

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y
FORMALES**

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



**DIFERENCIAS FINITAS Y MÉTODOS ESPECTRALES
PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y
PARCIALES**

PRESENTADO POR EL BACHILLER:

FELIX ALVINO, MIGUEL

PARA OPTAR EL TITULO

PROFESIONAL EN MATEMÁTICAS

ASESOR:

Dr. ANGEL SANGIACOMO CARAZAS

AREQUIPA - PERÚ

2015

DIFERENCIAS FINITAS Y MÉTODOS
ESPECTRALES PARA ECUACIONES
DIFERENCIALES ORDINARIAS Y
PARCIALES

Miguel Felix Alvino

Diciembre 2015

Resumen

En este trabajo hacemos una exposición de las generalidades de dos métodos numéricos más utilizados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales: para nuestro caso son el de Diferencias Finitas y los métodos espectrales con respecto a Fourier y Chebyshev.

Utilizamos los métodos espectrales de Fourier con sus matrices de diferenciación y después por motivo de uniformidad fue necesario usar los polinomios ortogonales de Chebyshev que constituyen una alternativa adecuada a la base de Fourier.

Además, hemos aplicado los capítulos anteriores para resolver el flujo de Pouseuille, como un caso particular de la ecuación de Navier-Stokes a través de la aplicación de la teoría espectral de Fourier y Chebyshev con el auxilio de diferencias finitas.

Palabras Claves: Diferencias Finitas, Métodos Espectrales, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales, Flujo de Pouseuille y Ecuación de Navier-Stokes.

Abstract

In this paper we show an overview of two most used numerical methods for solving ordinary and partial differential equations for our case are the Finite Difference and spectral methods with respect to Fourier and Chebyshev.

Use Fourier spectral methods with their differentiation and then arrays because of uniformity required using Chebyshev orthogonal polynomials which are a suitable alternative Fourier basis.

In addition, we applied the previous chapters to solve the flow Pouseuille, as a particular case of the Navier-Stokes through the application of Fourier spectral and Chebyshev theory with the aid of finite differences.

Keywords: Finite Difference, Spectral Methods, Ordinary Differential Equations and Partial, Pouseuille Flow and Navier-Stokes equation.

Índice general

Agradecimiento	2
Introducción	3
1. APROXIMACIÓN POR DIFERENCIAS FINITAS	5
1.1. Diferencias Finitas para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	5
1.2. Diferencias finitas para Ecuaciones Diferenciales Parciales	8
1.2.1. Ecuaciones hiperbólicas	9
1.2.2. Ecuaciones parabólicas	12
1.2.3. Ecuaciones elípticas	13
2. MÉTODOS ESPECTRALES	15
2.1. Métodos espectrales de Fourier	15
2.1.1. Serie de Fourier Truncada	15
2.1.2. Métodos de Colocación según Fourier	16
2.2. Métodos espectrales de Chebyshev	19
2.2.1. Polinomios de Chebyshev	19
2.2.2. Métodos de Colocación según Chebyshev	22
2.3. Observaciones sobre la relación de diferencias finitas con aproxima- ciones espectrales.	25
2.3.1. Diferencias finitas versus colocación espectral	26
3. APLICACIONES	29
3.1. Formulación del Flujo de Pouseuille	29
3.1.1. Diferentes condiciones del flujo: Gradiente de presión con- stante o flujo constante.	32
3.2. Implementación Numérica	35
3.2.1. Aproximación Numérica: elección del método.	35
3.2.2. Evaluación de los términos lineales	38
3.2.3. Evaluación de los términos no lineales	40
3.2.4. Ecuaciones Reducidas. Evolución Temporal	42
3.2.5. El Integrador Numérico del Flujo Constante	46
3.2.6. Comprobación del Integrador Numérico	48
Bibliografía	54

Agradecimiento

Hay mucha gente que hizo y hace posible que yo esté acá, escribiendo mi tesis de licenciatura. Mucha gente que me ayudó y acompañó todos estos años, de cerca o de lejos, a nivel académico, familiar y brindándome su amistad. En particular, quiero agradecer:

A la Universidad Nacional de San Agustín y en especial a la Escuela Profesional de Matemáticas por acogerme en sus aulas, y a sus docentes por darme la enseñanza necesaria para poder triunfar en la vida.

De manera muy especial quiero extender mis agradecimientos a toda mi familia, por su apoyo y la confianza que depositan en mí, son todos el pilar de mi vida, gracias por estar conmigo en los momentos felices así como en los más difíciles, gracias por darme ánimos para salir adelante y gracias por ser tan amables, cariñosos, gracias por ser mi familia, sepan todos que los amo, mis agradecimientos a mis padres Dora, Lino y mi hermano Alejandro por estar siempre conmigo, gracias por ello.

A mi asesor Ángel Sangiacomo Carazas que siempre tuvo la paciencia necesaria para poder ayudarme en las cosas que no comprendía, dándome consejos e instrucciones necesarias para poder desarrollar mi tesis.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo trata de comparar la eficiencia en los cálculos del método de diferencia finita con el de método espectral de Fourier o chebyshev para ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

Además sabemos que estos dos métodos son los que nos dan mejor aproximación a la solución deseada, a problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) o ecuaciones diferenciales parciales (EDP) difíciles de resolver de forma analítica, utilizando polinomios interpolantes que aproximen a la función original de los cual obtendremos una solución numérica.

Para realizar este trabajo nosotros fórmulamos los siguientes objetivos:

Objetivo del proyecto: evaluar el método de diferencias finitas y métodos espectrales de Fourier o Chebyshev en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales para dar una solución aproximada a la solución original, en nuestro caso el problema de Pouseuille.

Objetivos Especificos:

Revisar y conocer los métodos de diferencias finitas, espectrales y pseudoespectrales.

Conocer los métodos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales por los métodos aproximados referidos a diferencias finitas y los metodos espectrales.

Conocer los métodos de Fourier y Chebyshev referidos a los métodos espectrales.

Aplicar los métodos espectrales a la solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales, y relacionarlos con los métodos de diferencias finitas.

Aplicación al flujo de Pouseuille.

Y además tenemos como **Hipótesis** que los métodos de diferencias finitas y métodos espectrales nos permiten dar solución a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales y además nos permiten examinar la gran potencia de los métodos espectrales en cuanto a precisión se refiere con respecto a diferencias finitas, especialmente al problema particular del flujo de Pouseuille.

Organización. El presente trabajo está organizado de la siguiente manera.

En el Capitulo 1 trataremos sobre la aproximación por diferencias finitas para EDO's y EDP's, donde los métodos de diferencias finitas son obtenidos para aproximar a una función $u(x)$ por un polinomio interpolante local. Las derivadas de $u(x)$ son entonces aproximados por diferenciación de estos polinomios locales. Y además daremos a conocer los tres tipos de EDP's mas comunes los cuales son:

Ecuaciones de tipo hiperbolico

Ecuaciones de tipo parabolico

Ecuaciones de tipo eliptico

Para cada uno de ellos construiremos su aproximación por diferencias finitas, utilizando diferencias avanzada, atrasada o centrada.

Posteriormente en el Capítulo 2 trataremos sobre los métodos espectrales de Fourier y Chebyshev. Así comenzaremos primeramente definiendo los métodos espectrales de Fourier que están representados por las series de Fourier o polinomios de Fourier. Donde veremos que los métodos de Fourier son apropiados para problemas periódicos, además construiremos su matriz de diferenciación con respecto de Fourier, pero debemos aclarar que estos métodos se trabajan con respecto a los puntos de colocación. Seguidamente definiremos los métodos espectrales de Chebyshev que tienen como base los polinomios de Chebyshev, además a diferencia de Fourier este método trabaja para problemas no periódicos, así también construiremos su matriz de diferenciación de Chebyshev. Por último, en este capítulo veremos algunas observaciones que relacionan los métodos de diferencia finita y métodos espectrales. Y terminaremos mostrando un ejemplo donde compararemos ambos métodos verificando cuál de ellos es más preciso en los cálculos aproximados con respecto a la solución analítica.

En el Capítulo 3 veremos una aplicación donde ponemos en práctica los conceptos tratados en los capítulos 1 y 2, esta aplicación está ligada al flujo de Pouseuille cuya ecuación está gobernada por las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incomprensibles. En donde utilizando diferencias finitas y métodos espectrales de colocación daremos una solución aproximada para el flujo de Pouseuille. A comienzo daremos una formulación del flujo de Pouseuille, para luego dar una implementación numérica utilizando los conceptos ya mencionados.



Figura 1: Métodos de diferencia finita.

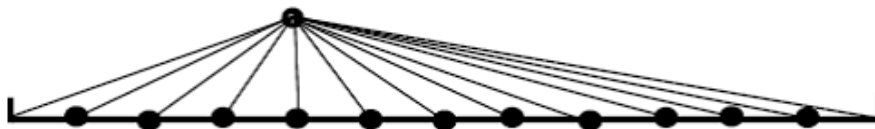


Figura 2: metodos espectrales

Capítulo 1

APROXIMACIÓN POR DIFERENCIAS FINITAS

El método de diferencias finitas sirve para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, las cuales van por lo general acompañadas de condiciones iniciales o de frontera.

Mediante un proceso de discretización, el conjunto infinito de números que representan la función o funciones incógnitas en el continuo, es reemplazado por un número finito de parámetros incógnita, y este proceso requiere alguna forma de aproximación.

Si deseamos determinar la función $f(x)$ que satisface una ecuación diferencial en un dominio determinado, junto a condiciones iniciales del problema. Se tiene que empezar por diferenciar la variable independiente x , para después construir una grilla o malla, con puntos discretos igualmente espaciados, sobre el dominio establecido. Después se debe reemplazar aquellos términos en la ecuación diferencial que involucren diferenciación por términos que contengan operaciones algebraicas. Este proceso trae implícito una aproximación y puede efectuarse mediante la utilización de aproximación en diferencias finitas para las derivadas en una función.

1.1. Diferencias Finitas para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Primeramente pasaremos a definir acerca de una ecuación diferencial ordinaria:

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO¹) es una ecuación que solo posee una variable independiente x , en su forma general es dada por

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

con F una función continua $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $(y, y', \dots, y^{(n)})$ son n derivadas de una función $y = y(x)$.

La ecuación (1.1) puede ser transformado a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden el cual tiene la forma

$$x' = f(x, t)$$

¹EDO: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

donde $f \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$.

Problema de Valor Inicial (PVI): Para f una función en \mathbb{R}^{n+1} , $T > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, encontrar una función diferenciable $x(t)$ definida para $t \in [0, T]$ tal que

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Se dice que una función f continua con respecto de t satisface la condición de Lipschitz para la variable $x \in \mathbb{R}^n$, si existe una constante $L > 0$ para $t \in [0, T]$ con la propiedad de que

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leq L|x_1 - x_2|$$

Enseguida enunciaremos el teorema de existencia y unicidad para el problema de valor inicial (1.2).

Teorema 1.1 (*Existencia y Unicidad*). Sea f una función continua y lipschitziana con respecto $x, t \in [0, T]$. Entonces existe una única función diferencial que satisface el PVI

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La idea básica del método de diferencias finitas es de aproximar la ecuación diferencial por cocientes de diferencia apropiados, así reducir una ecuación diferencial a un sistema algebraico. Existe una variedad de caminos hacia la aproximación.

Sea f una función diferenciable en \mathbb{R} . Si $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$. Entonces tenemos las siguientes tres diferencias típicas de aproximación:

Diferencia de avanzada:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Diferencia atrasada:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Diferencia centrada

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Si f posee segunda derivada, en este caso se verifica que los errores de aproximación para diferencias avanzada y atrasada es $O(h)$. Si la tercera derivada de f existe, entonces el error de aproximación para la diferencia centrada es $O(h^2)$. Observamos que si la función es suave, diferencias centrada es mas exacto aproximando a la derivada.

La segunda derivada de la función f es usualmente aproximado por diferencia centrada de segundo orden:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

y podemos verificar que f tiene cuarta derivada, el error de aproximación es $O(h^2)$.

Ilustraremos utilizando el problema de valor en la frontera de segundo orden para una función $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= g(x) \\ y(a) &= \alpha, \quad y(b) = \beta \end{aligned} \quad (1.3)$$

suponiendo que $q, g \in C[a, b]$ (es decir q y g son funciones continuas en $[a, b]$) y $q(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$, esto puede probar que (1.3) tiene una única solución $y(x)$.

Para discretizar (1.3), subdividamos $[a, b]$ en $n + 1$ subintervalos iguales,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b, \quad x_j = a + hj, \quad h = \frac{b-a}{n+1},$$

y, abreviando $y_j = y(x_j)$, reemplazamos el cociente diferencial $y_i'' = y''(x_i)$ para $i = 1, \dots, n$, por la diferencia de segundo orden

$$\Delta^2 y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

estimando el error $\tau_i(y) = y''(x_i) - \Delta^2 y_i$, y utilizando la expansión de Taylor hasta el cuarto orden, tenemos que el error queda de la siguiente manera:

$$\tau_i(y) = y''(x_i) - \Delta^2 y_i = -\frac{h^2}{12} y^{(4)}(x_i + \theta_i h) \quad \text{para algún } |\theta_i| < 1.$$

De (1.3), los valores $y_i = y(x_i)$ satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ \frac{2y_i - y_{i-1} - y_{i+1}}{h^2} + q(x_i)y_i &= g(x_i) + \tau_i(y), \quad i = 1, \dots, n, \\ y_{n+1} &= \beta \end{aligned} \quad (1.4)$$

abreviando $q_i = q(x_i)$, $g_i = g(x_i)$, los vectores

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \tau(y) = \begin{bmatrix} \tau_1(y) \\ \tau_2(y) \\ \vdots \\ \tau_n(y) \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} g_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n + \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}$$

y la matriz simétrica tridiagonal $n \times n$

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 + q_1 h^2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 + q_2 h^2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 + q_n h^2 \end{bmatrix}$$

la ecuación (1.4) es equivalente a

$$A\bar{y} = k + \tau(y) \quad (1.5)$$

El método de diferencia consiste en eliminar el término error $\tau(y)$ en (1.5) y tomando la solución $u = [u_1, \dots, u_n]^T$ del sistema resultante de la ecuación lineal,

$$Au = k$$

como una aproximación a \bar{y} .

1.2. Diferencias finitas para Ecuaciones Diferenciales Parciales

¿Que es una EDP²? Es una ecuacion que envuelve dos o mas variables independientes, una función incógnita, sus derivadas parciales con respecto a esas variables, en general una EDP tiene la siguiente expresión

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \dots) = 0$$

donde $x, y, \dots \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ son las variables independientes y $u : \Omega \subset \mathbb{R}$ es la función incógnita de estas variables.

Nosotros consideraremos una EDP de segundo orden dada por:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0$$

donde A, B, C, D, E, F y G son funciones de las variables independientes x e y , y también de la variable dependiente u .

Estas ecuaciones diferenciales parciales se clasifican en tres grupos:

Elipticas: si $B^2 - 4AC < 0$.

Parabolicas: si $B^2 - 4AC = 0$.

Hiperbolica: si $B^2 - 4AC > 0$.

Enseguida tenemos estos tres tipos de ecuaciones:

1. *Ecuaciones de tipo hiperbólico*: La ecuacion de la onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2. *Ecuaciones de tipo parabólico*: La ecuacion del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3. *Ecuaciones de tipo elíptico*: Las ecuaciones de Poisson y Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k, \quad k \text{ es constante.}$$

Estos tres tipos de EDP's son asociados con estados de equilibrio, estados de difusión y sistemas de oscilación, respectivamente. Estudiaremos algunos métodos numéricos para resolver estas EDP's. Donde las soluciones analíticas son usualmente difíciles de encontrar.

Por esta razón tenemos el método de diferencias finitas que toma un h como la longitud espacial y k longitud temporal, donde h y k son números positivos. Entonces la rejilla tienen los puntos $(t_n, x_m) = (nk, mh)$ para $n, m \in \mathbb{Z}$.

²EDP: Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Sabiendo que una ecuación diferencial parcial definido por

$$Lu = g$$

donde $L : U \rightarrow V$ es un operador diferencial, y U, V espacio de funciones en \mathbb{R}^n , $g \in V$. Y su expresión en diferencias finitas

$$L_h u_h = g_h$$

con $L_h : U_h \rightarrow V_h$, $g_h \in V_h$, y espacios discretos U_h, V_h . Ahora veamos el concepto de estabilidad del método de discretización de diferencias finitas:

Definición 1.1 *El método de discretización de diferencias finitas es estable, si para algún constante $S > 0$ se tiene*

$$\|v_h - w_h\| \leq S \|L_h v_h - L_h w_h\| \quad , \text{para todo } v_h, w_h \in U_h \quad (1.6)$$

La estabilidad garantiza que los errores de redondeo ocurridos en el problema no tengan un efecto excesivo en el resultado final.

Observación 1.1 *Si el operador L_h es lineal, entonces la estabilidad de la discretización es equivalente a la existencia de una constante $c > 0$, independiente de h , tal que $\|L_h^{-1}\| \leq c$.*

Cuando el operador L_h es no-lineal, es valido aplicar la desigualdad (1.6) en una vecindad de la solución discreta u_h .

1.2.1. Ecuaciones hiperbólicas

Como ejemplo de una EDP hiperbólica tenemos la ecuación de ondas.

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T \quad (1.7)$$

con las C.F.³

$$u(0, t) = 0; \quad u(L, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

y los C.I.⁴

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u_t(x, 0) &= g(x), & 0 < x < L \end{aligned}$$

La ecuación de ondas modela el desplazamiento $u(x; t)$ desde su posición de equilibrio de una cuerda elástica vibrante cuyos extremos, de coordenadas $x = 0$; $x = L$ estan fijos.

La solución exacta de la ecuación de ondas podemos determinarla por medio de las series de Fourier, aquí vamos a usar este problema como prototipo de la situación que se da en las EDP's hiperbólicas a través de los métodos en diferencias.

³C:F: Condiciones de Frontera.

⁴C:I: Condiciones Iniciales.

Construcción de la ecuación en diferencias

Hagamos una partición del rectángulo

$$\mathfrak{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$$

en una malla que consta de $n - 1$ por $m - 1$ rectángulos de lados $\Delta x = h$; $\Delta t = k$, como se muestra en la figura [1.1](#)

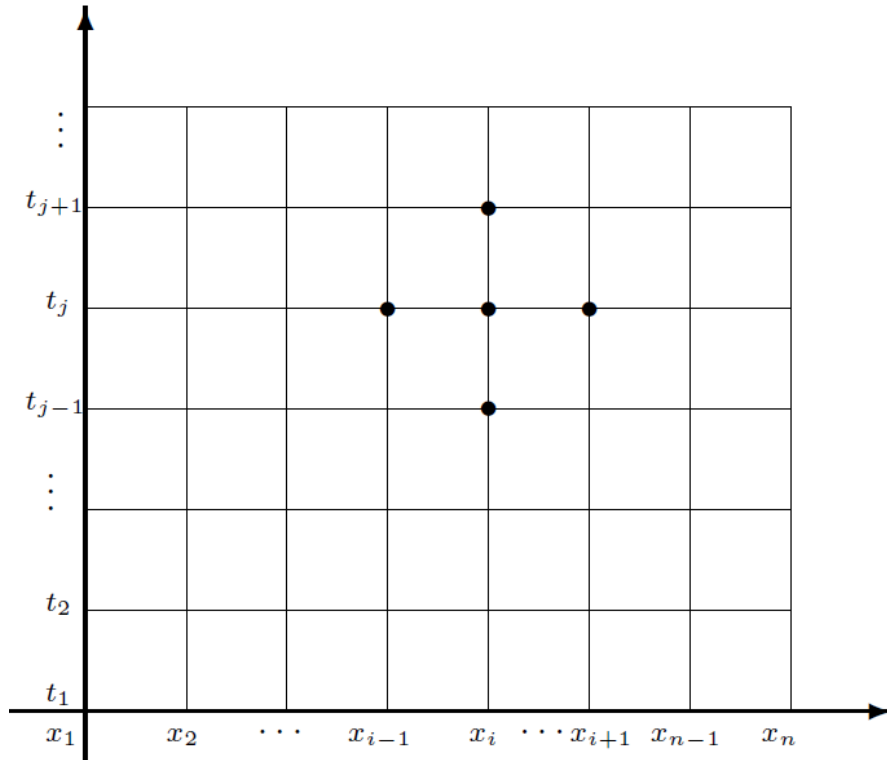


Figura 1.1: Esquema de diferencias finitas

Empezamos por la fila de abajo donde $t = t_1 = 0$, ya sabemos que la solución es $f(x_i) = u(x_i, t_1)$. Ahora vamos a usar una ecuación en diferencias para calcular las filas sucesivas, las aproximaciones a la solución exacta, que en los puntos de la malla son $u(x_i, t_j)$. O sea, para $j = 2, 3, \dots$ calcularemos

$$\{u_{i,j} \simeq u(x_i, t_j), i = 1, 2, \dots\}$$

Utilizaremos la fórmula de diferencias centradas para aproximar $u_{tt}(x, t)$ y $u_{xx}(x, t)$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} + o(k^2) & (1.8) \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + o(h^2) \end{aligned}$$

El espacio entre los puntos de la malla es uniforme en todas las filas $x_{i+1} = x_i + h$; $x_{i-1} = x_i - h$; y también es uniforme en todas las columnas $t_{j+1} = t_j + k$ ó $(t_{j-1} = t_j - k)$.

Teniendo esto en cuenta, obtenemos la ecuación en diferencias eliminando términos de orden $o(k^2)$ y $o(h^2)$ de las relaciones anteriores, usando la aproximación $u_{i,j}$ en vez de $u(x_i, t_j)$ en dichas relaciones y sustituyendo en (1.7) nos da

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (1.9)$$

que es la ecuación en diferencias que usaremos como aproximación a la ecuación diferencial (1.7). Si escribimos (1.9) así

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \frac{a^2 k^2}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

y llamando $r = \frac{ak}{h}$ se tiene

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = r^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \quad (1.10)$$

Reordenando los términos de (1.10), podemos determinar las aproximaciones a la solución en los puntos de la fila $(j+1)$ -ésima de la malla, supuesto que conocemos las aproximaciones a la solución en los puntos de las filas anteriores j -ésima y $(j-1)$ -ésima.

$$u_{i,j+1} = (2 - 2r^2) u_{i,j} + r^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \text{ y } j = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

Las condiciones de frontera son dadas así:

$$u(0, t) = u(L, t) = u_{0,j} = u_{n,j} = 0, \quad \text{para cada } j = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

y la condición inicial implica lo siguiente:

$$u(x, 0) = f(x) = u_{i,0} = f(x_i), \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.13)$$

Las ecuaciones (1.11) y (1.12) implican que el $(j+1)$ -ésimo paso de tiempo requiere valores de los j -ésimo y $(j-1)$ -ésimo. Esto produce un pequeño problema inicial, por que los valores de $j=0$, están dadas por la ecuación (1.13), pero los valores de $j=1$, que se necesitan en la ecuación (1.11) para calcular $u_{i,2}$, deba obtenerse de la condición inicial de la velocidad:

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L$$

reemplazando $\partial u / \partial t$ por una aproximación de diferencias progresivas tenemos:

$$u_{i,1} = u_{i,0} + kg(x_i), \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n-1.$$

Observación 1.2 Hay que tener cuidado al utilizar la fórmula (1.11) si el error cometido en una etapa de los cálculos no se amplifica en las etapas posteriores, entonces se dice que el método es estable. Para garantizar la estabilidad de la fórmula (1.11) es necesario que [2]

$$r = \frac{ak}{h} \leq 1.$$

1.2.2. Ecuaciones parabólicas

Como ejemplo de una EDP parabólico consideramos la ecuación del calor.

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 < t < T. \quad (1.14)$$

con C.I.

$$u(x, 0) = f(x), \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

y C.F.

$$\begin{aligned} u(0, t) &= c_1 = 0, & x = 0, & \quad 0 \leq t \leq T \\ u(L, t) &= c_2 = 0, & x = L, & \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Como sabemos la ecuación del calor modela la distribución de temperaturas en un alambre aislado, cuyos extremos se mantienen a temperaturas constantes c_1 y c_2 , a partir de una distribución inicial de temperaturas a lo largo del alambre $f(x)$ [2]. Calcular la solución exacta es mediante series de Fourier. Pero, en este caso utilizaremos esta ecuación para resolverlo numéricamente.

Construcción de la ecuación en diferencias

Dividamos el rectángulo

$$\mathfrak{R} = \{(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T\}$$

en $n - 1$ por $m - 1$ rectángulos de lados $\Delta x = h$; $\Delta t = k$. Empezamos por la fila de abajo donde $t = t_1 = 0$, ya sabemos que la solución es $f(x_i) = u(x_i, t_1)$, desarrollaremos un método para calcular las aproximaciones a los valores exactos $u(x, t)$ en los puntos de la malla $\{u_{i,j} \simeq u(x_i, t_j), \quad i = 1, 2, \dots\}$ para $j = 2, 3, \dots, m$. Las fórmulas en diferencias que usamos para $u_t(x, t)$ y $u_{xx}(x, t)$ son, respectivamente

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} + o(k) & (1.15) \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + o(h^2) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el tamaño de los rectángulos de la malla es uniforme en cada fila, $x_{i+1} = x_i + h$; y $x_{i-1} = x_i - h$, y en cada columna $t_{j+1} = t_j + k$ despreciando los términos $o(k)$ y $o(h^2)$, usando la aproximación $u_{i,j}$ en vez de $u(x_i, t_j)$ en las ecuaciones (1.15) y sustituyendo lo que se obtiene en la ecuación del calor (1.14) tendremos

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (1.16)$$

que es una aproximación a la relación (1.14). Por comodidad llamaremos $r = \frac{a^2 k}{h^2}$ en (1.16) y reordenando tenemos

$$u_{i,j+1} = (1 - 2r) u_{i,j} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad i = 2, 3, \dots, n - 1. \quad (1.17)$$

La ecuación en diferencias (1.17) se emplea para calcular las aproximaciones en la fila $(j + 1)$ -ésima de la malla a partir de las aproximaciones de la fila anterior;

hagamos notar que esta fórmula proporciona explícitamente el valor $u_{i,j+1}$ en función de $u_{i-1,j}$; $u_{i,j}$; $u_{i+1,j}$.

Dado la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, $t = 0$, $0 \leq x \leq L$. implica que $u_{i,0} = f(x_i)$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Y las condiciones de frontera son dadas así $u(0, t) = u(L, t) = u_{0,j} = u_{n,j} = 0$, para cada $j = 1, 2, \dots$.

Observación 1.3 La fórmula (1.17) es muy sencilla y nos invita a usarla rápidamente, sin embargo es importante usar técnicas numéricas estables y la fórmula (1.17) no siempre lo es. La fórmula (1.17) es estable si, y solo si, $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$. Esto significa que el tamaño de paso k debe cumplir $k \leq \frac{h^2}{2a^2}$. Si esto no se cumple, entonces puede ocurrir que los errores introducidos en la fila $\{u_{i,j}\}$ se amplifiquen en alguna fila posterior $\{u_{i,p}\}$ para algún $p > j$ [2].

1.2.3. Ecuaciones elípticas

Como ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales elípticas, consideremos las ecuaciones de Laplace, Poisson y Helmholtz. Recordemos que la laplaciana de una función $u(x, y)$ es

$$\nabla^2 u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)$$

Con esta notación, las ecuaciones de Laplace, Poisson y Helmholtz pueden expresarse de la siguiente manera

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{Ecuación de Laplace;}$$

$$\nabla^2 u(x, y) = g(x, y) \quad \text{Ecuacion de Poisson;}$$

$$\nabla^2 u(x, y) + f(x, y)u(x, y) = g(x, y) \quad \text{Ecuacion de Helmholtz}$$

Si se conocen los valores que debe tomar la función $u(x, y)$ (problema de Dirichlet) o su derivada normal $\frac{\partial u(x, y)}{\partial \eta} = 0$ (problema de Neumann) en la frontera de una región rectangular \mathfrak{R} del plano, entonces cada uno de estos problemas puede resolverse mediante la técnica numérica conocida como el método de las diferencias finitas. Por razones obvias, sólo, estudiaremos con detalles la ecuación en diferencias para el laplaciano.

Ecuación en diferencias para el laplaciano

El primer paso consiste en obtener una versión discretizada del operador de Laplace que nos permita usarlo numéricamente. La fórmula para $f''(x)$ es

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + o(h^2) \quad (1.18)$$

así que, al aplicar esta fórmula a la función $u(x, y)$ para aproximar $u_{xx}(x, y)$ y $u_{yy}(x, y)$ y sumar los resultados obtenemos

$$\nabla^2 u = \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2} + o(h^2) \quad (1.19)$$

Ahora dividamos el rectángulo $\mathfrak{R} = \{(x, y), 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b\}$ en $n - 1 \times m - 1$ cuadrados de lado h (o sea $a = nh$ y $b = mh$), como se muestra en la figura [1.1](#), donde en vez de t sea y . Para resolver la ecuación de Laplace, imponemos la aproximación

$$\frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2} + o(h^2) = 0 \quad (1.20)$$

que tiene una precisión de orden $o(h^2)$ en los puntos interiores de la malla $(x, y) = (x_i, y_j)$ para $i = 2, 3, \dots, n - 1$ y $j = 2, 3, \dots, m - 1$. Como los puntos de la malla están espaciados uniformemente

$$x_{i+1} = xi + h; \quad x_{i-1} = xi - h; \quad y_{i+1} = yi + h \text{ e } y_{i-1} = yi - h;$$

denotando por $u_{i,j}$ la aproximación al valor $u(x_i, y_j)$, la ecuación [\(1.20\)](#) queda

$$\nabla^2 u_{i,j} \simeq \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2} = 0 \quad (1.21)$$

expresión que se conoce como la fórmula de diferencias con cinco puntos para el laplaciano, [\(5\)](#). Esta fórmula relaciona el valor de la función $u_{i,j}$ con sus cuatro valores adyacentes $u_{i+1,j}$; $u_{i-1,j}$; $u_{i,j+1}$ y $u_{i,j-1}$. Eliminando de la expresión [\(1.21\)](#) el denominador h^2 obtenemos la fórmula de aproximación para la ecuación de Laplace

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

Capítulo 2

MÉTODOS ESPECTRALES

Los métodos espectrales involucran la búsqueda de soluciones de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales, en términos de funciones suaves. Estos métodos se empezaron a utilizar ampliamente desde hace unos 30 años, y son actualmente, una alternativa al método de diferencias finitas.

El método espectral más familiar es el método de Fourier en que las funciones de base son funciones trigonométricas. Tales bases están adaptadas a problemas periódicos. Así comenzaremos este segundo capítulo definiendo primeramente los métodos espectrales de Fourier.

Como los métodos de Fourier son apropiados para problemas periódicos, pero no están adaptados para problemas no-periódicos por la existencia de los fenómenos de Gibbs en las fronteras o límites. Para este tipo de problemas es necesario utilizar los polinomios ortogonales, como son los polinomios de Chebyshev del cual se conoce los métodos espectrales de Chebyshev, que constituyen una alternativa adecuada a la base de Fourier [4]. El desarrollo en serie de Chebyshev puede ser visto como una serie de Fourier de cosenos. Así estos son los dos métodos que pasaremos a definir a continuación:

2.1. Métodos espectrales de Fourier

2.1.1. Serie de Fourier Truncada

Sea $u(x)$ una función que es aproximada por la siguiente serie truncada

$$u_K(x) = \sum_{k=-K}^K \hat{u}_k e^{ikx} \quad (2.1)$$

donde $i^2 = -1$. Esta expansión contiene $2K+1$ coeficientes complejos que tienen que ser determinados. La función $u(x)$ asume ser real si los dos coeficientes de Fourier, con valores contrarios de k , son complejos conjugados, es decir

$$\hat{u}_{-k} = \overline{\hat{u}_k} \quad (2.2)$$

el coeficiente \hat{u}_0 es obviamente real. Por lo tanto, con (2.2), la expansión (2.1) también contiene $2K+1$ incógnitas reales. Generalmente, los coeficientes complejos \hat{u}_k

son calculados para $k = 0, \dots, K$ y entonces los coeficientes restantes son dadas por (2.2). La forma compleja de la expansión (2.1) es utilizado para aplicar la transformada rápida de Fourier.

El producto escalar $(u, v)_w = \int_{\alpha}^{\beta} uvw dx$ esta definido en $L^2(0, 2\pi)$, es valido para $w = 1$, la cual es

$$(u, v) = \int_0^{2\pi} u\bar{v} dx$$

así que la propiedad de ortogonalidad en la función exponencial compleja es

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } k = n \\ 0, & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

donde e^{ikx} es ortogonal en $L^2[0, 2\pi]$

2.1.2. Métodos de Colocación según Fourier

Los puntos de colocación asociados con la serie de Fourier son definidos por

$$x_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0, \dots, N,$$

tal que $x_0 = 0$ y $x_N = 2\pi$. Sea $u(x)$ una función periódica, que satisface $u(x_0) = u(x_N)$ y similar igualdad para sus derivadas. La función $u(x)$ es aproximada por la expansión (2.1) es decir,

$$u_K(x) = \sum_{k=-K}^K \hat{u}_k e^{ikx}$$

donde los coeficientes $\hat{u}_k, k = -K, \dots, K$, son definidos al imponer el residual $R_K(x) = u(x) - u_K(x)$, que son nulos en los puntos de colocación, o sea:

$$R_K(x_j) = u(x_j) - u_K(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

o

$$\sum_{k=-K}^K \hat{u}_k e^{ikx_j} = u(x_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Como se mencionó anteriormente, el sistema contiene $2K + 1$ incógnitas complejas de \hat{u}_k , por lo tanto es necesario que

$$N = 2K + 1.$$

Si $u(x_j)$ es real, y por la igualdad $\hat{u}_{-k} = \bar{\hat{u}}_k$ se tiene un sistema que contiene $2K + 1$ incógnitas reales.

Ahora, los coeficientes \hat{u}_k son determinados explícitamente por aplicación de la relación discreta de ortogonalidad

$$\sum_{j=1}^N e^{i(k-n)\frac{2\pi j}{N}} = \begin{cases} N, & \text{si } k - n = mN, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases} \quad (2.4)$$

Por lo tanto, multiplicando en ambos lados de la ecuación (2.3) por e^{-inx} y sumando de $j = 1$ hasta $j = N$. Entonces, debido a (2.4), obtenemos

$$\hat{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(x_j) e^{-ikx_j}, \quad k = -K, \dots, K \quad (2.5)$$

Matrices de Diferenciación de Fourier

En esta parte haremos la construcción de las matrices de diferenciación para la p -ésima derivada de $u_N^{(p)}$:

$$u_N^{(p)}(x_j) = \sum_{l=0}^N d_{j,l}^{(p)} u_N(x_l)$$

donde $[d_{j,l}^{(p)}] = D$ es la matriz de diferenciación con $j, l = 1, \dots, N$.

Tenemos como objetivo construir la matriz de diferenciación para los métodos espectrales de Fourier. Comenzaremos considerando la expresión siguiente

$$u_K(x) = \sum_{k \in I_K} \hat{u}_k e^{ikx} \quad (2.6)$$

donde $I_K = \{-K, \dots, K\}$ para colocaciones impares y $I_K = \{-K + 1, \dots, K\}$ para colocaciones pares. Derivando la ecuación (2.6) p -veces tenemos

$$u_K^{(p)}(x_j) = \sum_{k \in I_K} (ik)^p \hat{u}_k e^{ikx_j} \quad (2.7)$$

donde $x_j = 2j\pi/N$, $j = 1, \dots, N$, con $N = 2K + 1$ para colocaciones impares y $N = 2K$ para colocaciones pares.

Ahora, teniendo \hat{u}_k dada por (2.5) con $k \in I_K$ y reemplazando en (2.7) y evaluando en x_j obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} u_K^{(p)}(x_j) &= \sum_{k \in I_K} (ik)^p \left(\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N u(x_l) e^{-ikx_l} \right) e^{ikx_j} \\ &= \sum_{l=1}^N \frac{1}{N} \sum_{k \in I_K} (ik)^p e^{ik(x_j - x_l)} u(x_l) \\ &= \sum_{l=1}^N d_{j,l}^{(p)} u_K(x_l), \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d_{j,l}^{(p)} &= \frac{1}{N} \sum_{k \in I_K} (ik)^p e^{ik(x_j - x_l)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k \in I_K} \frac{d^p}{d\xi^p} (e^{ik\xi}) \\ &= \frac{1}{N} \frac{d^p}{d\xi^p} \sum_{k \in I_K} e^{ik\xi} \end{aligned} \quad (2.8)$$

por la definición del núcleo de Dirichlet¹ con $\xi = x_j - x_l$, tenemos que

$$d_{j,l}^{(p)} = \frac{1}{N} \left[\frac{d^p}{d\xi^p} \left(\frac{\text{sen}(N'\xi/2)}{\text{sen}(\xi/2)} \right) \right]_{\xi=x_j-x_l}, j \neq l,$$

donde $N' = N = 2K + 1$ para colocaciones impares y $N' = N - 1 = 2K - 1$ para colocaciones pares.

Si $j = l$, tenemos de (2.8) que $e^{ik\xi} = 1$, así:

$$d_{j,l}^{(p)} = \frac{1}{N} \sum_{k \in I_K} (ik)^p$$

$$d_{j,l}^{(p)} = \begin{cases} 0 & , \text{para } p \text{ impar} \\ (-1)^{p/2} \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{(N'-1)/2} k^p & , \text{para } p \text{ par} \end{cases}$$

en particular, las expresiones para las dos primeras derivadas en el caso de colocaciones impares son:

Derivada de primer orden:

$$d_{j,l}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{l+j}}{2 \text{sen}(h_{l,j})} & , \text{si } l \neq j \\ 0 & , \text{si } l = j \end{cases}$$

con $h_{j,l} = (x_j - x_l) / 2$.

Derivada de segundo orden:

$$d_{j,l}^{(2)} = \begin{cases} (-1)^{l+j+1} \frac{\cos(h_{l,j})}{2 \text{sen}^2(h_{l,j})} & , \text{si } l \neq j \\ -\frac{N^2-1}{12} & , \text{si } l = j \end{cases}$$

Donde N es el número de particiones. En el caso de colocaciones pares, las expresiones son:

Derivada de primer orden:

$$d_{j,l}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2} (-1)^{l+j} \cot(h_{l,j}) & , \text{si } l \neq j \\ 0 & , \text{si } l = j \end{cases}$$

$$D_N^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} & -\frac{1}{2} \cot \frac{2h}{2} & & & -\frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{2} \cot \frac{2h}{2} & -\frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} & 0 & \frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} & -\frac{1}{2} \cot \frac{2h}{2} \\ & & & & & \ddots & \\ \frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} & & & & \frac{1}{2} \cot \frac{2h}{2} & -\frac{1}{2} \cot \frac{h}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

¹Núcleo de Dirichlet

$$\mathcal{D}_N(x) = \sum_{k=-N}^N e^{ikx} = \frac{\text{sen}(N-\frac{1}{2})x}{\text{sen} \frac{x}{2}}$$

Derivada de segundo orden:

$$d_{l,j}^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{4} (-1)^{l+j} \frac{(-1)^{l+j+1}}{2 \operatorname{sen}^2(h_{l,j})} & , \text{ si } l \neq j \\ -\frac{(N-1)(N-2)}{12} & , \text{ si } l = j \end{cases}$$

Estos procesos pueden ser formulados como una multiplicación de matrices

$$U^{(p)} = D^{(p)}U, \quad p \geq 0,$$

donde

$$D^{(p)} = d_{l,j}^{(p)}, \quad l, j = 0, \dots, N.$$

$$U = (u_N(x_0), \dots, u_N(x_N))^T, \quad U^{(p)} = \left(u_N^{(p)}(x_0), \dots, u_N^{(p)}(x_N) \right)^T,$$

enseguida daremos un ejemplo con respecto a la matriz de diferenciación de Fourier de primera y segunda derivada, pero con respecto a colocaciones pares, para $N = 4$:

$$D_N^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5000 & 0,0000 & -0,5000 \\ -0,5000 & 0 & 0,5000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,5000 & 0 & 0,5000 \\ 0,5000 & 0,0000 & -0,5000 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_N^{(2)} = \begin{bmatrix} -0,5000 & 0,0000 & 0,5000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,5000 & 0,0000 & 0,5000 \\ 0,5000 & 0,0000 & -0,5000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5000 & 0,0000 & -0,5000 \end{bmatrix}$$

Observación 2.1 Una de las propiedades principales de la serie de Fourier es su rápida tasa de convergencia, al ser funciones exponenciales infinitamente diferenciables. Esto constituye una ventaja evidente sobre diferencias finitas. Por otro lado, la desventaja del método de Fourier es su incapacidad para manejar problemas no periódicos, debido a la presencia de las oscilaciones de Gibbs por la convergencia no uniforme de la serie de Fourier en los extremos del dominio de definición [4].

2.2. Métodos espectrales de Chebyshev

El método espectral de Chebyshev constituye una alternativa adecuada a la base de Fourier. Además tenemos que el desarrollo en serie de Chebyshev puede ser visto como una serie de cosenos de Fourier, por lo que posee valiosas propiedades de esto último se refiere, en particular, a su convergencia. Además la facilidad de manejo que tiene gracias a los polinomios de Chebyshev [4].

2.2.1. Polinomios de Chebyshev

El polinomio de Chebyshev del primer tipo $T_k(x)$ es un polinomio de grado k definido para $x \in [-1, 1]$ por

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

por tanto, $-1 \leq T_k \leq 1$. Como $x = \cos z$, tenemos

$$T_k = \cos kz, \quad (2.10)$$

del cual se deduce las expresiones para los primeros polinomios de Chebyshev

$$T_0 = 1, T_1 = \cos z = x, T_2 = \cos 2z = 2 \cos^2 z - 1 = 2x^2 - 1,$$

generalizamos de la fórmula de Moivre, obteniendo

$$\cos kz = \operatorname{Re} \left\{ (\cos z + i \operatorname{sen} z)^k \right\}$$

y entonces, aplicando la fórmula binomial, también expresamos el polinomio T_k como

$$T_k = \frac{k}{2} \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(k-m-1)!}{m!(k-2m)!} (2x)^{k-2m}, \quad (2.11)$$

donde $\lfloor \phi \rfloor$ denota la parte entera de ϕ [4].

De la identidad trigonométrica

$$\cos(k+1)z + \cos(k-1)z = 2 \cos z \cos kz$$

deducimos la relación de recurrencia

$$T_{k+1} - 2xT_k + T_{k-1} = 0, k \geq 1. \quad (2.12)$$

el cual nos permite, en particular, deducir la expresión de los polinomios T_k , $k \geq 2$, conociendo a T_0 y T_1 . El gráfico de los primeros polinomios se muestra en la figura 2.1

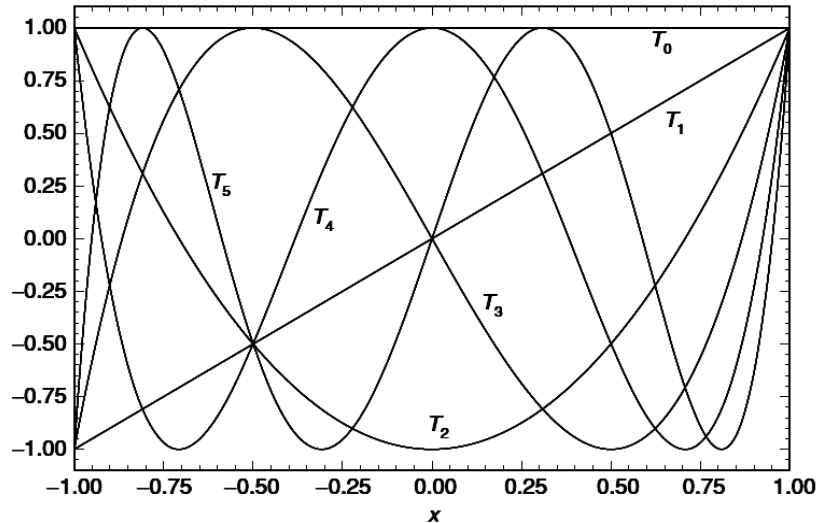


Figura 2.1: Los cinco polinomios de Chebyshev. Fuente: [3]

La expresión (2.11) también es usado en algunas circunstancias especiales, pero la representación (2.10) es generalmente usado en la computación como también en el estudio teórico.

Ahora veremos algunas propiedades útiles para el entendimiento y aplicación de polinomios de Chebyshev a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

Los valores T_k y su primer derivada T'_k en $x = \pm 1$ son dadas por

$$T_k(\pm 1) = (\pm 1)^k, \quad T'_k(\pm 1) = (\pm 1)^{k+1} k^2 \quad (2.13)$$

El conocimiento de estos valores puede ser de interés cuando se escriban las condiciones de frontera. Es importante notar que

$$T_k(-x) = (-1)^k T_k(x) \quad (2.14)$$

que es la paridad del polinomio que es igual a su grado k .

El polinomio T_k se anulan en los puntos x_j definidos por

$$x_j = \cos\left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k}, \quad j = 0, \dots, k-1. \quad (2.15)$$

y alcanza sus valores extremos ± 1 en los puntos x_j definidos por

$$x_j = \cos \frac{\pi j}{k}, \quad j = 0, \dots, k \quad (2.16)$$

Note que tales puntos de (2.16) son los ceros del polinomio $(1-x^2)T'_k(x)$.

Una relación de recurrencia en la derivada T_k pueden obtenerse fácilmente, Primero, la diferenciación de T_k nos da

$$T'_k = \frac{d}{dz}(\cos kz) \frac{dz}{dx} = k \frac{\text{sen } kz}{\text{sen } z},$$

donde usamos la representación (2.10). Entonces, aplicando fórmulas trigonométricas, obtenemos la relación

$$\frac{T'_{k+1}}{k+1} - \frac{T'_{k-1}}{k-1} = 2T_k \quad (2.17)$$

valido para $k > 1$. Una fórmula similar para la p -ésima derivada es obtenida derivando sucesivamente a (2.17)

Los polinomios de Chebyshev son ortogonales en $[-1, 1]$ con función de peso

$$w = (1-x^2)^{-1/2} \quad (2.18)$$

y con el producto escalar definido por

$$(u, v)_w = \int_{-1}^1 uvw dx \quad (2.19)$$

y por la propiedad de ortogonalidad

$$(T_k, T_l)_w = \int_{-1}^1 T_k T_l w dx = \frac{\pi}{2} c_k \delta_{k,l} \quad (2.20)$$

donde $\delta_{k,l}$ es el delta de Kronecker y c_k está definido por

$$c_k = \begin{cases} 2 & \text{si } k = 0 \\ 1 & \text{si } k \geq 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

La aproximación de Chebyshev es costoso al usar la fórmula cuadratura de Gauss. Para los puntos de Gauss-Lobato $x_j = \cos \pi j/N$, $j = 0, \dots, N$, generalmente usados en métodos de colocación, la fórmula cuadratura aplicado a cualquier función $p(x)$ da

$$\int_{-1}^1 p w dx = \sum_{j=0}^N p(x_j) w_j \simeq \frac{\pi}{N} \sum_{j=0}^N \frac{p(x_j)}{\bar{c}_j} \quad (2.22)$$

con $w_j = \frac{\pi}{\bar{c}_j N}$, $j = 0, \dots, N$, y

$$\bar{c}_k = \begin{cases} 2, & \text{si } k = 0 \text{ o } k = N \\ 1, & \text{si } 1 \leq k \leq N - 1 \end{cases}$$

La relación (2.22) es exacto si $p(x)$ es un polinomio de grado $2N - 1$ a más. De (2.22) también se obtiene la relación discreta de ortogonalidad basado en los puntos de Gauss-Lobato x_j , $j = 0, \dots, N$. para $k \neq N$ o $l \neq N$, el uso de (2.22) da una aproximación exacta a la integral en (2.20) donde T_k, T_l son polinomios de grado $2N - 1$:

$$\frac{\pi}{2} c_k \delta_{k,l} = \int_{-1}^1 T_k T_l w dx = \frac{\pi}{N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{\bar{c}_j} T_k(x_j) T_l(x_j)$$

Para $k = l = N$, esta última fórmula continua exacto siempre que c_k sea reemplazado en el lado derecho por $\bar{c}_N (= 2)$. Por tanto, la relación discreta de ortogonalidad es

$$\sum_{j=0}^N \frac{1}{\bar{c}_j} T_k(x_j) T_l(x_j) = \frac{\bar{c}_k}{2} N \delta_{k,l} \quad (2.23)$$

es valido para $0 \leq k, l \leq N$.

2.2.2. Métodos de Colocación según Chebyshev

Consideremos la aproximación de Chebyshev de la función $u(x)$ definida para $x \in [-1, 1]$

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k T_k(x). \quad (2.24)$$

calcularemos los coeficientes \hat{u}_k por medio de la técnica de colocación (o interpolación). La técnica consiste en encontrar el cero al residual $R_N = u - u_N$ en los puntos de colocación $x_j = \cos \frac{\pi j}{N}$, $j = 0, \dots, N$, sea

$$u(x_j) = u_N(x_j) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k T_k(x_j), \quad j = 0, \dots, N \quad (2.25)$$

por notación $u_j = u(x_j) = u_N(x_j)$ y usando la definición (2.9), la ecuación anterior da

$$u_j = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \cos \frac{k\pi j}{N}, \quad j = 0, \dots, N \quad (2.26)$$

La ecuación (2.25) o [(2.26)] da un sistema algebraico de $2N+1$ ecuaciones para determinar los $2N+1$ coeficientes de \hat{u}_k . La expresión para los coeficientes \hat{u}_k (es decir, la solución del sistema (2.25)) es obtenido directamente por medio la relación discreta de ortogonalidad (2.23). Pero multiplicando cada lado de (2.25) por $T_l(x_j)/\bar{c}_j$, y sumando de $j=0$ hasta $j=N$, y usando la relación (2.23), obtenemos

$$\hat{u}_k = \frac{2}{\bar{c}_k N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{\bar{c}_j} u_j T_k(x_j), \quad k = 0, \dots, N \quad (2.27)$$

o

$$\hat{u}_k = \frac{2}{\bar{c}_k N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{\bar{c}_j} u_j \cos \frac{k\pi j}{N}, \quad k = 0, \dots, N$$

Las relaciones (2.26) y (2.27) demuestran que los valores de la rejilla u_j , también como los coeficientes de \hat{u}_k , son relacionados por la serie de Fourier discreta de cosenos.

Por lo tanto, es posible usar el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (en su versión de cosenos) para conectar el espacio físico (espacio de valores de la rejilla) con el espacio espectral (espacio de coeficientes).

Matrices de Diferenciación de Chebyshev

En el contexto de los métodos de colocación los valores de la rejilla son desconocidos, es necesario expresar las derivadas en cualquier punto de colocación en términos de los valores de la función en la rejilla, que son, para la p -ésima derivada de $u_N^{(p)}$:

$$u_N^{(p)}(x_i) = \sum_{j=0}^N d_{i,j}^{(p)} u_N(x_j), \quad i = 0, \dots, N. \quad (2.28)$$

Los coeficientes $d_{i,j}^{(p)}$ pueden ser calculados de acuerdo a cualesquiera de los siguientes casos:

(i) Eliminando \hat{u}_k de la derivada

$$u_N^{(p)}(x_i) = \sum_{j=0}^N \hat{u}_k T_k^{(p)}(x_i)$$

usando la siguiente expresión

$$\hat{u}_k = \frac{2}{\bar{c}_k N} \sum_{i=0}^N \frac{1}{\bar{c}_i} u_i T_k(x_i), \quad k = 0, \dots, N.$$

Entonces, expresar $T_k(x_i)$ y la p -ésima derivada $T_k^{(p)}(x_i)$ en términos de funciones trigonométricas de acuerdo a $T_k = \cos kz$.

Finalmente, aplicando las identidades trigonométricas evaluamos las sumas.
(ii) Derivando p – veces el polinomio de interpolación

$$u_N(x) = \sum_{j=0}^N h_j u(x_j)$$

obtenemos

$$u_N^{(p)}(x) = \sum_{j=0}^N h_j^{(p)}(x_i) u_N(x_j)$$

Por lo tanto, $d_{i,j}^{(p)} = h_j^{(p)}(x_i)$, donde $h_j(x_i)$ es el polinomio de grado N , definido por

$$h_j(x) = \frac{(-1)^{j+1} (1-x^2) T'_N(x)}{\bar{c}_j N^2 (x-x_j)}$$

Así, tenemos las expresiones de los coeficientes $d_{i,j}^{(p)}$ para las dos primeras derivadas las cuales son:

Derivadas de primer orden:

$$\begin{aligned} d_{0,0}^{(1)} &= \frac{2N^2 + 1}{6}, & d_{N,N}^{(1)} &= -\frac{2N^2 + 1}{6}, \\ d_{i,i}^{(1)} &= \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, & i &= 1, \dots, N-1, \\ d_{i,j}^{(1)} &= \frac{\bar{c}_i (-1)^{i+j}}{\bar{c}_j (x_i - x_j)}, & i &\neq j, \quad i, j = 0, \dots, N, \end{aligned}$$

donde $x_i = \cos(\pi i/N)$ y además

$$\bar{c}_i = \begin{cases} 2, & i = 0 \text{ o } N. \\ 1, & \text{para } 1 \leq j \leq N-1. \end{cases}$$

Derivadas de segundo orden:

$$\begin{aligned} d_{i,j}^{(2)} &= \frac{(-1)^{i+j}}{\bar{c}_j} \frac{x_i^2 + x_i x_j - 2}{(1-x_i^2)(x_i-x_j)^2}, & 1 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq N, i \neq j \\ d_{i,i}^{(2)} &= -\frac{(N^2-1)(1-x_i^2)+3}{(1-x_i)^2}, & 1 \leq i \leq N-1 \\ d_{0,j}^{(2)} &= \frac{2(-1)^j (2N^2+1)(1-x_j)-6}{3 \bar{c}_j (1-x_j)^2}, & 1 \leq j \leq N \\ d_{N,j}^{(2)} &= \frac{2(-1)^{j+N} (2N^2+1)(1+x_j)-6}{3 \bar{c}_j (1+x_j)^2}, & 0 \leq j \leq N-1 \\ d_{0,0}^{(2)} &= d_{N,N}^{(2)} = \frac{N^4-1}{15}, \end{aligned}$$

Y también es útil recordar que

$$d_{i,j}^{(2)} = \sum_{k=0}^N d_{i,k}^{(1)} d_{k,i}^{(1)}$$

En forma vectorial, las derivadas se pueden expresar como:

$$U^{(1)} = DU, \quad U^{(2)} = D^{(2)}U$$

donde

$$U = (u_N(x_0), \dots, u_N(x_N))^T, \quad U^{(p)} = (u_N^{(p)}(x_0), \dots, u_N^{(p)}(x_N))^T,$$

con $p = 1, 2$. La matriz de diferenciación D está definida por

$$D = [d_{i,j}^{(1)}], \quad i, j = 0, \dots, N.$$

enseguida daremos algunos ejemplos de la matriz de diferenciación de primera y segunda derivada:

Para $N = 4$

$$D_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 5,5000 & -6,8284 & 2,0000 & -1,1716 & 0,5000 \\ 1,7071 & -0,7071 & -1,4142 & 0,7071 & -0,2929 \\ -0,5000 & 1,4142 & 0,0000 & -1,4142 & 0,5000 \\ 0,2929 & -0,7071 & 1,4142 & 0,7071 & -1,7071 \\ 0,5000 & 1,1716 & -2,0000 & 6,8284 & -5,5000 \end{bmatrix}$$

$$D_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 17,0000 & 28,4853 & -18,0000 & 11,5147 & -5,0000 \\ 9,2426 & -14,0000 & 6,0000 & -2,0000 & 0,7574 \\ -1,0000 & 4,0000 & -6,0000 & 4,0000 & -1,0000 \\ 0,7574 & -2,0000 & 6,0000 & -14,0000 & 9,2426 \\ -5,0000 & 11,5147 & -18,0000 & 28,4853 & 17,0000 \end{bmatrix}$$

2.3. Observaciones sobre la relación de diferencias finitas con aproximaciones espectrales.

La expresión (2.28) hace clara la relación entre diferencia finita y aproximaciones de colocación de chebyshev. En el método de diferencia finita, la aproximación de la derivada en una vecindad de los puntos de la rejilla envuelve sólo muy pocos valores de la función, mientras que la aproximación de Chebyshev envuelve todos los valores de la rejilla [4]. La fórmula de diferencia finita que aproxima a una derivada puede ser obtenido por representación de la función bajo consideraciones del polinomio de interpolación local de Lagrange de menor grado, así el polinomio cambia de un punto de discretización a otro. En el método de Chebyshev, la interpolación polinomial es la misma en todo el dominio, es decir envuelve los valores de la función en todos los puntos de colocación y, consecuentemente, la fórmula expresa la derivada, como (2.28), también envuelve todos los valores de la rejilla.

Además, las aproximaciones del método de diferencias finitas, son de naturaleza local, por el contrario la aproximación de Chebyshev y Fourier son de naturaleza global. Así, la característica global de los métodos espectrales es beneficiosa en la exactitud con respecto a diferencias finitas.

Además, las matrices asociadas con la aproximación de Chebyshev del problema diferencial son no dispersas (llenas), al contrario de las aproximaciones locales que forman matrices dispersas. Estas matrices no son simétricas ni poseen inclinación simétrica, y por lo general son mal condicionada.

A pesar de los aparentes inconvenientes (aparente porque existen remedios para remediarlos), el uso del método espectral es recomendado para soluciones suaves que requieran una alta precisión. El error asociado a la aproximación de Chebyshev (así como Fourier) es $O(1/N^m)$ donde N es el truncamiento y m es la serie de derivadas continuas de la función en cuestión. En particular, para funciones infinitamente diferenciables m es mayor que cualquier número entero y, entonces se obtiene la precisión exponencial. Tal comportamiento tiene que ser comparado con el $O(1/N^p)$ error de aproximación local, como el método de diferencia finita, donde $1/N$ es el tamaño de la malla y p , que depende del método, es esencialmente finito y generalmente pequeño [4].

Otra ventaja de la aproximación espectral es que está definida por todas partes del dominio computacional. Por lo tanto, es fácil obtener un valor preciso de la función bajo consideración en cualquier punto del dominio, al lado de los puntos de colocación. Esta propiedad es utilizada en muchas ocasiones, en particular para obtener una representación gráfica significativa de la solución, haciendo evidente las posibles oscilaciones debido a la mala aproximación de la derivada.

Por último, una propiedad adicional de los métodos espectrales es la facilidad con que se estima la exactitud de la solución calculada. Esto se hace controlando la disminución de los coeficientes espectrales. No necesitamos realizar varios cálculos para modificar la solución, como se suele hacer en diferencias finitas y métodos similares para estimar la red de convergencia.

2.3.1. Diferencias finitas versus colocación espectral

En este caso daremos un ejemplo que ilustra la diferencia principal entre diferencia finita y métodos espectrales, compararemos la diferenciación numérica de una función periódica u usando método de diferencias finitas de cuarto orden y método espectral de colocación de Fourier.

Dado $h = \frac{2\pi}{N}$ y una rejilla uniforme $\{x_0, \dots, x_N\}$ con $x_j = jh$, y un conjunto de valores físicos $\{u_0, \dots, u_N\}$ con $u_j = u(x_j)$, una aproximación a $u'(x_j)$ por diferencias finitas centradas de cuarto orden es

$$w_j = \frac{u_{j-2} - 8u_{j-1} + 8u_{j+1} - u_{j+2}}{12h} \quad (2.29)$$

para una explicación de la periodicidad tenemos $u_{-2} = u_{N-1}, u_{-1} = u_N, u_0 = u_{N+1}, u_1 = u_{N+2}$

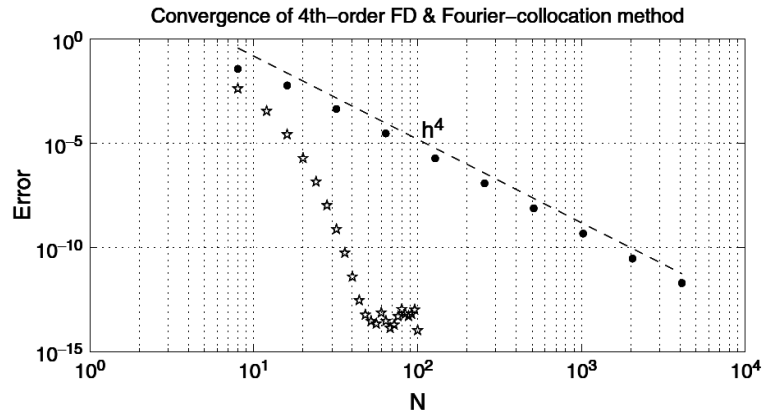


Figura 2.2: Convergencia del método de diferencia finita y de colocación. Fuente: [7] p.18.

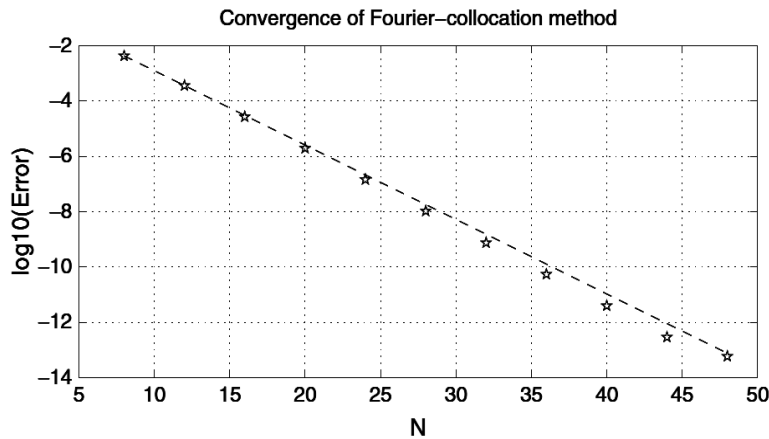


Figura 2.3: Proceso de diferenciación de la convergencia del método de colocación. Fuente: [7] p.18.

En la Fig 2.2, determinamos el error $\max_{0 \leq j \leq N-1} |u'(x_j) - w_j|$ para N . Observemos una convergencia de cuarto orden $O(h^4)$ (o $O(N^{-4})$) de diferencia finita (2.30). También observemos que los métodos de colocación convergen mucho más rápido que los métodos de diferencia finita. Tenemos una clara imagen de la convergencia de los métodos de colocación (2.33), determinados en la Fig 2.3. los errores con escala *semi-log*, el cual indica una razón de convergencia exponencial $O(e^{-cN})$ para cualquier $c > 0$.

En general el principio fundamental del métodos de colocación es de dar datos discretos en una rejilla, interpolando los datos globalmente, entonces evalúa la derivada de interpolación en las rejillas. Para problemas periódicos, normalmente se usa interpolaciones trigonométricas en puntos equidistantes, y para problemas no-periódicos, se usa polinomios interpolantes en puntos no-equidistantes.

Capítulo 3

APLICACIONES

Aquí trataremos de aplicar los capítulos anteriores para resolver el flujo de Pouseuille, como un caso particular de la ecuación de Navier-Stokes a través de la aplicación de la teoría espectral de Fourier y Chebyshev con el auxilio local de diferencias finitas.

3.1. Formulación del Flujo de Pouseuille

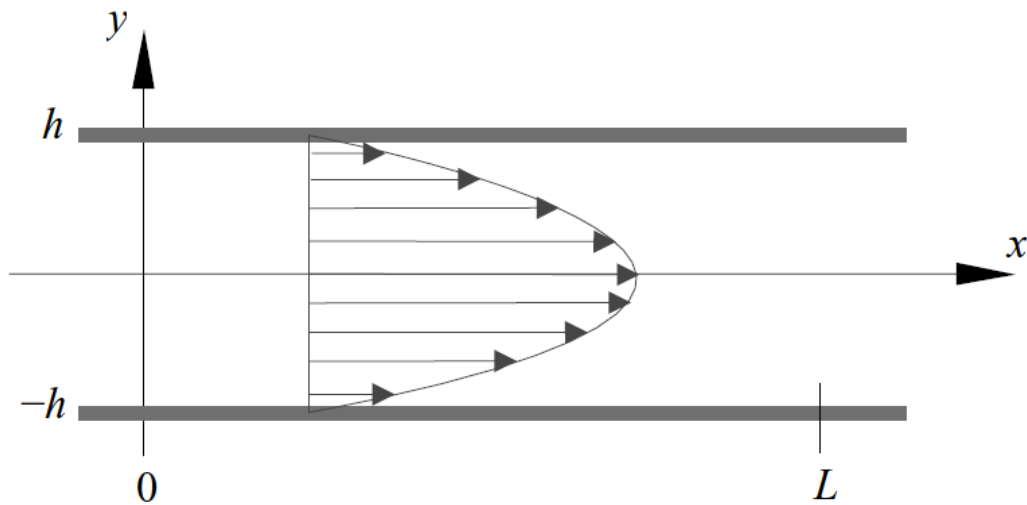


Figura 3.1: Grafica del flujo de Pouseuille. El fluido se mueve entre las placas verticales $y = \pm h$ y está considerado periódico en x de periodo L .

El problema de Pouseuille describe el flujo de un fluido viscoso incomprensible, en un canal entre dos placas paralelas infinitas. En este trabajo consideraremos el problema en dos dimensiones, como se muestra en la figura [3.1](#). Donde el fluido está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes, junto con la condición de incomprensibilidad.

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

o también expresada en coordenadas

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.1a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.1b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.1c)$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t) = (u, v)(x, y, t)$, son las componentes de la velocidad, $p = p(x, y, t)$ la presión y ρ, μ constantes de densidad y viscosidad respectivamente. Con condiciones de frontera no deslizable en las paredes del canal $y = \pm h$ y, fronteras artificiales en la dirección de la corriente x , con periodo fijo L , es decir

$$\left. \begin{aligned} u(x, \pm h, t) = v(x, \pm h, t) = 0 \\ (u, v, p')(x + L, y, t) = (u, v, p')(x, y, t) \end{aligned} \right\} x \in \mathbb{R}, \quad y \in [-h, h], t \geq 0 \quad (3.2)$$

sea $p' = p + Gx$, para $G = G(t)$ el gradiente de presión media en el canal de longitud L , en dirección de la corriente. En términos de la variación de presión, $\Delta p = p(L, y) - p(0, y)$, siendo uniforme en y , se obtiene G como

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta p}{L} &= -\frac{1}{2hL} \int_{-h}^h \Delta p dy = \frac{1}{2hL} \int_{-h}^h \int_0^L \left[-\frac{\partial p}{\partial x} \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2hL} \int_{-h}^h \int_0^L \left(G - \frac{\partial p'}{\partial x} \right) dx dy = G \end{aligned} \quad (3.3)$$

La última igualdad cumple con las condiciones de frontera de (3.2) en p' .

Solución Laminar. Para el sistema (3.1) existen soluciones independientes del tiempo conocidas como el flujo base o laminar. La deducimos aplicando $\mathbf{u} = (u_b(x, y), 0)$ para una solución de (3.1). Por (3.1c) tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u_b = u_b(y)$$

y de (3.1b)

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow p = p(x)$$

Por último de (3.1a) obtenemos

$$0 = -p'(x) + \mu u_b''(y) \Rightarrow p'(x) = \mu u_b''(y) = -G,$$

donde G es el mismo que en (3.3) y es constante, debido a una función de x puede coincidir con una función de y , solo si las dos funciones son constantes. Resolviendo esta última ecuación para $u_b(y)$ y aplicando las condiciones de frontera no deslizables, resulta un perfil parabólico de velocidades (Figura 3.1), es decir,

$$u_b(y) = U_c \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right], \quad v_b = 0, \quad \nabla p_b = (-G, 0), \quad (3.4)$$

donde $U_c = Gh^2/(2\mu)$ es la velocidad central.

Las ecuaciones adimensionales. Para valores de viscosidad μ , densidad ρ , el canal de longitud medio h y la velocidad central del flujo base U_c , con longitudes $\bar{x} = x/h$, $\bar{y} = y/h$, con velocidad $\bar{u} = u/U_c$, con tiempo $\bar{t} = U_c t/h$ y la $\bar{p} = p/(\rho U_c^2)$. Aplicando estos cambios de variable en (3.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right), \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right), \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $Re = hU_c/\nu$, es el número de Reynolds para $\nu = \mu/\rho$, la viscosidad cinemática. Las condiciones de frontera son similares a (3.2)

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(x, \pm 1, t) = \bar{v}(x, \pm 1, t) = 0 \\ (\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}') (x + L, y, t) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}') (x, y, t) \end{aligned} \right\} x \in \mathbb{R}, \quad y \in [-1, 1], \quad t \geq 0 \quad (3.6)$$

y el flujo base en forma adimensional se escribe como

$$\bar{u}_b(y) = 1 - y^2, \quad \bar{v}_b = 0, \quad \nabla \bar{p}_b = \left(-\frac{2}{Re}, 0 \right).$$

Movimientos del Observador. Justificaremos después que las condiciones periódicas en las fronteras artificiales en dirección de la corriente x , producen una gran simplificación en la estructura del flujo: si el observador se mueve a una adecuada velocidad c en dirección de la corriente. Por lo tanto el sistema (3.5) haciendo un cambio de variable $\tilde{x} = x - ct$, y de esta manera se define la velocidad transformada (6)

$$\tilde{u}(\tilde{x}, y, t) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{u}(\tilde{x} + ct, y, t)$$

se obtiene las siguientes relaciones entre las derivadas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\tilde{x}, y, t) &= c \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(\tilde{x} + ct, y, t) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(\tilde{x} + ct, y, t), \\ \frac{\partial^k \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^k}(\tilde{x}, y, t) &= \frac{\partial^k \bar{u}}{\partial x^k}(\tilde{x} + ct, y, t), \quad \frac{\partial^k \tilde{u}}{\partial y^k}(\tilde{x}, y, t) = \frac{\partial^k \bar{u}}{\partial y^k}(\tilde{x} + ct, y, t), \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Fórmulas análogas tenemos para \tilde{v} y \tilde{p} . Sustituyendo estas derivadas en (3.5) se convierte en

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (\tilde{u} - c) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + (\tilde{u} - c) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

junto con las condiciones de frontera de (3.6) en términos de la nueva variable \tilde{x} . Se retorna a (3.5) simplemente poniendo $c = 0$ en (3.7).

3.1.1. Diferentes condiciones del flujo: Gradiente de presión constante o flujo constante.

Como hemos visto en (3.4), para determinado μ, ρ y L , al variar U_c , tenemos una familia de flujos laminares, soluciones de (3.1a) - (3.2), donde $G = 2\mu U_c/h^2$. Evitamos esta falta de unicidad en el flujo base mediante la fijación de cantidades habituales del fluido, tal como el flujo total Q o el gradiente de presión media G a través del canal. Para cada elección probaremos que existe solo un valor U_c que define el flujo base.

Dado el perfil de velocidades $\mathbf{u} = (u, v)$ para el flujo de Pouseuille, el flujo Q a través del canal, se obtiene por

$$Q = \int_{-h}^h u(x, y) dy$$

Debido a la condición de incomprensibilidad (3.1c), Q no depende de x , para

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \int_{-h}^h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy = - \int_{-h}^h \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) dy = v(x, -h) - v(x, h)$$

El último paso es consecuencia de las condiciones de frontera no deslizables (3.2). De este modo, para $\alpha = \frac{2\pi}{L}$ expandimos $u(x, y)$ como

$$u(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k(y) e^{ik\alpha x} \Rightarrow Q = \int_{-h}^h \hat{u}_0(y) dy \quad (3.8)$$

Por otro lado podemos calcular el gradiente de presión media G sobre el canal por:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2hL} \int_0^L \int_{-h}^h \left[-\frac{\partial p}{\partial x} \right] dy dx \\ &\stackrel{1}{=} \frac{1}{2hL} \int_0^L \int_{-h}^h \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dy dx \\ &= \frac{1}{2hL} \left\{ \rho \int_0^L \int_{-h}^h \frac{\partial u}{\partial t} dy dx + \rho \int_0^L \int_{-h}^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy dx + \rho \int_0^L \int_{-h}^h v \frac{\partial u}{\partial y} dy dx \right. \\ &\quad \left. - \mu \int_0^L \int_{-h}^h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dy dx - \mu \int_0^L \int_{-h}^h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy dx \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\mathbf{2}}{=} \frac{1}{2hL} \left\{ \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \int_{-h}^h u dy dx + \rho \int_{-h}^h \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^L dy + \rho \int_0^L \int_{-h}^h u \frac{\partial v}{\partial y} dy dx \right. \\
&\quad \left. - \mu \int_{-h}^h \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_0^L dy - \mu \int_0^L \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{-h}^h dx \right\} \quad (3.9) \\
&\stackrel{\mathbf{3}}{=} \frac{1}{2hL} \left\{ \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L Q dx + \rho \int_0^L \int_{-h}^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy dx - u \int_0^L \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{-h}^h dx \right\} \\
&\stackrel{\mathbf{4}}{=} \frac{\rho}{2h} \int_{-h}^h \frac{\partial u_0}{\partial t} dy - \frac{\mu}{2h} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} \right]_{-h}^h.
\end{aligned}$$

Paso 1: Por sustitución de acuerdo con la ecuación de momento (3.1a).

Paso 2: Derivando bajo el signo de la integral, la integración, integrando por partes en cada término, teniendo en cuenta las condiciones de frontera (3.2).

Paso 3: Debido a las condiciones de incomprensibilidad (3.1c).

Paso 4: Usando la expansión de Fourier en x , para u .

Supongamos ahora que el flujo constante Q_0 se aplica a través del canal para el flujo laminar u_b , el flujo total es:

$$Q = \int_{-h}^h u_b(y) dy = \int_{-h}^h U_c \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] dy = \frac{4}{3} h U_c.$$

con el fin de obtener el flujo Q_0 fijamos $U_c = \frac{3Q_0}{4h}$. De acuerdo con (3.9) se deriva el gradiente de presión media G para el flujo base como:

$$G = -\frac{\mu}{2h} [u'_b]_{-h}^h = \frac{3\mu Q_0}{2h^3}.$$

Finalmente calculamos Re_Q , el número de Reynolds.

$$Re_Q = hU_c/\nu = \frac{3Q_0}{4\nu}.$$

Análogamente si aplicamos el gradiente de presión media constante G_0 , encontramos la velocidad central para el flujo base $U_c = G_0 h^2 / (2\mu)$ y el flujo $Q = 2h^3 G_0 / (3\mu)$. Ahora, para el número de Reynolds Re_p tenemos

$$Re_p = \frac{hU_c}{\nu} = \frac{G_0 h^3 \rho}{2\mu^2}.$$

Para el flujo laminar dado, es decir, si fijamos U_c , entonces ambas definiciones del número de Reynolds coincide con $Re = hU_c/\nu$. Ese no es el caso para flujos secundarios, definidos como aquellos para los que el flujo y el gradiente de presión media a través del canal se mantienen constantes. Consideraremos el caso del flujo constante Q y el flujo laminar asociado a $u_b^Q = U_Q (1 - y^2/h^2)$ con $U_Q = 3Q/(4h)$.

Supongamos que u^Q es flujo secundario dada por (dejemos de lado por el momento la dependencia del tiempo)

$$u^Q(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_k^Q(y) e^{ik\alpha x}$$

que tiene un flujo constante Q y un gradiente de presión media

$$G_Q = -\frac{\mu}{2h} \left[\frac{\partial \widehat{u}_0^Q}{\partial y} \right]_{-h}^h.$$

En vista de (3.9). Tomando el flujo laminar que alcanza G_Q como su gradiente de presión media, la velocidad central U_p tiene la expresión

$$U_p = \frac{G_Q h^2}{2\mu} = -\frac{h}{4} \left[\frac{\partial \widehat{u}_0^Q}{\partial y} \right]_{-h}^h.$$

Escribir esta última expresión en forma adimensional, se tiene

$$\frac{Re_p}{Re_Q} = \frac{U_p}{U_Q} = -\frac{h}{4U_Q} \left[\frac{\partial \widehat{u}_0^Q}{\partial y} \right]_{-h}^h = -\frac{1}{4} \left[\frac{\partial \widehat{u}_0^Q}{\partial y} \right]_{-1}^1,$$

siendo \widehat{u}_0^Q , una magnitud adimensional, por lo que la relación entre los dos números de Reynolds se puede establecer como:

$$Re_p = -\frac{Re_Q}{4} d, \quad d = \left[\frac{\partial \widehat{u}_0^Q}{\partial y} \right]_{-1}^1. \quad (3.10)$$

Observemos que si tenemos $\widehat{u}_0^Q = 1 - y^2$ en (3.10) obtenemos $Re_p = Re_Q$ y por lo tanto ambas definiciones del número de Reynolds coinciden para flujos laminares como se menciono anteriormente.

Por el contrario si u_p es un flujo secundario que fija G sobre el canal, vamos a considerar el flujo constante

$$Q_p = \int_{-h}^h u^p(x, y) dy.$$

El flujo laminar asociado a este fluido alcanza una velocidad central $U_Q = 3Q_p / (4h)$, y similarmente deja a U_p que sea la velocidad central para el flujo laminar que preserva G , la relacion entre U_Q y U_p da la razón de los números de Reynolds como

$$\frac{Re_p}{Re_Q} = \frac{U_Q}{U_p} = \frac{3Q_p}{4hU_p} = \frac{3}{4} \int_{-h}^h \frac{u^p(x, y) dy}{U_p h} = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \bar{u}^p(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \quad (3.11)$$

En la última integral se a cambiado el integrando en su forma adimensional. De esta manera (3.11) establece la relación entre Re_p y Re_Q como proporcional al flujo del fluido adimensional $\bar{u}^p(\bar{x}, \bar{y})$.

Debido a que las velocidades centrales U_p y U_Q para flujos bases asociados a los flujos secundarios son diferentes, cada uno de ellos da lugar a un aumento del mismo flujo. En términos de las variables dimensionales un flujo secundario es igualmente expresado desde ambos puntos de vista. En efecto, si el mismo flujo $u(x, y) = u^p(x, y) = u^Q(x, y)$ es adimensional usando dos velocidades centrales diferentes U_Q , U_p , entonces tenemos.

$$\frac{u^p(x, y)}{U_p} = \frac{U_Q u^Q(x, y)}{U_p U_Q} \iff \bar{u}^p(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{Re_Q}{Re_p} \bar{u}^Q(\bar{x}, \bar{y}) \quad (3.12)$$

siendo $\bar{u}^Q(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{u}^p(\bar{x}, \bar{y})$ las velocidades adimensionales de U_Q y U_p respectivamente.

Por lo tanto, si $\bar{u}^Q(\bar{x}, \bar{y})$ representa un flujo secundario adimensional para Re_Q , entonces $\bar{u}^p(\bar{x}, \bar{y}) = Re_Q/Re_p \bar{u}^Q(\bar{x}, \bar{y})$ es también un flujo secundario para Re_p y la relación entre Re_Q y Re_p está dada en (3.10) o (3.11). Las diferentes posibilidades para Q y G en ambos casos son representados en la **tabla 1**. Siguiendo el mismo procedimiento encontramos la relación entre las presiones $p(x, y) = p^p(x, y) = p^Q(x, y)$ en coordenadas dimensionales, y queda así

$$\frac{p^p(x, y)}{\rho U_p^2} = \frac{U_Q^2 p^Q(x, y)}{U_p^2 \rho U_Q^2} \iff \bar{p}^p(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{Re_Q^2}{Re_p^2} \bar{p}^Q(\bar{x}, \bar{y}) \quad (3.13)$$

Aplicar	Q	G
flujo	$\frac{4}{3}$	$\frac{-d}{2Re_Q}$
presión	$\frac{-16}{3d}$	$\frac{-8}{dRe_Q}$

Tabla1: Expresiones de Q y G para flujos secundarios adimensionales en los casos en que el flujo total o la gradiente de presión media se mantiene constante. En esta fórmula d y la relación entre Re_Q y Re_p está dada en (3.10).

3.2. Implementación Numérica

3.2.1. Aproximación Numérica: elección del método.

Siguiendo las ideas de [6] pasaremos a definir la aproximación numérica con respecto al flujo de Pouseuille.

La elección del método numérico es siempre una tarea difícil. En nuestro caso, la parte principal del trabajo esta fuertemente apoyado por la aproximación numérica del sistema (3.7) y las condiciones de frontera (3.6): esto nos da una idea de suma importancia. Para la discretización espacial del canal utilizaremos **métodos espectrales** y para la discretización temporal utilizamos **diferencias finitas**.

Los métodos espectrales hacen uso de una representación global de funciones, en lo general por polinomios de orden superior o series de Fourier, en contraste con diferencias finitas en el que su representación es local. Con un método espectral bien diseñado, si la solución aproximada es infinitamente diferenciable, los errores

tienden a cero más rápido que cualquier potencia negativa del número de términos retenidos. En su lugar, las diferencias finitas sólo producen tasas de convergencia de orden finito y así la solución espacial debe incrementarse a fin de obtener una precisión comparable a métodos espectrales. Además, los métodos espectrales poseen una gran solución en la capa límite cerca de las paredes del canal en nuestra situación.

Una de las principales dificultades de los métodos espectrales son dominios irregulares, pero no es el caso para el canal del flujo, la posibilidad de usar la transformada rápida de Fourier han hecho métodos espectrales adecuados para problemas de fluidos donde la alta precisión es importante para simular soluciones complicadas. Discretizaciones típicas emplean series de Fourier para condiciones de frontera periódicas, como en la dirección del fluido en nuestro modelo, y polinomios de Chebyshev para condiciones de frontera rígidas, como en las paredes del canal en nuestro caso. Para ambas aproximaciones la posibilidad de aplicar la transformada rápida de Fourier supone una gran mejora en los cálculos [4].

Enseguida vamos a escribir el procedimiento numérico. Siguiendo la evolución temporal del flujo inicial sometido a la condición de incomprensibilidad, $\nabla \mathbf{u} = 0$, y las condiciones de frontera (3.6). Para ello usaremos métodos espectrales para las velocidades aproximadas u, v y la desviación de presión p' , que apartir de ahora consideraremos magnitudes adimensionales. Recordemos de (3.3) que $p = p' - Gx$ y de (3.9) y la tabla 1.

$$G = -\frac{1}{2Re_Q} \left[\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial y} \right]_{-1}^1 \quad \text{o} \quad G = \frac{2}{Re_p},$$

respectivamente, para el flujo constante o casos de presión, por lo que en el primer caso el gradiente de presión varia con el tiempo y es constante para la segunda. La aproximación elegida para la variable periódica x se basa en los métodos de Galerkin y series de Fourier

Método de Galerkin: Dado que u, v, p' son periódicos en x , reemplazamos por su serie de Fourier truncada para $N \in \mathbb{Z}^+$:

$$(u, v, p') (x, y, t) = \sum_{k=-N}^N (\hat{u}_k, \hat{v}_k, \hat{p}_k) (y, t) e^{ik\alpha x} \quad (3.14)$$

para $x \in \mathbb{R}$, y $y \in [-1, 1]$ y $t \geq 0$. Esta serie finita sustituido en el sistema (3.7) elimina derivadas de x y da lugar a un sistema de EDP en variables de y y t para los coeficientes de Fourier $\hat{u}_k, \hat{v}_k, \hat{p}_k$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial t} + \left[(u-c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_k &= -ik\alpha \hat{p}_k + \frac{1}{Re} \left(-k^2 \alpha^2 \hat{u}_k + \frac{\partial^2 \hat{u}_k}{\partial y^2} \right) + \delta_{k0} G \\ \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial t} + \left[(u-c) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right]_k &= -\frac{\partial \hat{p}_k}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(-k^2 \alpha^2 \hat{v}_k + \frac{\partial^2 \hat{v}_k}{\partial y^2} \right) \\ 0 &= ik\alpha \hat{u}_k + \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde $-N \leq k \leq N$, $[\cdot]_k$ representa el coeficiente de Fourier de m -ésimo orden de $[\cdot]$, $\delta_{00} = 1$ y $\delta_{k0} = 0$, para $k \neq 0$. Esto constituye el método espectral de Galerkin-Fourier, un proceso que es visto como la proyección ortogonal por medio del producto

escalar en $L^2 [0, L]$, sobre el espacio generado por $\exp(ik\alpha x)$ para $k = -N, \dots, N$. El objetivo del proyecto consiste en obtener el residual en la sustitución de la serie truncada definida previamente en el sistema (3.7).

Como u es una función real, se deduce que $\hat{u}_k = \hat{u}_{-k}$ y similar para v y p' . Por lo tanto, podemos escribir (3.15) para términos negativos $k = -N, \dots, -1$, y en cuanto a los términos no negativos $k = 0, \dots, N$, y sus conjugados. Es suficiente entonces considerar los modos en $\hat{u}_k, \hat{v}_k, \hat{p}_k$ y ecuaciones en (3.15) para $k = 0, \dots, N$. Para las condiciones de frontera no deslizables en (3.6) resulta [6]

$$0 = u(x, \pm 1, t) = \sum_{k=-N}^N \hat{u}_k(\pm 1, t) e^{ik\alpha x}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y aplicando lo mismo a v , obtenemos

$$(\hat{u}_k, \hat{v}_k)(\pm 1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad k = 0, \dots, N. \quad (3.16)$$

Métodos de Colocación: Para eliminar las derivadas de la variable transversal y , empleamos el método de colocación, en el cada ecuación se aplica en puntos seleccionados (colocación): elegimos las abscisas de Chebyshev debido a las buenas propiedades de convergencia y la posibilidad de utilizar la transformada rápida de Fourier como se menciono anteriormente.

Expresemos los coeficientes de Fourier $\hat{u}_k, \hat{v}_k, \hat{p}_k$, para $k = 0, \dots, N$, como una serie truncada de Chebyshev

$$\hat{u}_k(y, t) = \sum_{j=0}^M \tilde{u}_{kj}(t) T_j(y), \quad \hat{v}_k(y, t) = \sum_{j=0}^M \tilde{v}_{kj}(t) T_j(y), \quad \hat{p}_k(y, t) = \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{p}_{kj}(t) T_j(y),$$

siendo $T_j(y) = \cos(j \arccos(y))$ para $j = 0, \dots, M$, los polinomios de Chebyshev, $M \in \mathbb{Z}^+$. En contraste con el método de Galerkin, en este caso interpolamos la serie truncada en puntos de colocación seleccionados. En nuestro caso necesitamos dos conjuntos diferentes de puntos de colocación.

$$\begin{aligned} y_m &= \cos(\pi m/M), \quad m = 0, \dots, M, \\ \bar{y}_m &= \cos(\pi(m+1/2)/M), \quad m = 0, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

y definimos las incógnitas discretas del sistema, como

$$\begin{aligned} \hat{u}_{km}(t) &= \hat{u}_k(y_m, t), \quad \hat{v}_{km}(t) = \hat{v}_k(y_m, t), \quad m = 0, \dots, M \\ \hat{p}_{km}(t) &= \hat{p}_k(\bar{y}_m, t), \quad m = 0, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para obtener un sistema ecuaciones diferenciales ordinarias en t , ecuaciones de momento en (3.15) se aplica en la primera rejilla, y_m , mientras que en el segundo, \bar{y}_m , se da por la ecuación de continuidad. Si usamos los mismos puntos de colocación para la presión, p_k y la ecuación de continuidad para la velocidad, \hat{u}_k, \hat{v}_k y ecuaciones de momento, entonces podemos obtener un sistema lineal indeterminado para las variables dependientes discretas $\hat{u}_{km}, \hat{v}_{km}, \hat{p}_{km}$. La razón de esto es que el término del gradiente de presión $\tilde{p}_{0M}(t) T_M(y)$ se anula en los puntos $y_m, m = 1, \dots, M-1$

y así \tilde{p}_{0M} no tiene ningún efecto sobre la velocidad en las ecuaciones del momento. En efecto

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tilde{p}_{0M}(t) T_M(y)) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{p}_{0M}(t) T_M(y)) = \tilde{p}_{0M}(t) T'_M(y)$$

pero apartir de $T_M(y) = \cos(M \arccos(y))$ obtenemos

$$T'_M(y) = \frac{M \operatorname{sen}(M \arccos(y))}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow T'_M(y_m) = 0, \text{ para } m = 1, \dots, M-1$$

también existe otro término falso, $\tilde{p}_{00}(t) T_0(y)$, que esta relacionado con el valor medio de la presión y el que será revisado en la subsección 3.3.4. Las condiciones de frontera (3.16) se aplica con facilidad, como para $k = 0, \dots, N$

$$\begin{aligned} (\hat{u}_k, \hat{v}_k)(\pm 1, t) &= 0 \iff (\hat{u}_k, \hat{v}_k)(y_0, t) = (\hat{u}_k, \hat{v}_k)(y_M, t) = 0 \\ &\iff \hat{u}_{k0}(t) = \hat{u}_{kM}(t) = \hat{v}_{k0}(t) = \hat{v}_{kM}(t) = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

y así en la primera rejilla y_m , solo consideramos $m = 1, \dots, M-1$ en (3.15) para ecuaciones de momento e incógnitas $\hat{u}_{km}, \hat{v}_{km}$. La evolución de (3.15) en las respectivas rejillas y_m, \bar{y}_m da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas en t con $(2N+1)(3M-2)$ ecuaciones reales e incógnitas.

3.2.2. Evaluación de los términos lineales

Analizamos la evaluación de los términos lineales en (3.15) por medio de la transformada de cosenos que se describe a continuación.

En concreto nos referimos a los siguientes términos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{u}_k}{\partial y^2}(y_m); \quad \frac{\partial^2 \hat{v}_k}{\partial y^2}(y_m); \quad \hat{p}_k(y_m), \quad \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial y}(y_m), \text{ en la primera rejilla} \\ \hat{u}_k(\bar{y}_m); \quad \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial y}(\bar{y}_m), \text{ en la segunda rejilla.} \end{aligned}$$

Supongamos que los valores de las incógnitas discretas definidas en (3.18), son dadas. El esquema del proceso consiste en la construcción de los polinomios de interpolación de Chebyshev en los valores dados de las incógnitas sobre su propia red, el cálculo de las derivadas analíticas para este polinomio es necesario, y finalmente la evolución del polinomio resultante en la rejilla apropiada. Vamos a detallar estos pasos.

Interpolación en la primera rejilla: Dado los valores w_0, \dots, w_M en los puntos y_0, \dots, y_M en la primera rejilla, entonces el polinomio de interpolación de Chebyshev $w(y)$ tal que $w(y_m) = w_m$, para $m = 0, \dots, M$ es calculado por:

$$w(y) = \sum_{j=0}^M \tilde{w}_j T_j(y), \quad \tilde{w}_j = \frac{2}{M \bar{c}_j} \sum_{m=0}^M \frac{w_m}{\bar{c}_m} \cos \frac{\pi j m}{M},$$

y $\bar{c}_0 = \bar{c}_M = 2, \bar{c}_j = 1$ si $j \neq 0, M$. Por otro lado, de $\tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_M$ tenemos que $w_m = w(y_m)$,

$$w_m = \sum_{j=0}^M \tilde{w}_j T_j(y) = \sum_{j=0}^M \tilde{w}_j \cos \frac{\pi j m}{M}.$$

Así estas dos transformaciones lineales se pueden abreviar como

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= C_1 w, & (C_1)_{jm} &= \frac{2}{M \bar{c}_j \bar{c}_m} \cos \frac{\pi j m}{M}, \\ w &= C_1^{-1} \tilde{w}, & (C_1^{-1})_{jm} &= \cos \frac{\pi j m}{M}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

siendo $w = (w_0, \dots, w_M)^t$ y $\tilde{w} = (\tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_M)^t$. En realidad solo necesitamos considerar $w = (w_1, \dots, w_{M-1})^t$ debido a (3.19). Por lo tanto C_1 y C_1^{-1} son considerados matrices de dimensiones $(M+1) \times (M+1)$ y $(M+1) \times (M+1)$ respectivamente.

Interpolación en la segunda rejilla: Similarmente, interpolando w_0, \dots, w_{M-1} en los puntos $\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_{M-1}$ de la segunda rejilla, la interpolación de los polinomios de Chebyshev $w(y)$ tal que $w(\bar{y}_m) = w_m$ para $m = 0, \dots, M-1$ satisface

$$w(y) = \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{w}_j T_j(y), \quad \tilde{w}_j = \frac{2}{M c_j} \sum_{m=0}^{M-1} w_m \cos \frac{\pi j (2m+1)}{2M},$$

y $c_0 = 2, c_j = 1$ si $j \neq 0$. Para la transformada inversa obtenemos:

$$w_m = \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{w}_j T_j(y) = \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{w}_j \cos \frac{\pi j (2m+1)}{2M}.$$

abreviando las transformadas lineales tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= C_2 w, & (C_2)_{jm} &= \frac{2}{M c_j} \cos \frac{\pi j (2m+1)}{2M}, \\ w &= C_2^{-1} \tilde{w}, & (C_2^{-1})_{jm} &= \cos \frac{\pi j (2m+1)}{2M}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

siendo $w = (w_0, \dots, w_{M-1})^t$ y $\tilde{w} = (\tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_{M-1})^t$. Las dimensiones de las matrices C_2 y C_2^{-1} es $M \times M$.

Derivada de los polinomios de Chebyshev: El último paso en el cálculo de los términos lineales implica la evaluación de las derivadas.

Proposición 3.1 *Supongamos que $w(y), w'(y), w''(y)$ son expandidos en series de Chebyshev.*

$$w(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{w}_j T_j(y), \quad w'(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{w}'_j T_j(y), \quad w''(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{w}''_j T_j(y),$$

Entonces, para $j \geq 0$, las relaciones entre los coeficientes están dadas por la recurrencia

$$\begin{aligned} c_j \tilde{w}'_j &= \tilde{w}'_{j+2} + 2(j+1) \tilde{w}'_{j+1}, \\ c_j \tilde{w}''_j &= \tilde{w}''_{j+2} + 2(j+1) \tilde{w}''_{j+1}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

y también para las fórmulas:

$$c_j \tilde{w}'_j = \sum_{\substack{m=j+1 \\ m+j \text{ impar}}}^{\infty} 2m \tilde{w}_m, \quad c_j \tilde{w}''_j = \sum_{\substack{m=j+2 \\ m+j \text{ par}}}^{\infty} m(m^2 - j^2) \tilde{w}_m$$

De la proposición, $w(y)$ se representa como una serie finita, y de sus primeras y segundas derivadas obtenemos la matriz de diferenciación

$$\begin{aligned} \tilde{w}' &= D_y \tilde{w}, & (D_y)_{jm} &= \begin{cases} 2m, & \text{si } m > j \text{ y } m+j \text{ impar} \\ 0, & \text{si } m \leq j \text{ o } m+j \text{ par} \end{cases} \\ \tilde{w}'' &= D_y^2 \tilde{w}, & (D_y^2)_{jm} &= \begin{cases} m(m^2 - j^2), & \text{si } m > j+1 \text{ y } m+j \text{ par} \\ 0, & \text{si } m \leq j+1 \text{ o } m+j \text{ par} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

siendo $\tilde{w} = (\tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_M)^t$, $\tilde{w}' = (\tilde{w}'_0, \dots, \tilde{w}'_{M-1}, 0)^t$ y $\tilde{w}'' = (\tilde{w}''_0, \dots, \tilde{w}''_{M-2}, 0, 0)^t$. Así D_y y D_y^2 son matrices de dimensión $(M+1) \times (M+1)$.

Juntando las operaciones matriciales (3.20), (3.21) y (3.23) y colocando $\hat{\bullet}$ a $[\bullet]_k$, \hat{u}_k , \hat{v}_k , \hat{p}_k por conveniencia, para $k = 0, \dots, N$ podemos escribir el sistema (3.15) como

$$\dot{u}_k = - \left[(u-c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_k - D_{xk} C_1^{-1} C_2 p_k + \frac{1}{Re} (D_{xk}^2 + C_1^{-1} D_y^2 C_1) u_k + \delta_{k0} G \quad (3.24a)$$

$$\dot{v}_k = - \left[(u-c) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right]_k - C_1^{-1} D_y C_2 p_k + \frac{1}{Re} (D_{xk}^2 + C_1^{-1} D_y^2 C_1) v_k \quad (3.24b)$$

$$0 = D_{xk} C_2^{-1} C_1 u_k + C_2^{-1} D_y C_1 v_k, \quad (3.24c)$$

para $u_k = (u_{k1}, \dots, u_{kM-1})$, $v_k = (v_{k1}, \dots, v_{kM-1})$, $p_k = (p_{k0}, \dots, p_{kM-1})$. La matriz D_{xk} está definido como $D_{xk} w_k = ik \alpha w_k$. La dimensión de las matrices se ajusta de acuerdo a cada caso en particular. Por ejemplo, en el término $D_{xk} C_2^{-1} C_1 u_k$, las matrices D_{xk} , C_2^{-1} y C_1 tienen dimensiones $M \times M$, $M \times (M+1)$ y $(M+1) \times (M-1)$ respectivamente. Observemos que no utilizamos la transformada rápida de Fourier para términos lineales, debido a que las matrices correspondientes son constantes en cada intervalo de tiempo como veremos a continuación.

3.2.3. Evaluación de los términos no lineales

Una de las principales dificultades en aplicar el método espectral de Galerkin es la evaluación de los términos no lineales. En este punto nos muestran algunas complejidades actuales en la aplicación del método. Elegimos el método de Galerkin-Fourier en x y colocación de Chebyshev en y , la diferencia entre Galerkin-Fourier y Chebyshev es debido a que los términos no-lineales son más incómodos y caros para evaluar en este último caso. (vease [6])

Vamos a describir como evaluar sumas de convolución. Consideremos dos series de Fourier truncadas

$$u(x) = \sum_{m=-N}^N \hat{u}_m e^{im\alpha x}, \quad v(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{v}_n e^{in\alpha x}, \quad (3.25)$$

que se extiende hasta el orden $P > N$ por definición $\hat{u}_k = \hat{v}_k = 0$, para $N < |k| \leq P$, y queremos calcular $w(x) = u(x)v(x)$, el producto de series truncadas de orden N

$$w(x) = \sum_{k=-N}^N \hat{w}_k e^{ik\alpha x}, \quad \hat{w}_k = \sum_{\substack{m+n=k \\ |m|, |n| \leq P}} \hat{u}_m \hat{v}_n, \quad (3.26)$$

donde \hat{w}_k se obtiene del producto de series en (3.25) y términos de agrupación. Este método directo para evaluar las sumas de convolución requiere $O(N^2)$ de operaciones. Consideremos el polinomio de interpolación trigonométrico $w(x)$ en los puntos $\bar{x}_j = jL/(2P+1)$, para $j = 0, \dots, 2P$, para aproximar \hat{w}_k por \tilde{w}_k , como para $|k| \leq N$,

$$\begin{aligned} \tilde{w}_k &= \frac{1}{2P+1} \sum_{j=0}^{2P} w_j e^{-ik\alpha \bar{x}_j} = \frac{1}{2P+1} \sum_{j=0}^{2P} u_j v_j e^{-ik\alpha \bar{x}_j} \\ &= \frac{1}{2P+1} \sum_{j=0}^{2P} \left(\sum_{m=-P}^P \hat{u}_m e^{im\alpha \bar{x}_j} \sum_{n=-P}^P \hat{v}_n e^{in\alpha \bar{x}_j} \right) e^{-ik\alpha \bar{x}_j} \\ &= \frac{1}{2P+1} \sum_{m=-P}^P \sum_{n=-P}^P \hat{u}_m \hat{v}_n \sum_{j=0}^{2P} e^{i(m+n-k)\alpha \bar{x}_j} \\ &= \sum_{\substack{m+n=k \\ |m|, |n| \leq P}} \hat{u}_m \hat{v}_n + \sum_{\substack{m+n=k \pm (2P+1) \\ |m|, |n| \leq P}} \hat{u}_m \hat{v}_n \end{aligned} \quad (3.27)$$

Es claro que las fórmulas del segundo método, para calcular sumas de convolución no es exacto. El término de discrepancia de \hat{w}_k en (3.26) es llamado el error de Aliasing. Aquí nuestro objetivo es encontrar una condición para P , con el fin de anular el error de Aliasing. Usando la propiedad $\hat{u}_m = \hat{v}_n = 0$, para $N < |m|, |n| \leq P$, elegir P tal que, para $k \leq N$

$$m+n = k \pm (2P+1) \Rightarrow |m| > N \text{ o } |n| > N \Rightarrow \hat{u}_m \hat{v}_n = 0$$

y de esta manera garantizado que se anula el error de Aliasing. Para $|m|, |n| \leq N$ implica que $|m+n| \leq 2N$, y la condición para P es

$$k \pm (2P+1) > 2N \text{ o } k \pm (2P+1) < -2N, \text{ para } |k| \leq N$$

así los casos para k son

$$-N \pm (2P+1) > 2N \text{ o } N \pm (2P+1) < -2N$$

ambas posibilidades llevan a elegir P tal que

$$2P+1 > 3N \Leftrightarrow P \geq \frac{3}{2}N$$

para $P = 3N/2$, con la ayuda de la transformada rápida de Fourier, la operación considera este procedimiento para evaluar sumas de convolución de $O(N \log_2 N)$, sustancialmente mejor que $O(N^2)$ para (3.26).

Algoritmo para calcular términos no lineales: Apartir del método descrito anteriormente para calcular sumas de convolución, vamos a precisar los pasos para evaluar en términos no lineales (3.15), es decir,

$$\left[(u - c) \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_k, \quad \left[(u - c) \widehat{\frac{\partial v}{\partial x}} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right]_k \quad (3.28)$$

Partimos de los valores armónicos de Fourier \widehat{u}_k y \widehat{v}_k en y_m definido en (3.17)-(3.18).

1. Evaluar $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$ por medio de las transformaciones lineales $D_{xk}\widehat{u}_k = ik\alpha\widehat{u}_k$, $D_{xk}\widehat{v}_k = ik\alpha\widehat{v}_k$ para $k = 0, \dots, N$.
2. Evaluar $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$. Tomamos la transformada C_1 en (3.20) por medio de la transformada rápida de coseno, entonces el algoritmo (3.22) para evaluar y -derivadas y finalmente otra transformada rápida de cosenos para ejecutar C_1^{-1} .
3. Llenando con ceros los armónicos de u , v , $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ de orden $N + 1$ hasta $P \geq 3N/2$, en cada y_m para $m = 1, \dots, M - 1$.
4. Usando la transformada inversa rápida de Fourier para transformar \widehat{u}_k , \widehat{v}_k , $\partial\widehat{u}_k/\partial x$, $\partial\widehat{u}_k/\partial y$, $\partial\widehat{v}_k/\partial x$ y $\partial\widehat{v}_k/\partial y$ de vuelta al espacio físico, a fin de obtener u , v , $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ en (\bar{x}_j, y_m) para $j = 0, \dots, 2P$, $m = 1, \dots, M - 1$.
5. En los puntos (\bar{x}_j, y_m) para $j = 0, \dots, 2P$, $m = 1, \dots, M - 1$, calcular

$$(u - c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (u - c) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$$

6. Tomemos las transformadas rápidas de Fourier de los valores del último paso en cada y_m para $m = 1, \dots, M - 1$, para volver al espacio de Fourier y así obtener finalmente $k = 0, \dots, N$ los armónicos deseados (3.28).

Observemos que todas las transformadas de Fourier son empleadas en este algoritmo, incluso para evaluar transformadas de coseno, son de tipo complejo a reales o viceversa, costo que aproximadamente es una media de un complejo para transformadas de Fourier compleja.

3.2.4. Ecuaciones Reducidas. Evolución Temporal

Hasta ahora para el sistema (3.7), hemos discretizado derivadas espaciales para obtener el sistema (3.24), en el que sólo permanecen derivadas temporales en (3.24a) y (3.24b), junto con la ecuación algebraica (3.24c) correspondiente a la condición de divergencia. Por lo tanto (3.24) es un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas. Para simplificar el estudio de las dinámicas de (3.24), la convertimos en sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a través de varias manipulaciones algebraicas. De aquí, la estabilidad de las soluciones de equilibrio será determinados por los autovalores de la parte lineal del sistema. De paso reducirá la dimensión del sistema

(3.24) de $(2N + 1)(3M - 2)$ a $(2N + 1)(M - 2) + 1$ en las ecuaciones finales, es decir, más o menos un tercio de la dimensión original. En esta subsección estudiaremos este hecho para el caso del gradiente de presión constante. En la subsección 3.3.5 se abordara el caso del flujo constante. (vease [6])

Ecuaciones Reducidas: Nuestro objetivo es eliminar v y p en (3.24). Iniciamos con vectores de valor complejo $u_k = (u_{k1}, \dots, u_{kM-1})^t$, $v_k = (v_{k1}, \dots, v_{kM-1})^t$ y $p_k = (p_{k0}, \dots, p_{kM-1})^t$ para $k = 0, \dots, N$, correspondiente a los coeficientes de Fourier de u, v y p' tal como se define en (3.18). En particular u_0, v_0 y p_0 son vectores reales y el resto complejos. Asimismo definimos $\bar{u}_k = (u_{k1}, \dots, u_{kM-2})^t$ y $\bar{v}_k = (u_{kM-1}, v_{k1}, \dots, v_{kM-1})^t$ para $k = 1, \dots, N$. Con esta división de variables, de (3.24c) \bar{v}_k puede resolverse de \bar{u}_k y así podemos obtener una matriz T_k que lleve una transformación $\bar{v}_k = T_k \bar{u}_k$. La dimensión de T_k es $M \times (M - 2)$, las entradas de la primera fila son reales y el resto imaginarios puros, como puede verificarse directamente para $k = 0$, (3.24c) se escribe como $\partial v_0 / \partial y = 0$ que junto con (3.19), $v_0(\pm 1) = 0$, da $v_0(y) = 0$ y por lo que $v_{01} = \dots = v_{0M-1} = 0$. Como consecuencia, donde (3.24a) no existe términos de presión para $k = 0$, esta es la única ecuación que necesitamos considerar y este solo depende de u , una vez que la sustitución $\bar{v}_k = T_k \bar{u}_k$ sea aplicado.

Para $k = 1, \dots, N$, introducimos la notación

$$\begin{aligned} U_k &= - \left[(u - c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_k + \frac{1}{Re} (D_{xk}^2 + C_1^{-1} D_y^2 C_1) u_k + \delta_{k0} G \\ V_k &= - \left[(u - c) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right]_k + \frac{1}{Re} (D_{xk}^2 + C_1^{-1} D_y^2 C_1) v_k, \\ \bar{U}_k &= (U_k)_{\{1, \dots, M-2\}}, \quad \bar{Q}_k = (D_{xk} C_1^{-1} C_2)_{\{1, \dots, M-2\}}, \\ \bar{V}_k &= \begin{pmatrix} (U_k)_{\{M-1\}} \\ V_k \end{pmatrix}, \quad Q_k = \begin{pmatrix} (D_{xk} C_1^{-1} C_2)_{\{M-1\}} \\ C_1^{-1} D_y C_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $A_{\{i_1, \dots, i_n\}}$ denota las filas i_1, \dots, i_n de la matriz A . Las ecuaciones (3.24a) y (3.24b) son ahora expresados como

$$\begin{cases} \dot{\bar{u}}_k = \bar{U}_k - \bar{Q}_k p_k \\ \dot{\bar{v}}_k = \bar{V}_k - Q_k p_k \end{cases}$$

La matriz Q_k es una matriz invertible de $M \times M$, así de la segunda ecuación obtenemos $p_k = Q_k^{-1} (\bar{V}_k - \dot{\bar{v}}_k)$, el cual sustituyendo en el primer caso se tiene

$$\dot{\bar{u}}_k = \bar{U}_k - \bar{Q}_k Q_k^{-1} (\bar{V}_k - \dot{\bar{v}}_k) = \bar{U}_k - \bar{Q}_k Q_k^{-1} (\bar{V}_k - T_k \dot{\bar{u}}_k),$$

y finalmente sea $P_k = \bar{Q}_k Q_k^{-1}$, es también posible invertir $I - P_k T_k$, y así obtenemos soluciones para

$$\begin{cases} \dot{u}_0 = U_0 \\ \dot{\bar{u}}_k = (I - P_k T_k)^{-1} (\bar{U}_k - P_k \bar{V}_k), \quad k = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3.29)$$

donde I es la matriz identidad de dimensión $M - 2$, tenemos extendido la definición de U_k para $k = 0$. Teniendo en cuenta la sustitución $\bar{v}_k = T_k \bar{u}_k$, observemos que el sistema (3.29) no depende de \bar{v}_k y p_k : solo depende de u_0 y \bar{u}_k para $k = 1, \dots, N$. Como se comento al inicio de esta subsección, la dimensión real de (3.29) es $(2N + 1)(M - 2) + 1$. Además, debido a la eliminación de la presión en (3.29), evitamos la indeterminación causada por la constante aditiva, la cual no tiene efecto en el gradiente de presión [6].

Evolución Temporal: una vez eliminado v y p de (3.24), en (3.29) queda para discretizar derivadas temporales. Elegimos el método de diferencias finitas semi-implícita, atendiendo a varios factores como el costo computacional, la estabilidad, la presión y los requisitos de almacenamiento. El esquema adoptado es típico para las ecuaciones de Navier- Stokes y emplea el método implícito de Crank-Nicholson (vease [1], [2] y [5])

$$w^{n+1} = w^n + \frac{\Delta t}{2} [F(w^{n+1}) + F(w^n)], \quad (3.30)$$

para la difusión (términos lineales: presión y viscosidad), el método de Adams-Bashfort explicita

$$w^{n+1} = w^n + \frac{\Delta t}{2} [3F(w^n) - F(w^{n-1})] \quad (3.31)$$

para la advección (términos no-lineales) siendo $w^n = w(t^n)$ para $t_n = n\Delta t$, y $\dot{w} = F(w)$ se aproxima a la EDO. Aplicar diferentes métodos en cada término de F , suponemos que $F(w) = \mathcal{L}(w) + \mathcal{N}(w)$ y así escribimos $\dot{w} = F(w)$ en forma integral como

$$\begin{aligned} w(t_{n+1}) &= w(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{L}(w(t)) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{N}(w(t)) dt \\ &\approx w^n + \frac{\Delta t}{2} [\mathcal{L}(w^{n+1}) + \mathcal{L}(w^n)] + \frac{\Delta t}{2} [3\mathcal{N}(w^n) - \mathcal{N}(w^{n-1})], \end{aligned}$$

donde la aproximación de las integrales se basa en los métodos (3.30) y (3.31) respectivamente. Seleccionando términos, tenemos un paso del método a resolver

$$w^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{L}(w^{n+1}) = w^n + \frac{\Delta t}{2} [\mathcal{L}(w^n) + 3\mathcal{N}(w^n) - \mathcal{N}(w^{n-1})]. \quad (3.32)$$

La recurrencia de (3.32) es un método de dos pasos, este necesita la solución de dos valores consecutivos t_{n-1}, t_n , con el fin de encontrar un t_{n+1} . Cuando (3.32) inicia, w_0 viene de las condiciones iniciales y para generar w^1 se construye el método de un solo paso. En este caso los términos lineales y no lineales se discretizan mediante el método de Euler implícito y explícito respectivamente

$$w^{n+1} = w^n + \frac{\Delta t}{2} F(w^{n+1}), \quad w^{n+1} = w^n + \frac{\Delta t}{2} F(w^n)$$

que, en cada longitud de tiempo $\Delta t/2$, obtenemos el método semi-implícito

$$w^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{L}(w^{n+1}) = w^n + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{N}(w^n). \quad (3.33)$$

El error incurrido en (3.30) y (3.31) con respecto a la solución exacta es $O((\Delta t)^2)$, como es fácil de comprobar. El método de Crank-Nicolson es absolutamente estable en todo el semiplano izquierdo, es decir, si $\text{Re}(\lambda \Delta t) \leq 0$ entonces la solución aproximada w^n del problema escalar $\dot{w} = \lambda w$ esta acotado cuando $n \rightarrow \infty$. En cambio para el método de Adams-Bashforth la región de estabilidad es una área del plano complejo contenido en $[-1, 0] \times [-1, 1]$. La estabilidad en este caso depende de los autovalores λ de la parte lineal de la discretización espacial en (3.24) y Δt debe restringirse de acuerdo a $\text{Re}(\lambda \Delta t) \leq 0$ con el fin de conseguir la estabilidad. Como veremos en la subsección 3.3.6, para el tipo de soluciones consideramos en nuestro estudio, el intervalo de tiempo Δt que se emplea en la región de estabilidad, donde los errores estimados se mantienen pequeños.

Vamos a ver como se aborda la implementación actual. Podemos expresar (3.29) como

$$\dot{\bar{u}}_k = \mathcal{L}_k(\bar{u}_k) + \mathcal{N}_k(\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_N), \quad k = 0, \dots, N, \quad (3.34)$$

donde $\bar{u}_0 = u_0$ y $\mathcal{L}_k, \mathcal{N}_k$ corresponden a los términos lineales y no-lineales en $\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_N$ en el lado derecho de (3.29). En este punto consideramos sólo el caso cuando el gradiente de presión constante G se mantiene constante y pone a Re_p como su número de Reynolds. Las ecuaciones de flujo constante son estudiadas en la subsección 3.3.5. Para enfatizar la dependencia en cada una de las variables en (3.34), que precisa sus fórmulas:

$$\begin{aligned} Re_p \mathcal{L}_0(\bar{u}_0) &= C_1^{-1} D_y^2 C_1 \bar{u}_0, \\ Re_p (I - P_k T_k) \mathcal{L}_k(\bar{u}_k) &= (D_{xk}^2 + C_1^{-1} D_y^2 C_1)_{\{1, \dots, M-2\}} \begin{pmatrix} I \\ (T_k)_{\{1\}} \end{pmatrix} \\ &- P_k \begin{pmatrix} (D_{xk}^2 + C_1^{-1} D_y^2 C_1) & 0 \\ 0 & D_{xk}^2 + C_1^{-1} D_y^2 C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ T_k \end{pmatrix} \bar{u}_k, \\ \mathcal{N}_0(\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_N) &= - \left[(u - c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0 + G, \\ (I - P_k T_k) \mathcal{N}_k(\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_N) &= - \left(\left[(u - c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_k \right)_{\{1, \dots, M-2\}} \\ &+ P_k \begin{pmatrix} \left(\left[(u - c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_k \right)_{\{M-1\}} \\ \left[(u - c) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right]_k \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

para $k = 1, \dots, N$. Es fácil comprobar que $P_k = \bar{Q}_k Q_k^{-1}$ tiene su primera columna real y el resto imaginarios puros. Entonces $P_k T_k$ es una matriz real y la matriz \mathcal{L}_k para $k = 0, \dots, N$ es también real. La sustitución de (3.34) en (3.32) da para $k = 0, \dots, N$

$$\bar{u}_k^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{L}(\bar{u}_k^{n+1}) = \bar{u}_k^n + \frac{\Delta t}{2} [\mathcal{L}(\bar{u}_k^n) + 3\mathcal{N}_k^n - \mathcal{N}_k^{n-1}],$$

el cual se abrevia como

$$A_k \bar{u}_k^{n+1} = b_k^{n+1}, \quad (3.36)$$

donde

$$A_k = I - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{L}_k, \quad b_k^{n+1} = \bar{u}_k^n + \frac{\Delta t}{2} [\mathcal{L}(\bar{u}_k^n) + 3\mathcal{N}_k^n - \mathcal{N}_k^{n-1}],$$

y $\mathcal{N}_k^j = \mathcal{N}_k(\bar{u}_0^j, \dots, \bar{u}_N^j)$. Para $k = 0$ la matriz identidad tiene dimensión $(M - 1)$. Observemos que A_k es una matriz real de tamaño $M - 1$ para $k = 0$ y $M - 2$ para $k = 1, \dots, N$ y que sólo depende de M y Δt , que se mantiene constante en cada simulación de flujo. Por lo tanto tenemos que calcular la descomposición LU de A_k . La recurrencia de (3.36) necesita $\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_N$ en dos instantes de tiempo. El primero se toma de la condición inicial y para el segundo, adaptando (3.33) a nuestro caso, tenemos

$$\bar{u}_k^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{L}(\bar{u}_k^{n+1}) = \bar{u}_k^n + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{N}_k^n \quad (3.37)$$

el cual puede ser aplicado dos veces con el fin de obtener la solución de \bar{u}_k^1 en $t = \Delta t$. No es coincidencia que A_k sea también la matriz del sistema a resolverse en (3.37). En este caso podemos aprovechar de la descomposición LU y su correspondiente almacenamiento.

Esquema de avance en el Tiempo. Partimos de los valores fijos de Δt , M , N , $K = (2N + 1)(M - 2) + 1$ y $(\bar{u}_0^0, \dots, \bar{u}_N^0) \in \mathbb{R}^K$ en el instante de tiempo $t = 0$. En el siguiente algoritmo para la evolución del tiempo, todos los pasos referidos a $k = 0, \dots, N$. Se basan (3.36) y (3.37):

1. Calcular la matriz A_k junto con su descomposición LU.
2. Evaluar $b_k^{1/2} = \bar{u}_k^0 + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{N}_k^0$ y resolver $A_k \bar{u}_k^{1/2} = b_k^{1/2}$ para $\bar{u}_k^{1/2}$.
3. Evaluar $b_k^1 = \bar{u}_k^{1/2} + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{N}_k^{1/2}$ y resolver $A_k \bar{u}_k^1 = b_k^1$ para \bar{u}_k^1 .
4. Para $n = 1, 2, 3, \dots$ obtenemos $b_k^{n+1} = 2\bar{u}_k^n - b_k^n + \frac{\Delta t}{2} [3\mathcal{N}_k^n - \mathcal{N}_k^{n-1}]$ y resolver $A_k \bar{u}_k^{n+1} = b_k^{n+1}$ para \bar{u}_k^{n+1} .

En resumen, en cada intervalo de tiempo el coste computacional consiste en la evolución de \mathcal{N}_k^n , resolviendo el sistema lineal de tamaño $M - 1$ y $2N$ sistemas lineales de tamaño $M - 2$, cuya descomposición LU sera calculado. Los principales requisitos de almacenamiento es la descomposición LU de la matriz A_k , es decir, $(M - 1)^2 + 2N(M - 2)^2$ coeficientes reales. Esto a sido una razón importante para elegir la discretización numérica, como Galerkin-Fourier en x y colocación de Chebyshev en y (vea la subsección 3.3.1) en vez de Chebyshev-Galerkin en y y colocación de Fourier en x . Con este último enfoque los términos lineales están acoplados en una matriz, en contraste con un bloque de tamaño $M - 1$ y $2N$ de tamaño $M - 2$ en el método implementado como se ve en (3.36) [6].

3.2.5. El Integrador Numérico del Flujo Constante

Tenemos que hacer pequeños cambios en las ecuaciones de la subseccion 3.3.4 para implementar un integrador numérico que mantenga el flujo Q constante en el

tiempo. Según la **tabla 1**, tenemos que imponer $Q = 4/3$ y de (3.9) aplicado al caso adimensional resulta

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t} dy - \frac{1}{2Re_Q} \left[\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial y} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 \hat{u}_0 dy - \frac{1}{2Re_Q} \left[\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial y} \right]_{-1}^1 \quad (3.38) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{2Re_Q} \left[\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial y} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2Re_Q} \left[\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial y} \right]_{-1}^1, \end{aligned}$$

para \hat{u}_0 como se definió en (3.14). Por lo tanto, de la última expresión, la restricción en G tiene implícito al flujo constante, como hemos utilizado $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$ en este caso. Sin embargo, numéricamente (3.38) no es suficiente para mantener constante al flujo, ya que, debido a errores de redondeo, el flujo va variando ligeramente en cada espacio de tiempo, produciendo errores sustanciales en la integración del tiempo (vease [6]). Por lo tanto, además de aplicar (3.38) como el gradiente de presión media, restringimos también la solución de $Q = 4/3$ en cada instante de tiempo. Ambas restricciones afectan principalmente a la ecuación $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0M-1})$ en (3.29), porque Q y G dependen sólo de \hat{u}_0 y la dependencia es lineal. Incorporamos a $\mathcal{L}_0(u_0)$ de (3.35).

Cálculo de G . Por medio de las transformaciones C_1 y D_y definidos en (3.20) y (3.23) respectivamente, la operación lineal $u'_0 = (u'_{00}, \dots, u'_{0M-1}) = D_y C_1 u_0$ calcula los coeficientes del polinomio de Chebyshev $\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial y} = \sum_{m=0}^{M-1} u'_{0m} T_m(y)$. De ello se obtiene

$$\begin{aligned} G &= \frac{-1}{2Re_Q} \left[\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial y} \right]_{-1}^1 = \frac{-1}{2Re_Q} \sum_{m=0}^{M-1} u'_{0m} (T_m(1) - T_m(-1)) \\ &= \frac{-1}{2Re_Q} \sum_{m=0}^{M-1} u'_{0m} (\cos m0 - \cos m\pi) = \frac{-1}{2Re_Q} \sum_{m=0}^{M-1} u'_{0m} (1 - (-1)^m) \\ &= \frac{-1}{Re_Q} \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ impar}}}^{M-1} u'_{0m}, \end{aligned}$$

y así modificando los términos lineales, agregamos G

$$Re_Q \mathcal{L}_0(u_0) = C_1^{-1} D_y^2 C_1 u_0 + G = (C_1^{-1} D_y^2 C_1 - O D_y C_1) u_0,$$

donde $O = (o_{ij})$ es una matriz de $(M-1) \times M$ con $o_{ij} = 1$ si j es impar y $o_{ij} = 0$ en otros casos.

Cálculo de Q . Siendo $\tilde{u}_0 = C_1 u_0$ y como observamos en (3.8)

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-1}^1 \hat{u}_0(y) dy = \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^M \tilde{u}_{0m} T_m(y) dy = \sum_{m=0}^M \tilde{u}_{0m} \int_{-1}^1 \cos(m \arccos(y)) dy \quad (3.39) \\ &= \sum_{m=0}^M \tilde{u}_{0m} \int_0^\pi \cos(m\theta) \sin \theta d\theta = \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ par}}}^M \frac{2\tilde{u}_{0m}}{1-m^2} = q^t u_0 \end{aligned}$$

donde $q = (q_1, \dots, q_{M-1})^t = (q'_0, \dots, q'_M) C_1$, para $q'_m = 2/(1 - m^2)$ si m es par y $q'_m = 0$ en otros casos. Ahora la condición $Q = 4/3$ es transformado a $q^t u_0 = 4/3$, para M par podemos resolver $u_{0M/2}$ por

$$u_{0M/2} = \frac{1}{q_{M/2}} \left(\frac{4}{3} - \bar{q}^t \bar{u}_0 \right), \quad (3.40)$$

donde \bar{q} y \bar{u}_0 representan los vectores q y u_0 sin la $M/2 - \text{ésima}$ componente. Teniendo a $(\mathcal{L}_0)^{\{M/2\}}$ como la $M/2 - \text{ésima}$ columna de \mathcal{L}_0 , y $\tilde{\mathcal{L}}_0$ como \mathcal{L}_0 sin el $(\mathcal{L}_0)^{\{M/2\}}$, entonces podemos eliminar $u_{0M/2}$ de \mathcal{L}_0 desde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(u_0) &= \tilde{\mathcal{L}}_0(\bar{u}_0) + (\mathcal{L}_0)^{\{M/2\}} u_{0M/2} \\ &= \left(\tilde{\mathcal{L}}_0 - \frac{1}{q_{M/2}} (\mathcal{L}_0)^{\{M/2\}} \bar{q}^t \right) (\bar{u}_0) + \frac{4}{3q_{M/2}} (\mathcal{L}_0)^{\{M/2\}}, \end{aligned}$$

Por último $\bar{\mathcal{L}}_0 = \tilde{\mathcal{L}}_0 - \frac{1}{q_{M/2}} (\mathcal{L}_0)^{\{M/2\}} \bar{q}^t$, que es la $M/2 - \text{ésima}$ fila, la ecuación para \bar{u}_0 es

$$\dot{\bar{u}}_0 = \bar{\mathcal{L}}_0(\bar{u}_0) + \mathcal{N}_0(\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_N),$$

donde

$$\mathcal{N}_0(\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_N) = - \left[(u - c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0 + \frac{4}{3q_{M/2}} (\mathcal{L}_0)^{\{M/2\}}.$$

La dimensión del sistema será reducido en uno con respecto a (3.29). La ecuación para $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N$ tiene términos lineales como en (3.29). En la evaluación de los términos convectivos $u_{0M/2}$ será sustituido de (3.40). La evolución temporal será implementado como en (3.36).

3.2.6. Comprobación del Integrador Numérico

Ahora verificaremos que los errores locales originados en (3.36) de la discretización temporal, serán razonables para el tipo de soluciones que consideraremos en este trabajo y los valores moderados de Re . A tal fin, aproximaremos derivadas temporales para diferencias finitas centrales y luego extrapolamos esas aproximaciones.

Método de Extrapolación. Consideremos la expansión de potencias de h , evaluadas en h y λh

$$T(h) = \tau_0 + \tau_1 h^r + O(h^{r+1}), \quad T(\lambda h) = \tau_0 + \tau_1 \lambda^r h^r + O(h^{r+1}).$$

Combinamos ambas expansiones hasta anular los términos de orden r para

$$\frac{\lambda^r}{1 - \lambda^r} \left(\frac{T(\lambda h)}{\lambda^r} - T(h) \right) = \tau_0 + O(h^{r+1}) \quad (3.41)$$

aproximamos derivadas usando la fórmula de diferencia central

$$D(h) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} \quad (3.42)$$

que de la expansión de Taylor sabemos que

$$D(h) = a_0 + a_1 h^2 + \dots + a_m h^{2m} + h^{2m+2} \beta_{m+1}(h),$$

donde $a_{2k+1} = f^{2k+1}(t) / (2k+1)!$ para $k = 0, 1, \dots, m+1$ y $\beta_{m+1}(h) \rightarrow a_{m+1}$ cuando $h \rightarrow 0$. Poniendo $\lambda = 1/2$ y $r = 2$, el método de extrapolación aplicado a $D(h)$ se escribe así

$$D(h/2) + \frac{D(h/2) - D(h)}{3} = f'(t) + O(h^4). \quad (3.43)$$

Fórmula Efectiva para el Error del Tiempo. Denotemos $u^n = u(n\Delta t)$ para $n = 0, 1, \dots$ y $u = (\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_N)$ en su forma discreta como se define en la subsección 3.3.4. El procedimiento adoptado para estimar los errores cometidos en la evolución temporal se considera cinco instantes consecutivos de u , es decir $u^{n-2}, u^{n-1}, u^n, u^{n+1}$ y u^{n+2} [6]. Usando (3.42) para $h = 2\Delta t$ y $h = \Delta t$, aproximamos \dot{u}^n por

$$\frac{u^{n+2} - u^{n-2}}{4\Delta t} = \dot{u}^n + O((\Delta t)^2), \quad \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} = \dot{u}^n + O((\Delta t)^2),$$

el cual combinado con (3.43) se obtiene

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{3} \left(\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u^{n+2} - u^{n-2}}{4\Delta t} \right) \dot{u}^n + O((\Delta t)^4). \quad (3.44)$$

Abreviando (3.34) como $\dot{u} = \mathcal{L}(u) + \mathcal{N}(u)$, haciendo $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_0, \dots, \mathcal{L}_N)$ y $\mathcal{N} = (\mathcal{N}_0, \dots, \mathcal{N}_N)$. Por otro lado, (3.36) puede transformarse a

$$\mathcal{L}(u^n) = \frac{2}{\Delta t} (u^n - b^n)$$

donde $b = (b_0, \dots, b_N)$. Debido a (3.30) y (3.31) se producen $O((\Delta t)^2)$ errores, esto es también para (3.36). En consecuencia de la evolución del tiempo usado en (3.36) nos lleva a $\dot{u}^n = \mathcal{L}(u^n) + \mathcal{N}(u^n) + O((\Delta t)^2)$, el cual sustituido en (3.44) da una expresión final para el error

$$\frac{1}{12\Delta t} (u^{n-2} - 8u^{n-1} + 24b^n - 24u^n - 12\Delta t \mathcal{N}^n + 8u^{n+1} - u^{n+2}) = O((\Delta t)^2) \quad (3.45)$$

Norma de un Flujo. para medir el tamaño de un flujo, y en particular la expresión (3.45), necesitamos una norma. Dado un perfil de velocidades $(u, v)(x, y)$, sobre la base de la norma L_2 , definimos su norma $\|(u, v)\|$ como

$$\|(u, v)\|^2 \stackrel{def}{=} \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-1}^1 [u(x, y)^2 + v(x, y)^2] dy dx. \quad (3.46)$$

Con el fin de evaluar (3.46) para un flujo de datos discretos (u, v) como en (3.14) y (3.18), si ponemos $w(x, y) = u(x, y)^2 + v(x, y)^2$, expresados como series de Fourier

$w(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k(y) e^{ik\alpha x}$, entonces

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|^2 &= \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-1}^1 w(x, y) dx dy = \int_0^L \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{w_k(y)}{L} \int_{-1}^1 e^{ik\alpha x} dx dy \quad (3.47) \\ &= \int_{-1}^1 w_0(y) dy = q^t w_0. \end{aligned}$$

El último paso es una consecuencia directa de (3.39), donde $w_0 = (w_{01}, \dots, w_{0M-1})$, correspondiente a la notación (3.18). Por otro lado, para la serie truncada $w(x, y)$, de la definición de sumas de convolución en (3.26), obtenemos para $m = 1, \dots, M-1$

$$w_{0m} = \sum_{k=-N}^N (u_{km} u_{-km} + v_{km} v_{-km}) = u_{0m}^2 + 2 \sum_{k=1}^N (|u_{km}|^2 + |v_{km}|^2),$$

que finalmente nos permite evaluar (3.47).

Con el fin de evaluar el error de la fórmula (3.45), primero necesitamos aplicar la transformada T_k definido en la subsección 3.3.4 para calcular los componentes de u y v no presentes en $(\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_n)$, y luego podemos aplicar (3.47). En la **tabla 2** se presentan errores, de acuerdo con (3.45), para diferentes flujos. Observemos que para fijar valores de Re y $N \times M$, depende de los errores en $(\Delta t)^2$, cuando Δt se reduce a la mitad, que se dividen más o menos por cuatro. Esto está en acuerdo con (3.45). Los errores se aumentaron con Re y ligeramente con $N \times M$. Los datos de la **tabla 2** da solo una referencia de la precisión de los integradores numéricos, porque los errores dependen en gran medida del tipo de solución que se integra.

En las figuras 3.2 y 3.3 graficamos los vectores $(u, v)(x_j, y_m)$ para $x_j = jL/M$, $j = 0, 1, \dots, M-1$ y y_m como se definió en (3.17). De (3.14) y (3.18), como u, v son funciones reales, obtenemos (x_j, y_m) que se lleva acabo por

$$\begin{aligned} u(x_j, y_m) &= u_{0m} + 2 \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}(u_{km} e^{ik\alpha x_j}) \\ &= u_{0m} + 2 \sum_{k=1}^N [u_{km}^r \cos(k\alpha x_j) - u_{km}^i \operatorname{sen}(k\alpha x_j)] \\ v(x_j, y_m) &= 2 \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}(v_{km} e^{ik\alpha x_j}) = 2 \sum_{k=1}^N [v_{km}^r \cos(k\alpha x_j) - v_{km}^i \operatorname{sen}(k\alpha x_j)], \end{aligned}$$

donde $\operatorname{Re} z = z^r$ es la parte real de z , y $\operatorname{Im} z = z^i$ la parte imaginaria. De nuevo en este caso empleamos la transformada T_k .

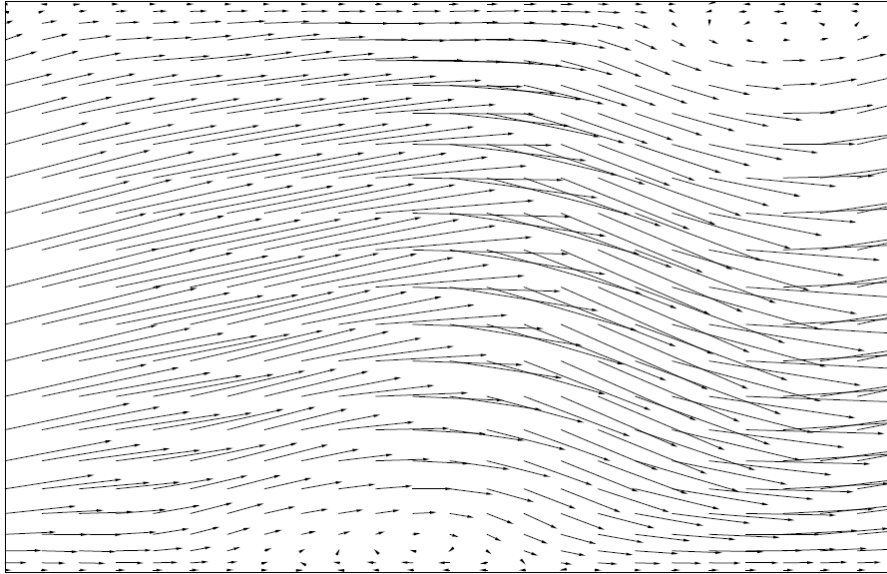


Figura 3.2: Campo de velocidades de (u, v) para un instante de tiempo de acuerdo a la Tabla 2. El esquema representado corresponde a $[0, L] \times [-1, 1]$. Fuente: [6] p.32.

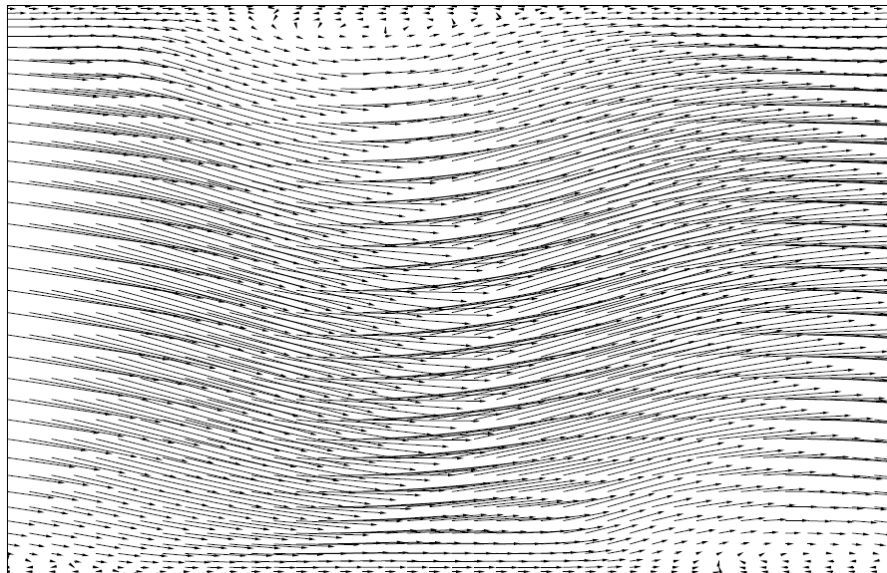


Figura 3.3: Similar a la figura 3.2. Fuente: [6] p.33

Flujo constante				Gradiente de presión constante			
$N \times M$	Re_Q	Δt	Error	$N \times M$	Re_p	Δt	Error
4×24	5737.26	0.020	8.50×10^{-9}	4×24	7638.23	0.020	2.38×10^{-9}
4×24	5737.26	0.010	2.12×10^{-9}	4×24	7638.23	0.010	5.95×10^{-10}
4×24	5737.26	0.005	5.30×10^{-10}	4×24	7638.23	0.005	1.49×10^{-10}
4×24	6000.00	0.020	1.62×10^{-8}	4×24	8500.40	0.020	4.68×10^{-9}
4×24	6000.00	0.010	4.04×10^{-9}	4×24	8500.40	0.010	1.17×10^{-9}
4×24	6000.00	0.005	1.01×10^{-9}	4×24	8500.40	0.005	2.93×10^{-10}
4×24	7401.06	0.020	9.46×10^{-6}	4×24	9504.20	0.020	2.64×10^{-7}
4×24	7401.06	0.010	2.37×10^{-6}	4×24	9504.20	0.010	6.62×10^{-8}
4×24	7401.06	0.005	5.88×10^{-7}	4×24	9504.20	0.005	1.66×10^{-8}
7×40	5269.03	0.020	6.81×10^{-8}	7×40	6699.62	0.020	3.11×10^{-8}
7×40	5269.03	0.010	1.70×10^{-8}	7×40	6699.62	0.010	7.82×10^{-9}
7×40	5269.03	0.005	4.26×10^{-9}	7×40	6699.62	0.005	1.96×10^{-9}
7×40	5835.42	0.020	8.06×10^{-7}	7×40	7589.07	0.020	2.12×10^{-7}
7×40	5835.42	0.010	2.02×10^{-7}	7×40	7589.07	0.010	5.31×10^{-8}
7×40	5835.42	0.005	5.04×10^{-8}	7×40	7589.07	0.005	1.33×10^{-8}
7×40	6658.21	0.020	3.38×10^{-6}	7×40	8260.39	0.020	3.86×10^{-7}
7×40	6658.21	0.010	8.46×10^{-7}	7×40	8260.39	0.010	9.65×10^{-8}
7×40	6658.21	0.005	2.12×10^{-7}	7×40	8260.39	0.005	2.41×10^{-8}
7×40	7539.27	0.020	8.03×10^{-6}	7×40	9051.24	0.020	6.26×10^{-7}
7×40	7539.27	0.010	2.01×10^{-6}	7×40	9051.24	0.010	1.57×10^{-7}
7×40	7539.27	0.005	5.03×10^{-7}	7×40	9051.24	0.005	3.91×10^{-8}

Tabla 2: Errores, de acuerdo a (3.45)-(3.47), cometidos durante la integración de diferentes flujos para los valores especificados de Re_Q , Re_p , $N \times M$, Δt y para fijado $\alpha = 1,02056$. El error se calcula como un promedio de varias mediciones de (3.45). Para valores fijos de Re y $N \times M$ el mismo flujo es integrado para valores de $\Delta t = 0,02, 0,01, 0,005$. Fuente: [6] p.35.

Conclusiones

1. Las Ecuaciones en Derivadas Parciales constituyen uno de los principales campos de estudio en matemáticas, debido a su creciente aplicación en física, ingeniería y otras ciencias. Se ha visto que por lo general la solución de una EDP no es expresable en términos de funciones elementales, lo que dificulta el cálculo de las soluciones analíticas. Por lo tanto es recomendable emplear métodos numéricos para resolver EDP cuando, para fines prácticos, basta generar soluciones aproximadas, pero de manera eficiente. El Método de Diferencias Finitas es una herramienta útil para calcular aproximaciones a las soluciones de algunas EDP, como hemos tratado en el primer capítulo.
2. Una de las aplicaciones de los polinomios de Fourier y Chebyshev es el ahorro de cálculos, pues logra disminuir el grado de un polinomio de aproximación, con una pérdida mínima de exactitud. Como estos polinomios tienen un valor absoluto mínimo que se distribuye uniformemente en el intervalo, puede también ser usados para reducir el grado de un polinomio de aproximación, sin que se rebase la tolerancia del error, como lo presentamos en el capítulo II.
3. Se explica técnicas con que se obtienen las aproximaciones de polinomios que resulta ser eficiente desde el punto de vista de los cálculos a realizar; una vez que se conoce $P_n(x)$ es fácil determinar $P_{n+1}(x)$, por ejemplo los polinomios de Chebyshev sólo requiere la fórmula de recurrencia para generar el $T_{n+1}(x)$, esto lo hemos tratado en la segunda parte del capítulo II.
4. Por último vemos que los capítulos 1 y 2 son de suma importancia en la implementación numérica para resolver la ecuación generada por el flujo de Pouseuille, la cual sabemos que está gobernada por la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incomprensibles. Donde combinando los métodos de diferencias finitas y métodos espectrales se dio la solución numérica para la ecuación del flujo de Pouseuille, vista en el capítulo III de nuestro trabajo.

Bibliografía

- [1] **Trefethen, Lloyd** : Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Cornell University 1996.
- [2] **Romero. S, Moreno y Rodriguez:** Introducción a las ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP's), Universidad de Huelva.
- [3] **Jan S. Hesthaven, Prof. Sigal Gottlieb, David Gottlieb:** Spectral methods for time-dependent problems 2007, Cambridge University press.
- [4] **Roger Peyret** : Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow, Springer-Verlag
- [5] **Richard L. Burden, J. Douglas Faires:** Análisis Numérico con aplicaciones, México. Editorial.
- [6] **Jose Pablo Sanchez Casas:** Numerical Study of Hopf Bifurcations in the two-dimensional plane Pouseuille flow, Tesis Doctoral. Barcelona 2002.
- [7] **Jie Shen, Tao Tang, Li-Lian Wang:** Spectral Methods, Algorithms, Analysis and Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.
- [8] **Won Y. Yang, Wenwu Cao, Tae S. Chung, John Morris:** Applied numerical methods using MATLAB. 2005 by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- [9] **Jaime Álvarez Maldonado:** Universidad de Santiago de Chile.
- [10] **Beni Neta:** Partial Differential equations, MA 3132 Lecture Notes, Department of Mathematics Naval Postgraduate School Code MA/Nd Monterey, California 93943 October 10, 2002