaria; en efecto, si la variedad central del campo deslizante normalizado \bar{Z}^N en un punto $p \in S_X \cap S_Y$ está en SWR , la bifurcación en la variedad central no se muestra, y así el campo Z^N sería localmente estable en tal punto.

El estudio de estabilidad estructural local de las singularidades en $S_X \cap S_Y$, es un problema difícil y abierto para $n \geq 3$. La dificultad radica en el hecho que la dinámica en tales singularidades depende de tres componentes: las órbitas del campo X , las órbitas del campo Y y las órbitas del campo deslizante; además de las relaciones y conexiones que puedan haber entre ellos. En el Capítulo 3 haremos un estudio local de estas singularidades en dimensión 4 ($n=3$). En dimensión menor existen trabajos que exhiben propiedades genéricas necesarias para estabilidad estructural en dimensión 3, necesarias y suficientes en dimensión 2. Estos resultados pueden ser consultados en [16],[8],[12],[23],[2].

2.3. Genericidad de las singularidades tangenciales

Sea $\Omega_0^r(M, N)$ el conjunto de campos vectoriales $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, N)$ tales que

- i) $X \in \mathfrak{X}_0^r(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}_0^r(M)$,
- ii) $S_X^k \pitchfork S_Y^l$ para todos $1 \leq k, l \leq n$.

El siguiente teorema muestra que este conjunto $\Omega_0^r(M, N)$ es abierto y denso en $\Omega^r(M, N)$. Abertura significa que si un campo tiene todas sus singularidades genéricas entonces sus vecinos también gozan de esta propiedad, además de la transversalidad de los conjuntos

de tangencia de las ramas. La densidad significa que todo campo, por muy degenerado que sea, puede ser aproximado por un campo que satisface las propiedades que definen $\Omega_0^r(M, N)$.

Teorema 2.3.1. *El conjunto $\Omega_0^r(M, N)$ es abierto y denso en $\Omega^r(M, N)$. Si $Z \in \Omega^r(M, N)$ es estructuralmente estable entonces $Z \in \Omega_0^r(M, N)$.*

Antes de mostrar este resultado vamos a hacer algunas observaciones y probamos un lema.

Lo primero que observamos es que, como $\mathfrak{X}_0^r(M)$ es abierto y denso en $\mathfrak{X}^r(M)$, para mostrar el teorema es suficiente mostrar que $\Omega_0^r(M, N)$ es abierto y denso en $\mathfrak{X}_0^r(M) \times \mathfrak{X}_0^r(M)$.

Ahora, dado $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}_0^r(M) \times \mathfrak{X}_0^r(M)$, los conjuntos de tangencia son descompuestos como en las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2). Definimos los siguientes conjuntos

$$R_X^k = S_X^k \cup S_X^{k+1} \cup \dots \cup S_X^n \text{ y } R_Y^k = S_Y^k \cup S_Y^{k+1} \cup \dots \cup S_Y^n$$

Para los conjuntos de tangencia también tenemos la siguiente descomposición

$$S_X = R_X^1 \cup R_X^2 \cup \dots \cup R_X^n \text{ y } S_Y = R_Y^1 \cup R_Y^2 \cup \dots \cup R_Y^n$$

Además de eso

$$R_X^1 \supset R_X^2 \supset \dots \supset R_X^n \text{ y } R_Y^1 \supset R_Y^2 \supset \dots \supset R_Y^n$$

La ventaja de considerar los conjuntos R_X^k y R_Y^k en lugar de S_X^k y S_Y^k es que los primeros son compactos en cuanto los segundos no. A continuación probaremos que la condición de transversalidad $S_X^i \pitchfork S_Y^j$ es equivalente a la condición de transversalidad $R_X^i \pitchfork R_Y^j$.

Definición 2.3.2. Sean S y S' C^r subvariedades de una variedad M y $\epsilon > 0$. Decimos que S y S' están $\epsilon - C^r$ -próximas si existe un difeomorfismo de clase C^r , $h: S \rightarrow S'$, tal que $i' \circ h$ está ϵ -próximo de i en la topología C^r . Aquí $i: S \rightarrow M$ y $i': S' \rightarrow M$ denotan las inclusiones de S y S' en M , respectivamente.

Lema 2.3.3. *Para $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}_0^r(M) \times \mathfrak{X}_0^r(M)$, vale las siguientes afirmaciones:*

- a) *Los conjuntos R_X^k y R_Y^k son subvariedades compactas de N de $\text{codim}(R_X^k) = \text{codim}(S_X^k) = k$ y $\text{codim}(R_Y^k) = \text{codim}(S_Y^k) = k$;*

b) Los conjuntos R_X^k y R_Y^k dependen continuamente de X y Y , respectivamente;

c) La condición $S_X^i \pitchfork S_Y^j$, para todo $i, j = 1, \dots, n$, es equivalente a la condición $R_X^i \pitchfork R_Y^j$, para todo $i, j = 1, \dots, n$.

Demostración. a) Los conjuntos R_X^k son definidos por $h = Xh = \dots = X^k h = 0$, para $k = 1, \dots, n$. Como estas ecuaciones son linealmente independientes entonces los R_X^k son subvariedades cerradas de codimensión k y por tanto compactas. Similarmente vemos que los R_Y^k son subvariedades compactas.

b) Sea $F : \mathfrak{X}_0^r(M) \times M \rightarrow \mathbb{R}^k$, definida por

$$F(\tilde{X}, q) = (h(q), \tilde{X}h(q), \dots, \tilde{X}^k h(q))$$

Para cada k , esta aplicación tiene 0 como valor regular. Denotemos $F_{\tilde{X}}(q) = F(\tilde{X}, q)$. Por el Teorema de isotopía transversal (pág. 51 de [1]), existe una vecindad \mathcal{V} de X tal que para todo $\tilde{X} \in \mathcal{V}$, las subvariedades $F_X^{-1}(0)$ y $F_{\tilde{X}}^{-1}(0)$ son C^r isotópicos, es decir, existe un difeomorfismo $h_{\tilde{X}} : M \rightarrow M$, con $h_{\tilde{X}}(F_X^{-1}(0)) = F_{\tilde{X}}^{-1}(0)$, C^r isotópico a la identidad. Reduciendo la vecindad \mathcal{V} , caso fuese necesario, podemos conseguir que h sea ϵ -próximo de la identidad en la topología C^r . Esto muestra que si \tilde{X} es próximo de X entonces $R_{\tilde{X}}^k$ y R_X^k son C^r próximas.

c) Suponga que $S_X^i \pitchfork S_Y^j$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Probaremos que $R_X^k \pitchfork R_Y^l$ para todo $1 \leq k, l \leq n$. Sea $p \in R_X^k \cap R_Y^l$, entonces existen $i \geq k$ y $j \geq l$ tal que $p \in S_X^i \cap S_Y^j$. Como $S_X^i \pitchfork S_Y^j$ entonces $T_p S_X^i + T_p S_Y^j = T_p N$. Y como $S_X^i \subset R_X^k$ y $S_Y^j \subset R_Y^l$ entonces $T_p R_X^k + T_p R_Y^l = T_p N$, mostrando que R_X^k y R_Y^l se intersectan transversalmente en p .

Recíprocamente, suponga que $R_X^k \pitchfork R_Y^l$ para todo $1 \leq k, l \leq n$. Sea $p \in S_X^i \cap S_Y^j$, entonces $p \in R_X^i \cap R_Y^j$. Como $R_X^i \pitchfork R_Y^j$ entonces $T_p R_X^i + T_p R_Y^j = T_p N$. Ahora, como $T_p S_X^i = T_p R_X^i$ y $T_p S_Y^j = T_p R_Y^j$ entonces $T_p S_X^i + T_p S_Y^j = T_p N$. Esto muestra que $S_X^i \pitchfork S_Y^j$ en p . \square

Ahora probaremos el teorema principal.

Demostración. Sea $\Omega_{0,i,j}^r(M, N)$ el conjunto de campos $Z = (X, Y)$ tales que $X, Y \in \mathfrak{X}_0^r(M)$ y $R_X^i \pitchfork R_Y^j$. Tenemos que

$$\Omega_0^r(M, N) = \bigcap_{i,j=1}^n \Omega_{0,i,j}^r(M, N)$$

Para mostrar la genericidad de $\Omega_0^r(M, N)$ es suficiente mostrar que los conjuntos $\Omega_{0,i,j}^r(M, N)$ son abiertos y densos en $\mathfrak{X}_0^r(M) \times \mathfrak{X}_0^r(M)$.

Abertura de $\Omega_{0,i,j}^r(M, N)$: Sea $Z = (X, Y) \in \Omega_{0,i,j}^r(M, N)$. Como $R_X^i \pitchfork R_Y^j$ y las aplicaciones $X \mapsto R_X^i$ y $Y \mapsto R_Y^j$ son continuas, sigue que existen vecindades \mathcal{V}_X de X y \mathcal{V}_Y de Y en $\mathfrak{X}_0^r(M)$ tal que $R_{\tilde{X}}^i \pitchfork R_{\tilde{Y}}^j$ para todo $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \mathcal{V} = \mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_Y$.

Densidad de $\Omega_{0,i,j}^r(M, N)$: Sea $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}_0^r(M) \times \mathfrak{X}_0^r(M)$. Vamos a aproximar el campo Z por un campo $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \Omega_{0,i,j}^r(M, N)$, esto es, tal que la aplicación

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{X}, \tilde{Y}, h): M &\rightarrow \mathbb{R}^{i+j+1} \\ q &\mapsto (h(q), \tilde{X}h(q), \dots, \tilde{X}^i h(q), \tilde{Y}h(q), \dots, \tilde{Y}^j h(q)) \end{aligned}$$

tenga 0 como valor regular.

Sea $k = \max\{i, j\}$. Denotemos por $J^k(M, \mathbb{R})$ el espacio de k -jets de funciones de M . En este espacio definimos el subconjunto $W_{ij}(X, Y)$ como el conjunto de k -jets P tales que si $j^k f(q) = P$ entonces

$$f(q) = Xf(q) = \dots = X^i f(q) = Yf(q) = \dots = Y^j f(q) = 0$$

Notemos que $W_{ij}(X, Y)$ es una subvariedad de $J^k(M, \mathbb{R})$ de codimensión $i + j + 1$.

El paso clave es notar que la condición $\rho(X, Y, f)$ tiene 0 como valor regular es equivalente a la condición $j^k f \pitchfork W_{ij}(X, Y)$. Para ver esto, suponga que $j^k f \pitchfork W_{ij}(X, Y)$, luego si $q \in M$ es tal que $j^k f(q) \in W_{ij}(X, Y)$ entonces se tiene

$$Dj^k f(q).T_q M + T_{j^k f(q)} W_{ij}(X, Y) = T_{j^k(q)} J^k(M, \mathbb{R})$$

Ahora, por el teorema de transversalidad de Thom, el conjunto de aplicaciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $j^k f \pitchfork W_{ij}(X, Y)$ es denso en el espacio $C^r(M, \mathbb{R})$. Por tanto, próximo de h existe una $f \in C^r(M, \mathbb{R})$ tal que $\rho(X, Y, f)$ tiene 0 como valor regular.

Finalmente, por el teorema de la isotopía transversal, existe una C^r isotopía $\phi : [0, 1] \times M \rightarrow M$ tal que ϕ_0 es la identidad y $\phi_1(f^{-1}(0)) = h^{-1}(0)$. Poniendo $\tilde{X} = (\phi_1)_* X$ y $\tilde{Y} = (\phi_1)_* Y$ tenemos que $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \Omega_{0,i,j}^r(M, N)$. En efecto, como $\rho(X, Y, f)$ tiene 0 como valor regular, y ϕ_1 es un difeomorfismo entonces $\rho(\tilde{X}, \tilde{Y}, h)$ también tiene 0 como valor regular. Podemos tomar f próximo de h , así ϕ_1 estará próximo de la identidad y por tanto \tilde{Z} próximo de Z .

□

Finalmente, mostramos en el siguiente ejemplo como una intersección no transversal de los conjuntos de tangencia puede ser aproximado por una intersección transversal.

Ejemplo 2.3.4. Sea $Z = (X, Y)$ definido en el espacio por

$$Z(x, y, z) = \begin{cases} X(x, y, z) = (1, x, y + x^2) & , z > 0 \\ Y(x, y, z) = (0, 1, x) & , z < 0 \end{cases}$$

En este caso, la función $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y, z) = z$ define la discontinuidad $N = h^{-1}(0)$.

Los conjuntos de tangencia son

$$R_X^1 = \{(x, y, z)/z = 0 \wedge y + x^2 = 0\}$$

$$R_X^2 = \{(0, 0, 0)\}$$

$$R_Y^1 = \{(x, y, z)/z = 0 \wedge x = 0\}$$

$$R_Y^2 = \emptyset$$

Vemos que R_X^2 no es transversal a R_Y^1 , así que $Z \notin \Omega_0^r(M, N)$.

Ahora, definimos la sucesión de campos $Z_n = (X_n, Y_n)$ por

$$Z_n(x, y, z) = \begin{cases} X_n(x, y, z) = (1, x - \frac{1}{n}, y + x^2) & , z > 0 \\ Y_n(x, y, z) = (0, 1, x) & , z < 0 \end{cases}$$

para el cual tenemos

$$R_{X_n}^1 = \{(x, y, z)/z = 0 \wedge y + x^2 = 0\}$$

$$R_{X_n}^2 = \{(\frac{1}{n}, 0, 0)\}$$

$$R_{Y_n}^1 = \{(x, y, z)/z = 0 \wedge x = 0\}$$

$$R_{Y_n}^2 = \emptyset$$

En este caso tenemos $R_{X_n}^1 \cap R_{Y_n}^1, R_{X_n}^1 \cap R_{Y_n}^2 = \emptyset, R_{X_n}^2 \cap R_{Y_n}^1 = \emptyset$ y $R_{X_n}^2 \cap R_{Y_n}^2 = \emptyset$, lo que muestra que $Z_n \in \Omega_0^r(M, N)$.

Para el campo $Z \notin \Omega_0^r(M, N)$ hemos conseguido una sucesión de campos $Z_n \in \Omega_0^r(M, N)$ tales que $Z_n \rightarrow Z$.

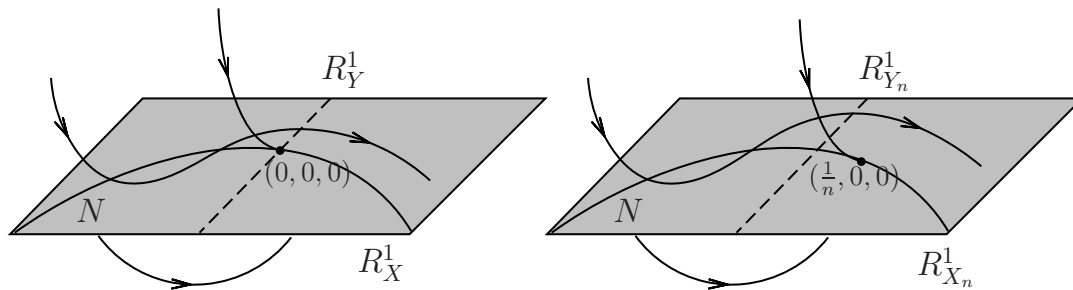


Figura 2.1: En el lado izquierdo el campo no genérico Z que presenta una singularidad del tipo Cúspide-Doble en el origen. A la derecha la aproximación genérica Z_n que presenta genéricamente doble-Doble.

Capítulo 3

Estabilidad estructural local de singularidades tangenciales genéricas

Sea M una variedad compacta $n + 1$ -dimensional y N una subvariedad que divide M en dos pedazos. Denotamos por $\Omega^r(M, N)$ el espacio de campos de vectores en M suaves excepto sobre la subvariedad N .

Para que un campo sea estructuralmente estable es necesario que este preserve el comportamiento local, en todo punto, para pequeñas perturbaciones. Así, vemos conveniente introducir los conceptos de equivalencia local y estabilidad estructural local.

Definición 3.0.5. Sean $Z, \tilde{Z} \in \Omega^r(M, N)$ y $p, q \in M$. Decimos que Z y \tilde{Z} son topológicamente equivalentes en p y q , respectivamente, si existen vecindades V_p y V_q y un homeomorfismo $f: V_p \rightarrow V_q$ que lleva órbitas de Z en órbitas de \tilde{Z} , preservando la orientación de la órbitas, y con $f(p) = q$.

Definición 3.0.6. Sean $Z \in \Omega^r(M, N)$ y $p \in M$. Decimos que Z es localmente estable en p si existen vecindades \mathcal{V} de Z en $\Omega^r(M, N)$ y U de p en M tales que, para cada $\tilde{Z} \in \mathcal{V}$, Z en p es topológicamente equivalente a \tilde{Z} en q , para algún $q \in U$.

Como habíamos mencionado, estabilidad estructural local es necesario para estabilidad estructural de un campo. Por tanto, como parte preliminar debemos estudiar el comportamiento local de los campos en las principales singularidades: tangencias y pseudoequilibrios.

En este capítulo hacemos un estudio local de las singularidades tangenciales para campos suaves por partes. Mas específicamente, buscamos condiciones genéricas necesarias para que estas singularidades sean estructuralmente estables.

Para el estudio local podemos suponer que $M = \mathbb{R}^{n+1}$ y $N = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) / x_1 = 0\}$. Así, consideramos campos $Z = (X, Y)$ definidos por

$$Z(x) = \begin{cases} X(x), & x_1 > 0; \\ Y(x), & x_1 < 0. \end{cases}$$

donde X y Y son campos suaves definidos en \mathbb{R}^{n+1} .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que el campo X tiene una tangencia genérica de orden k en el origen ($1 \leq k \leq n$). Entonces, por el teorema de Vishik, existe un sistema de coordenadas tal que $X(x) = (\epsilon x_2, x_3, \dots, x_{k+1}, 1, 0, \dots, 0)$, donde $\epsilon = \pm 1$.

El campo Y podría ser transversal a N o también tener una tangencia genérica. Por tanto vemos que tenemos por lo menos n^2 tipos de singularidades. Para ser más precisos, genéricamente se tiene $(n+1)! - 1$ tipos de singularidades tangenciales para campos suaves por partes. Nosotros haremos el estudio de cuatro de estas singularidades que son genéricas en dimensión mayor o igual a 4.

Una **tangencia cuadrática o doblez** es un punto donde apenas uno de los campos es tangente a N , y la tangencia es de orden 1. En este caso tenemos cuatro tipos topológicos que dependen sobre la posición de la órbita que tangencia N y la dirección del campo Y .

Una **Cúspide** es un punto donde apenas uno de los campos es tangente a N , y la tangencia es de orden 2. De nuevo cuatro tipos topológicos a considerar.

Una **cola de golondrina** es un punto donde apenas uno de los campos es tangente a N , y la tangencia es de orden 3.

Una **doble tangencia cuadrática o doble-doblez** es un punto donde ambos campos son tangentes a N , y ambas tangencias son de orden 1. Cuatro casos debemos considerar, y en estos casos se distingue uno especial, donde las órbitas que tangencian N de cada lado no son visibles, esta es conocida como la singularidad Teixeira.

3.1. Tangencia Cuadrática

Sea $Z = (X, Y) \in \Omega_0^r(M, N)$ y $p \in N$. Supongamos que X tiene una tangencia cuadrática en cuanto Y es transversal a N en p . Por el teorema de Vishik existe un sistema de coordenadas tales que $M = \mathbb{R}^{n+1}$, $p = 0$, $N = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) / x_1 = 0\}$ y $X(x) = (\epsilon x_2, 1, 0, \dots, 0)$ donde $\epsilon = \pm 1$. En este sistema de coordenadas escribimos $Y(x) = (Y^1(x), Y^2(x), \dots, Y^{n+1}(x))$, y como Y es transversal a N en p entonces se debe tener $Y^1(0) \neq 0$. Mostraremos que podemos rectificar el campo Y . Mas específicamente tenemos:

Proposición 3.1.1. *Supongamos que $\dim(M) = n + 1 \geq 2$. Sean los campos $X_0(x) = (\epsilon x_2, 1, 0, \dots, 0)$, $Y(x) = (Y^1(x), Y^2(x), \dots, Y^{n+1}(x))$ y $Y_0(x) = (\delta, 0, \dots, 0)$ donde $\epsilon = \pm 1$, $\delta = \pm 1$ y $Y^1(0)\delta > 0$. Entonces $Z = (X_0, Y)$ y $Z_0 = (X_0, Y_0)$ son localmente equivalentes en el origen.*

Demostración. Dependiendo del signo de ϵ y δ , tenemos cuatro tipos topológicos distintos.

Primeramente supongamos que $\epsilon = 1$ y $\delta = 1$; esta es la situación ilustrada en la figura 3.1. El homeomorfismo entre los campos Z y Z_0 lo construiremos siguiendo estos pasos:

1. Definimos $h : S_{X_0} \rightarrow S_{X_0}$ siendo la identidad.
2. Extendemos h para la región de deslice SLR, de tal manera que lleve órbitas deslizantes de Z en las órbitas deslizantes de Z_0 .
3. Sea $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / x_2 = 0\}$. Definimos h en Σ y en la región de costura SWR^+ siendo la identidad.
4. Extendemos h para $x_1 > 0$ de tal manera que lleve órbitas de X_0 en órbitas de X_0 .
5. Extendemos h para $x_1 < 0$ de tal manera que lleve órbitas de Y en órbitas de Y_0 .

Ahora supongamos que $\epsilon = -1$ y $\delta = 1$. Esta situación es ilustrada en la figura 3.2. Construimos el homeomorfismo h siguiendo los pasos:

1. Definimos $h : S_{X_0} \rightarrow S_{X_0}$ siendo la identidad.

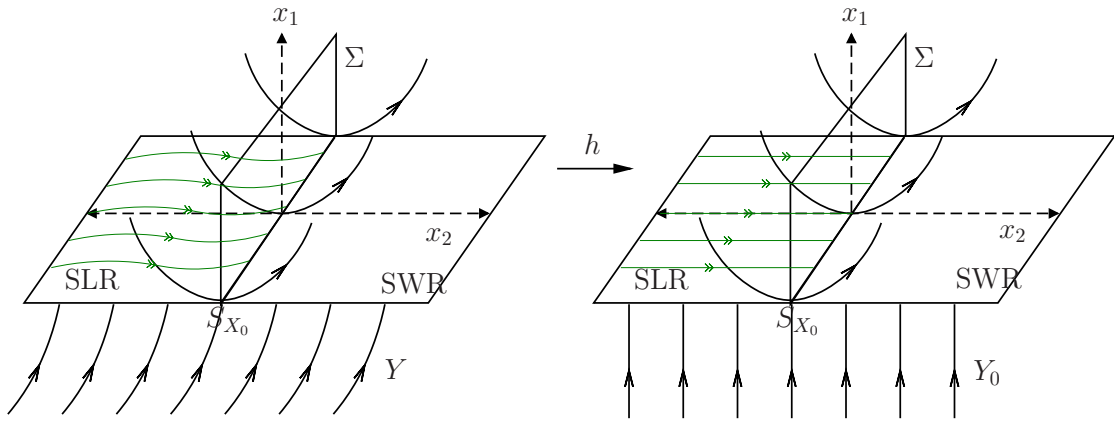


Figura 3.1: Equivalencia topológica entre dos tangencias cuadráticas visibles.

2. Extendemos h para la región de deslice SLR, de tal manera que lleve órbitas deslizantes de Z en las órbitas deslizantes de Z_0 .
3. Extendemos h para la región de costura SWR^+ usando las órbitas de X_0 .
4. Extendemos h para $x_1 > 0$ de tal manera que lleve órbitas de X_0 en órbitas de X_0 .
5. Extendemos h para $x_1 < 0$, llevando el arco de parábola con extremos x y y en el arco de parábola con extremos $h(x)$ y $h(y)$ (ver figura 3.2). Esto puede ser hecho parametrizando los arcos por longitud de arco.
6. Extienda h para $x_1 < 0$.

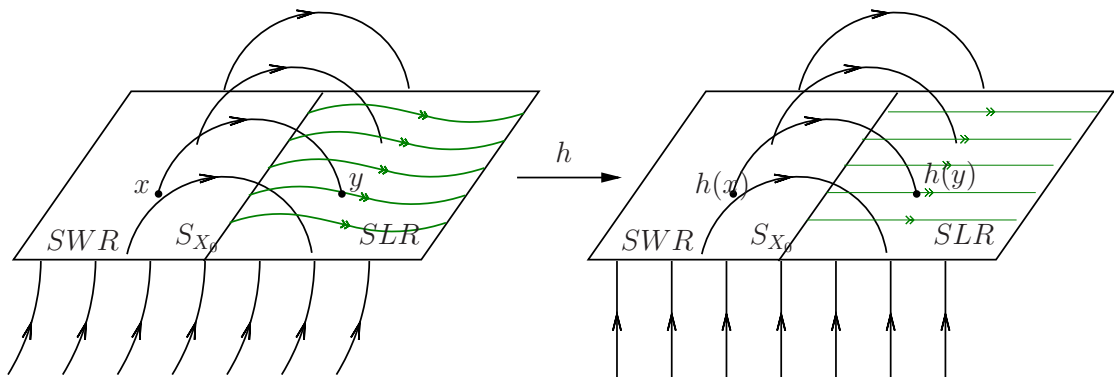


Figura 3.2: Equivalencia topológica entre dos tangencias cuadráticas invisibles.

Los demás casos son mostrados similarmente a estos.

□

Corolário 3.1.2. *Supongamos que $\dim(M) = n + 1 \geq 2$. Sea $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, N)$ y $p \in N$. Supongamos que alguno de los campos X o Y tiene una tangencia cuadrática en p en cuanto el otro es transversal a N en p . Entonces Z es localmente estructuralmente estable en p .*

Demostración. Supongamos que X tiene una tangencia cuadrática en p y Y es transversal en p . Definimos la aplicación

$$F: \mathfrak{X}^r(M) \times M \rightarrow \mathbb{R}^2, F(\tilde{X}, q) = (h(q), Xh(q)).$$

Tenemos que $\partial_q F(X, p) = (\nabla h(p), \nabla Xh(p))$ tiene columnas linealmente independientes. Por el teorema de la función implícita existen vecindades \mathcal{V}_1 de X en $\mathfrak{X}^r(M)$ y V_1 de p en M , tales que para cada campo $\tilde{X} \in \mathcal{V}_1$ existe una tangencia cuadrática $q \in V_1$. Reduciendo las vecindades \mathcal{V}_1 y V_1 caso sea necesario, tendremos que $X^2h(p)\tilde{X}^2h(q) > 0$ para todos $\tilde{X} \in \mathcal{V}_1$ y $q \in V_1$.

Por otro lado, tenemos que $Yh(p) \neq 0$ y, por continuidad de la aplicación $(\tilde{Y}, q) \mapsto \tilde{Y}h(q)$, existen vecindades \mathcal{V}_2 de Y en $\mathfrak{X}^r(M)$ y V_2 de p en M tales que $\tilde{Y}h(q) \neq 0$ para todos $\tilde{Y} \in \mathcal{V}_2$ y $q \in V_2$.

Tomamos $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ y $V = V_1 \cap V_2$. De la proposición anterior sigue que $\tilde{Z} \in \mathcal{V}$ en q es equivalente a Z en p , para algún $q \in V$. Esto muestra que Z es localmente estructuralmente estable en p . \square

3.2. Cúspide

En esta sección estudiamos campos $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, N)$ en un punto $p \in N$ donde uno de los campos tiene una tangencia de orden 2 y el otro es transversal a N en p . Como el estudio es local podemos tomar coordenadas convenientes tal que $M = \mathbb{R}^{n+1}$, $p = 0$, $N = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) : x_1 = 0\}$ y $X(x) = (\epsilon x_2, x_3, 1, 0, \dots, 0)$ donde $\epsilon = \pm 1$. En estas coordenadas $Y(x) = (Y^1(x), \dots, Y^{n+1}(x))$, y como Y es transversal a N en p , debemos tener $Y^1(0) \neq 0$.

La siguiente proposición establece una forma normal topológica para una cúspide.

Proposición 3.2.1. *Supongamos que $\dim(M) = n + 1 \geq 3$. Sean los campos $X_0(x) = (\epsilon x_2, x_3, 1, 0, \dots, 0)$, $Y_0(x) = (\delta, 0, \dots, 0)$ y $Y(x) = (Y^1(x), \dots, Y^{n+1}(x))$ donde $\epsilon = \pm 1$, $\delta = \pm 1$ con $Y^1(0)\delta > 0$. Entonces los campos $Z = (X_0, Y)$ y $Z_0 = (X_0, Y_0)$ son localmente equivalentes en el origen.*

Demostración. Primeramente supongamos que $\epsilon = -1$ y $\delta = 1$. Debemos distinguir algunas curvas y superficies ya que son invariantes bajo equivalencia topológica. Distinguiamos el origen que es un punto de cúspide, además el conjunto de tangencia cuadrática $S_X - \{(0, 0, 0)\}$ que tiene dos componentes conexas $S_{X_0}^V$ y $S_{X_0}^I$, una formada de tangencias cuadráticas visibles y la otra de tangencias cuadrática invisibles, respectivamente. Las órbitas que pasan por $S_{X_0}^V$ vuelven a encontrar la discontinuidad en L . Vamos a distinguir también el semiplano $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / x_1 = x_3 = 0 \wedge x_2 > 0\}$ (ver figura 3.3). El homeomorfismo h puede ser construido de la siguiente manera:

1. Definimos h siendo la identidad en L y en Σ .
2. Extendemos h para la región de deslice y su frontera, de tal manera que lleve órbitas deslizantes de Z en órbitas deslizantes de Z_0 .
3. Usamos las órbitas de X_0 para extender h para SWR.
4. Extendemos h para $x_1 > 0$. Si γ es una órbita de X_0 con un solo extremo $x \in N$ entonces hacemos corresponder a γ la órbita β con extremo $h(x)$. Y si γ es una órbita de X_0 con dos extremos $x, y \in N$, entonces hacemos corresponder a γ la órbita β con extremos $h(x), h(y)$.
5. Extendemos h para $x_1 < 0$.

Ahora supongamos que $\epsilon = -1$ y $\delta = -1$. Esta situación es ilustrada en la figura ???. Como en el caso anterior, vamos a distinguir $S_{X_0}^V$, $S_{X_0}^I$ y L . El homeomorfismo es construido así

1. Definimos h siendo la identidad en L .
2. Extendemos h para $S_{X_0}^V$.

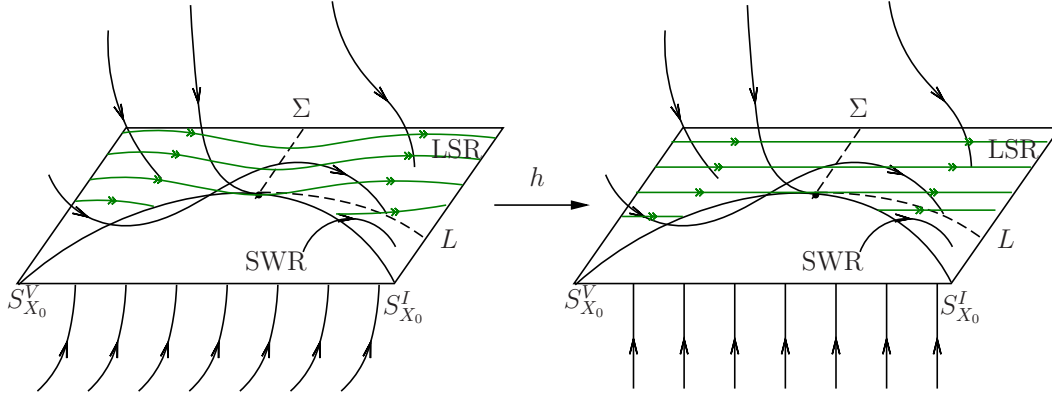


Figura 3.3: Equivalencia topológica entre dos cúspides en la frontera de la región de deslice.

3. Extendemos h para la región de escape y su frontera, de tal manera que lleve órbitas deslizantes de Z en órbitas deslizantes de Z_0 .
4. Usamos las órbitas de X_0 para extender h para SWR.
5. Extendemos h para $x_1 > 0$. Si γ es una órbita de X_0 con un solo extremo $x \in N$ entonces hacemos corresponder a γ la órbita β con extremo $h(x)$. Y si γ es una órbita de X_0 con dos extremos $x, y \in N$, entonces hacemos corresponder a γ la órbita β con extremos $h(x), h(y)$.
6. Extendemos h para $x_1 < 0$.

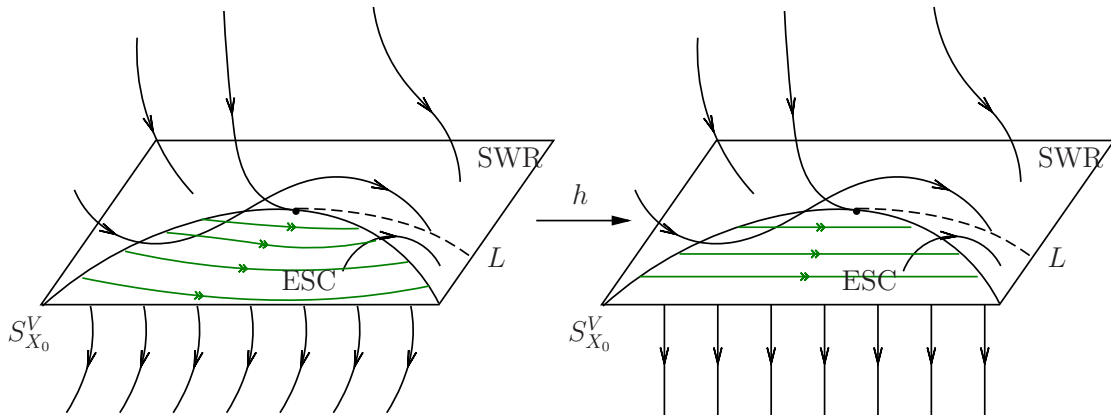


Figura 3.4: Equivalencia topológica entre dos cúspides en la frontera de la región de escape.

Los demás casos se muestran de manera similar.

□

Corolário 3.2.2. *Supongamos que $\dim(M) = n + 1 \geq 3$. Sea $Z = (X, Y) \in \Omega_0^r(M, N)$ y $p \in N$ un punto donde uno de los campos X o Y tiene tangencia de orden 2 en cuanto el otro es transversal a N . Entonces el campo Z es localmente estructuralmente estable en p .*

Demostración. Podemos suponer que X tiene una tangencia de orden 2 y Y es transversal a N en p . La prueba de este corolario es análogo a la prueba del corolario 3.1.2 aplicando el teorema de la función implícita a la aplicación

$$F: \mathfrak{X}^r(M) \times M \rightarrow \mathbb{R}^3, F(\tilde{X}, q) = (h(q), \tilde{X}h(q), \tilde{X}^2h(q)).$$

□

3.3. Cola de golondrina

Sea $Z = (X, Y) \in \Omega_0^r(M, N)$ y $p \in N$. Supongamos que X tiene una tangencia de orden 3 en p y Y es transversal a N en p . Una vez mas usamos el teorema de Vishik, así existe un sistema de coordenadas tales que $M = \mathbb{R}^{n+1}$, $p = 0$, $N = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) : x_1 = 0\}$ y $X(x) = (\epsilon x_2, x_3, x_4, 1, 0, \dots, 0)$ donde $\epsilon = \pm 1$. En estas coordenadas $Y(x) = (Y^1(x), \dots, Y^{n+1}(x))$, y como Y es transversal a N en p , debemos tener $Y^1(0) \neq 0$.

Esta singularidad fue estudiado poco, algunas resultados relacionados se encuentran en los trabajos de [10],[23], [15]. Como es observado en la doblez y la cúspide, es fácil conjeturar que la cola de golondrina debe ser estructuralmente estable, aunque una prueba formal no hay. En mi tesis de doctorado [2] hice un estudio local de la singularidad llegando a mostrar que esta singularidad es realmente estructuralmente estable.

La siguiente proposición exhibe una forma normal para campos en una singularidad de tipo cola de golondrina.

Proposición 3.3.1. *Supongamos que $\dim(M) = n + 1 \geq 4$. Sean los campos $X_0(x) = (\epsilon x_2, x_3, x_4, 1, 0, \dots, 0)$, $Y_0(x) = (\delta, 0, \dots, 0)$ y $Y(x) = (Y^1(x), \dots, Y^{n+1}(x))$ donde $\epsilon = \pm 1$, $\delta = \pm 1$ con $Y^1(0)\delta > 0$. Entonces los campos $Z = (X_0, Y)$ y $Z_0 = (X_0, Y_0)$ son localmente equivalentes en el origen.*

Demostración. Antes de construir el homeomorfismo vamos a asociar algunos conjuntos a los campos Z y Z_0 . Estos conjuntos serán distinguidos por que cualquier equivalencia topológica entre Z y Z_0 debe preservarlos.

Comenzamos distinguiendo el plano N y los conjuntos de tangencia: $R_{X_0}^1 = \{x \in N/x_2 = 0\}$, $R_{X_0}^2 = \{x \in N/x_2 = x_3 = 0\}$, y $R_{X_0}^3 = \{x \in N/x_2 = x_3 = 0\}$. Las órbitas que pasan por $R_{X_0}^1$ genera una variedad D que debe ser distinguida, como también $D \cap N$. De igual manera, las orbitas que pasan por $R_{X_0}^2$ generan una variedad E que debe ser distinguida, y también $E \cap N$. A continuación nosotros describimos mejor estos conjuntos distinguidos.

La órbita de X_0 que pasa por $x = (0, x_2, x_2, \dots, x_{n+1}) \in N$ es dada por

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{\epsilon}{24}(t^4 + 4x_4t^3 + 12x_3t^2 + 24x_2t) \\ x_2(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + x_3t + x_2 \\ x_3(t) = \frac{1}{2}t^2 + x_4t + x_3 \\ x_4(t) = t + x_4 \\ x_k(t) = x_k; \quad k \geq 5 \end{cases}$$

Observemos que las órbitas que pasan por N pueden hacerlo más de una vez (ver figura 3.6), ello depende del número de raíces de la siguiente ecuación

$$t^4 + 4x_4t^3 + 12x_3t^2 + 24x_2t = 0$$

El número de raíces de esta ecuación es determinado por su discriminante

$$d = 192(36x_3^3 - 12x_4^2x_3^2 + 32x_2x_4^3 + 81x_2^2 - 108x_2x_3x_4)$$

Cuando $d > 0$, la ecuación tiene dos raíces, si $d < 0$ la ecuación tiene cuatro raíces, y cuando $d = 0$ se tiene una o tres raíces (ver figura 3.5) Por tanto, las órbitas que son tangentes son aquellas que pasan por

$$\Delta = \{x \in N/36x_3^3 - 12x_4^2x_3^2 + 32x_2x_4^3 + 81x_2^2 - 108x_2x_3x_4 = 0\}$$

En la figura 3.7 mostramos la variedad Δ , observemos que $R_{X_0}^1 \subset \Delta$.

Además debemos distinguir las autointersecciones de Δ donde no es suave, estos son

$$L_1 = \{x \in R_{X_0}^1/x_3 = \frac{1}{3}x_4^2\}$$

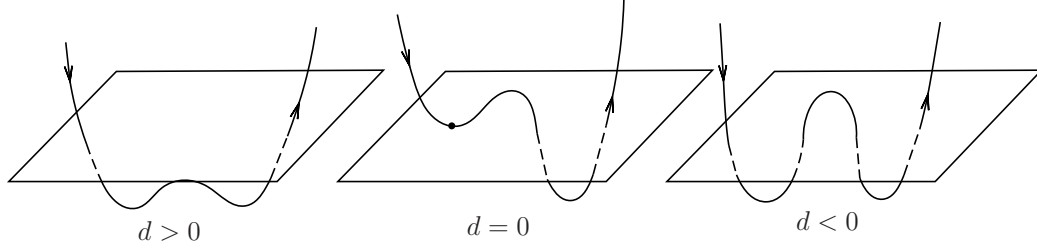


Figura 3.5: Distintas órbitas cerca de la cola de golondrina. Cuando el discriminante es positivo la órbita interseca N en apenas dos puntos, cuando el discriminante es negativo la órbita interseca en cuatro puntos, y en otro caso la órbita es tangente a N , pudiendo tener tangencias de orden 1,2 o 3.

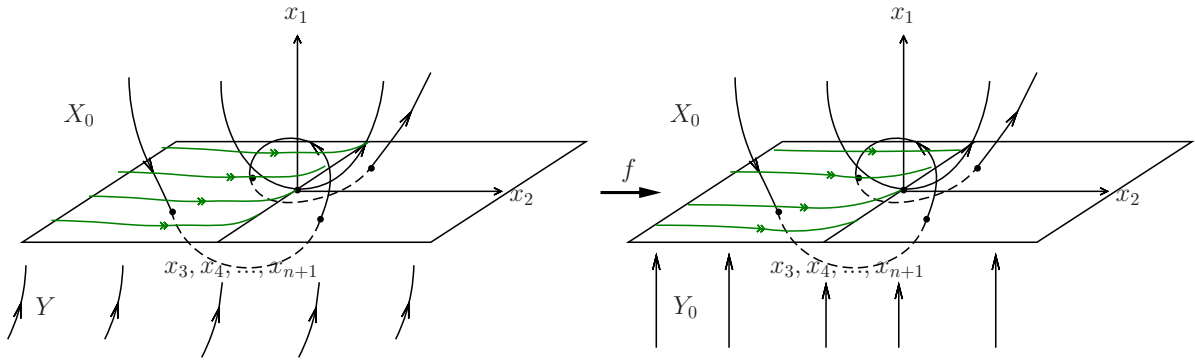


Figura 3.6: Equivalencia topológica entre dos colas de golondrinas.

Las órbitas que pasan por L_1 conectan tangencias cuadráticas visibles.

$$L = \{x \in \Delta / x_2 = \frac{8}{81}x_4^3, x_3 = \frac{4}{9}x_4^2, x_4 \geq 0\}$$

Las órbitas que pasan por L son aquellas que pasan por puntos de cúspide.

Otro componente que debemos considerar es el campo deslizante asociado a Z , y también a Z_0 . El campo deslizante normalizado toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{Z}^N(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) = & (x_3Y^1(x) - \epsilon x_2Y^2(x), x_4Y^1(x) - \epsilon x_2Y^3(x), Y^1(x) - \epsilon x_2Y^4(x), \\ & -\epsilon x_2Y^5(x), \dots, -\epsilon x_2Y^{n+1}(x)) \end{aligned}$$

definido sobre la región de deslice $\epsilon x_2Y^1(x) < 0$.

El campo deslizante es tangente a Δ sobre $L \cup R_{X_0}^2$ donde el contacto es cuadrático, y sobre L_1 donde el contacto es degenerado ya que Δ no es suave allí.

Las órbitas del campo deslizante Z^N que pasan por $R_{X_0}^2 \cup L \cup L_1$ forman una variedad $K(Z)$ que debe ser distinguida, así como también $K(Z) \cap \Delta$. Una condición necesaria para la estabilidad estructural de Z es que las variedades $K(Z)$ y Δ sean transversales en una vecindad del origen, excepto claro sobre $R_{X_0}^3$. Lo que hemos notado por simulación computacional es que esta intersección es de hecho transversal y por tanto ninguna bifurcación se presenta. De igual manera, para Z_0 también asociamos $K(Z_0)$ y distinguimos $K(Z_0) \cap \Delta$.

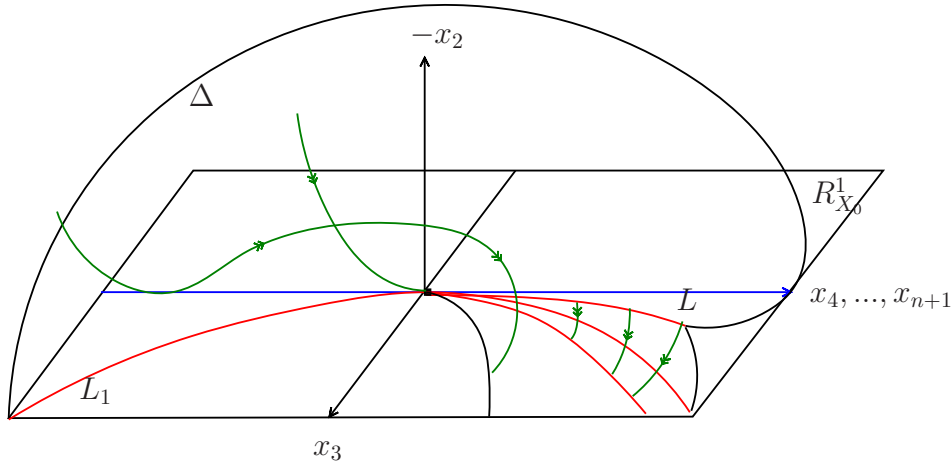


Figura 3.7: Las variedades distinguidas en las proximidades de la cola de golondrina.

Finalmente, construimos la equivalencia topológica entre Z y Z_0 :

1. Definimos $f : R \rightarrow R$ siendo la identidad, donde

$$R = \{x \in R_{X_0}^1 / 0 \leq x_3 \leq \frac{1}{3}x_4^2\}$$

2. Usando las órbitas de X_0 y de los campos deslizantes, extendemos el homeomorfismo para $f : SLR(Z) \rightarrow SLR(Z_0)$. La extensión debe ser de tal manera que se preserve los conjuntos distinguidos, y lleve órbitas deslizantes en órbitas deslizantes.
3. Usando las órbitas de X_0 , extendemos para $F : SWR(Z) \rightarrow SWR(Z_0)$.
4. Identificamos órbitas de X_0 por longitud de arco y así extendemos f para $x_1 > 0$.

5. Identificamos órbitas de Y con órbitas de Y_0 y extendemos f para $x_1 < 0$.

□

Corolário 3.3.2. *Supongamos que $\dim(M) = n + 1 \geq 3$. Sea $Z = (X, Y) \in \Omega_0^r(M, N)$ y $p \in N$ un punto donde uno de los campos X o Y tiene tangencia de orden 2 en cuanto el otro es transversal a N . Entonces el campo Z es localmente estructuralmente estable en p .*

Demostración. Podemos suponer que X tiene una tangencia de orden 3 y Y es transversal a N en p . La prueba de este corolario es análogo a la prueba del corolario 3.1.2 aplicando el teorema de la función implícita a la aplicación

$$F: \mathfrak{X}^r(M) \times M \rightarrow \mathbb{R}^4, F(\tilde{X}, q) = (h(q), \tilde{X}h(q), \tilde{X}^2h(q), \tilde{X}^3h(q)).$$

□

3.4. Doble tangencia cuadrática

En esta sección estudiamos la dinámica y comportamiento local de las órbitas de un campo suaves por partes $Z = (X, Y)$ en un punto $p \in N$ donde de cada lado hay órbitas que tangencian cuadráticamente la hipersuperficie de discontinuidad N . Como vimos en el Capítulo 2, si la dimensión de M es mayor o igual a 3 esta situación es genérica y, mas aún, es condición necesaria para estabilidad estructural que los conjuntos de tangencia cuadrática correspondientes a los campos X y Y sean transversales. En este caso, sucede que en una vecindad del punto p la hipersuperficie de discontinuidad N es dividida en cuatro regiones a saber: SLR , $ESCR$, SWR^+ y SWR^- . En las regiones $SLR \cup ESCR$ es definido el campo deslizante. Y en la regiones SWR las órbitas cruzan la discontinuidad, pudiendo algunas órbitas pasar infinitas veces por esta región. Estas consideraciones hacen que el retrato de fase en este tipo de singularidad sea interesante y al mismo tiempo complicado.

Si $Z = (X, Y)$ tiene una doble tangencia cuadrática en $p \in N$, entonces se cumple:

1. $h(p) = Xh(p) = Yh(p) = 0$

2. $X^2h(p).Y^2h(p) \neq 0$

3. $\{\nabla h(p), \nabla Xh(p), \nabla Yh(p)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

La primera condición dice que p es un punto de tangencia tanto para X como para Y . La segunda condición establece que estas tangencias son de tipo cuadrático. La tercera condición, necesaria para estabilidad estructural, dice que la intersección entre los conjuntos de tangencia es transversal en p .

Según Mike Jeffrey [9], existe un sistema de coordenadas x_1, x_2, \dots, x_{n+1} tal que p es el origen, $h(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = x_1$, $N = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / x_1 = 0\}$, y los campos pueden ser expresados por:

$$Z(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} X(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_2 + o(2), \epsilon + o(1), a + o(1), 0, \dots, 0) & , \text{ si } x_1 > 0; \\ Y(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_3 + o(2), b + o(1), \delta + o(1), 0, \dots, 0) & , \text{ si } x_1 < 0. \end{cases}$$

donde $\epsilon = -\text{signo}(X^2h(p))$ y $\delta = \text{signo}(Y^2h(p))$, $a = XYh(p)/\sqrt{|X^2h(p)Y^2h(p)|}$ y $b = YXh(p)/\sqrt{|X^2h(p)Y^2h(p)|}$. Además Mike Jeffrey afirma, que en el caso genérico, los términos de orden mayor no influyen en la dinámica de la singularidad. Por tanto, es suficiente considerar la parte semilineal siguiente:

$$Z(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} X(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_2, \epsilon, a, 0, \dots, 0) & , \text{ si } x_1 > 0; \\ Y(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_3, b, \delta, 0, \dots, 0) & , \text{ si } x_1 < 0. \end{cases}$$

La dinámica de esta familia de campos dependen de los parámetros a y b . En el origen tenemos $X(0) = (0, \epsilon, a, 0, \dots, 0)$ y $Y(0) = (0, b, \delta, 0, \dots, 0)$ los cuales indican hacia donde se mueve el flujo. Cuando estos vectores están en direcciones opuestas entonces el origen es un pseudoequilibrio. Obviamente este caso no es genérico, pues una pequeña perturbación eliminará el pseudoequilibrio. Por tanto, una condición necesaria para estabilidad estructural es que en la doble tangencia se tenga que $ab - \epsilon\delta \neq 0$ si $a\delta < 0$.

El campo vectorial deslizante normalizado de la forma normal es lineal dado por

$$Z^N(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) = (bx_2 + \epsilon x_3, \delta x_2 + bx_3, 0, \dots, 0)$$

Notemos que la dinámica es determinado por el sistema bidimensional en x_2, x_3 , cuya matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} b & \epsilon \\ \delta & a \end{pmatrix}$$

Por tanto la dinámica del campo deslizante es determinado por el determinante $ab - \epsilon\delta$ y la traza $a + b$.

Dependiendo de los valores de ϵ y δ , existen cuatro tipos de doble tangencia cuadrática. El caso $\epsilon < 0$ y $\delta < 0$ es llamado Visible-Visible, cuando $\epsilon\delta < 0$ se llama Visible-Invisible, y cuando $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ se llama Invisible-Invisible o singularidad Teixeira, en honor la profesor Marco Antonio Teixeira que estudio por primera vez esta singularidad (ver figura 3.8).

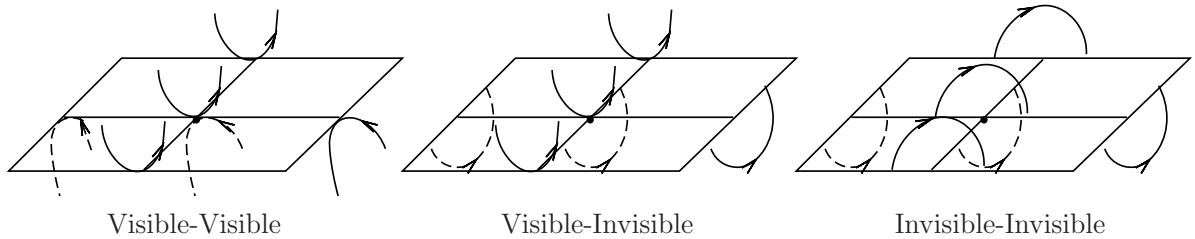


Figura 3.8: Distintos tipos de doble tangencia cuadrática.

Dinámica interesante sucede en la singularidad Teixeira, donde las órbitas pueden encontrar varias veces la discontinuidad. Mike Jeffrey [9] mostró que el valor de ab determina la dinámica de las órbitas que espiralan alrededor de la singularidad.

Cuando $ab > 1$ y $a, b < 0$, las órbitas espiralan alrededor de la singularidad un número infinito de veces. Existe un cono invariante que separa las regiones de deslice y escape, siendo la singularidad la única conexión. Fuera del cono las órbitas caminan en dirección de la región de escape. En este caso, la singularidad atrae las órbitas deslizantes. (Ver figura 3.9)

En otros casos las órbitas que empiezan en la región de escape llegan a la región de deslice después de visitar un número finito de veces la región de costura. La singularidad repele las órbitas deslizantes en la región de deslice. (Ver figura 3.9)

Claramente una bifurcación ocurre cuando $ab = 1$ y $a, b < 0$, sin embargo no son las únicas bifurcaciones. Estableciendo una relación de equivalencia como lo hicimos, es decir, un homeomorfismo que lleva órbitas en órbitas preservando la orientación de estas, es posible encontrar infinitas bifurcaciones. Estas bifurcaciones están asociadas a conexiones entre conjuntos invariantes, tales como los conjuntos de tangencia y las variedades invariantes

del campo deslizando normalizado. Por ello, nosotros conjeturamos que la singularidad Teixeira no es estructuralmente estable.

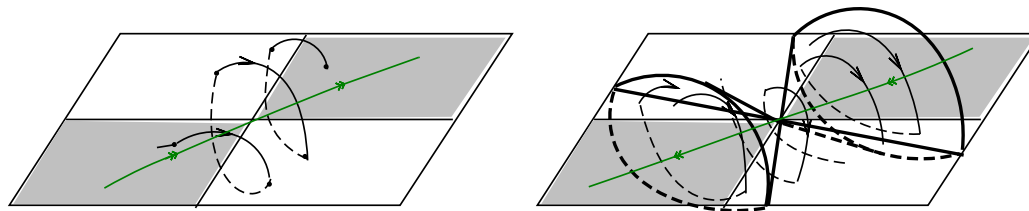


Figura 3.9: Dos tipos topológicos de la singularidad Teixeira: A la izquierda las órbitas salen del escape y después de un número finito de saltos llegan a la región de deslice. En la derecha, un cono invariante separa la región de deslice y escape, siendo la singularidad la única conexión. Las órbitas que nacen del deslice llegan a la singularidad y luego pasan a la región de escape, y las órbitas que están fuera del cono espiralan alrededor del cono un número infinito de veces.

Conclusiones y recomendaciones

Varias singularidades tangenciales se presentan genéricamente en campos de vectores suaves por partes. Mientras mayor es la dimensión del espacio de fase, mayor es el número de singularidades tangenciales. La genericidad de ellas es mostrado aquí aunque ello no asegura su estabilidad estructural.

Anteriormente, Filippov y Teixeira estudiaron la doblez y la cúspide mostrando que son singularidades estructuralmente estables en dimensión dos y tres. Sin embargo, la cola de golondrina la describimos aquí por primera vez con gran detalle, y mostramos que esta singularidad también es estructuralmente estable. Se conjetura que puntos donde el campo es tangente a la discontinuidad de apenas un lado son singularidades tangenciales estructuralmente estables, lo cual podría mostrarse usando un proceso de inducción.

Además, la doble doblez fue estudiado durante varios años por Colombo y Jeffrey [9], los autores describieron con gran detalle la dinámica de los distintos tipos topológicos, y las bifurcaciones en esta singularidad. Pero, aún hoy en día no es claro si ella es o no es estructuralmente estable. Algunos autores conjeturan que la doble doblez de tipo Invisible-Invisible no es estructuralmente estable, pero quizá hay algún tipo topológico que si es estable, en ese caso debe exhibirse una equivalencia topológica entre el campo con la doble doblez y su perturbado, lo cual parece una tarea imposible de lograr.

Este listado de singularidades es completo en dimensión 3, pero en dimensión mayor a 3 existen otras singularidades aún no exploradas: doblez-cúspide (poco estudiada), cúspide-cúspide, doblez-cola de golondrina, etc.

Bibliografía

- [1] ABRAHAM, R. H., ROBBIN, J., y KELLEY, A. *Transversal mappings and flows*, 1968.
- [2] ACHIRE, J. *Estabilidad estructural de campos de vectores suaves por partes*, Tesis de doctorado, UNICAMP, 2014.
- [3] ANDRONOV A. A.; KHAIKIN S. E. AND VITT A. A., *Theory of oscillators*, Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [4] BABICKII V. I. *Theory of vibro-impact systems*, Moskva: Nauka, 1978.
- [5] BERNARDO, MARIO, et al. *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*. Springer Science and Business Media, 2008.
- [6] BROGLIATO B., *Nonsmooth mechanics*, London: Springer-Verlag, 1999.
- [7] BROGLIATO B., *Impacts in mechanical systems: analysis and modelling*, Springer Science and Business Media, 2000.
- [8] BROCUCKE, M. E., PUGH, C., y SIMIC, S. N. *Structural stability of piecewise smooth systems*, *Comput. Appl. Math*, 20(1-2), 51-89, 2001.
- [9] COLOMBO, ALESSANDRO; JEFFREY, MIKE R. *The two-fold singularity of non-smooth flows: Leading order dynamics in n-dimensions*, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2013, vol. 263, p. 1-10.

- [10] DA ROCHA MEDRADO, JOAO CARLOS; TEIXEIRA, MARCO ANTONIO. *Symmetric singularities of reversible vector fields in dimension three*, Physica D: Nonlinear Phenomena, 1998, vol. 112, no 1-2, p. 122-131.
- [11] FEIGIN M. I., *On the structure of C-bifurcation boundaries of piecewise-continuous systems*, PMM, vol. 42, no. 5, 1978, pp. 820-829. Journal of Applied mathematics and Mechanics, 1978, vol. 42, no 5, p. 885-895.
- [12] FILIPPOV A. F., *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, 1988.
- [13] GOLUBITSKY, M., y GUILLEMIN, V. *Stable mappings and their singularities (Vol. 14)*, Springer Science and Business Media. ISO 690, 2012.
- [14] HIRSCH, M. W. *Differential topology (Vol. 33)*. Springer Science and Business Media, 2012.
- [15] JACQUEMARD, ALAIN; TEIXEIRA, MARCO ANTONIO. *On singularities of discontinuous vector fields*. Bulletin des sciences mathematiques, 2003, vol. 127, no 7, p. 611-633.
- [16] KOSLOVA V. S., *Structural stability of discontinuous systems*, Vestnik Mosk. Gos., Univers. Ser. Matem. i Mekhan., v. 5, p. 16-20, 1984.
- [17] KUNZE MARKUS, *Non-smooth dynamical systems*, Springer Science and Business Media, 2000.
- [18] LEINE, REMCO; NIJMEIJER, HENK. *Dynamics and bifurcations of non-smooth mechanical systems*. Springer Science and Business Media, 2013.
- [19] PALIS J.; MELO W., *Introdução aos sistemas dinâmicos*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [20] PEIXOTO M., *Structural stability on two dimensional manifolds*, Topology, v. 1, 1962.
- [21] PERCELL P. B., *Structural stability on manifolds with boundary*, Topology, v. 12, p. 123-144, 1973.

- [22] PETERKA, F. *Theoretical analysis of n -multiple/ $1/n$ -impact motions*. Acta Technica CSAV, 1974, vol. 19, no 4, p. 462-473.
- [23] SOTOMAYOR, J.; TEIXEIRA, MARCO A. *Vector fields near the boundary of a 3-manifold*, En Dynamical Systems Valparaiso 1986. Springer, Berlin, Heidelberg, 1988. p. 169-195.
- [24] UTKIN V. I., *Sliding modes in control optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [25] UTKIN V. I., *Variable structure systems with sliding modes*, IEEE Transactions on Automatic Control, v. 22, n. 2, 1977.
- [26] VISHIK S. M., *Vector fields near the boundary of a manifold*, Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika, v. 27, n. 1, p. 21-28, 1972.
- [27] ZHUSUBALIYEV, ZHANYBAI T.; MOSEKILDE, ERIK. *Bifurcations And Chaos In Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Applications to Power Converters, Relay and Pulse-Width Modulated Control Systems, and Human Decision-Making Behavior*. World Scientific, 2003.