UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN

FACULTAD DE INGENIERÍA DE PROCESOS

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA METALÚRGICA

"ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE LA VELOCIDAD CRÍTICA Y NIVEL DE LLENADO, EN LA MOLIENDA DE UN MINERAL CUPRÍFERO A TRAVÉS DE SIMULACIÓN DE PROCESOS"

Tesis presentada por el Bachiller:

Luis Enrique Bernedo Pinazo

Para optar el Título Profesional de:

Ingeniero Metalurgista

Asesor:

Ing. Hector Gelber Bolaños Sosa

AREQUIPA - PERÚ

2015

UNSA - SADI
No. Doc. B2-M-18414
No Ej. 01 Fecha 16/04/21
Firma Registrador

DEDICATORIA

Este trabajo de tesis lo dedico en primer lugar a *Dios* por guiar mi vida, a mis padres Emperatriz Pinazo y Florentino Bernedo por su gran amor y constante apoyo y motivación, a mis hermanos por el apoyo incondicional y a todas las personas participes en el logro de mis objetivos.

RESUMEN DE LA TESIS

En el presente trabajo de tesis se desarrollará el estudio de la variación de los parámetros de porcentaje de velocidad crítica y nivel de llenado en un molino Batch a través de simulaciones basadas en el modelo de balance poblacional, a un mineral cuprífero, con el objetivo de hallar los parámetros óptimos de operación.

En el Capítulo 1 se describe el objetivo del presente trabajo así como de la justificación del mismo, al ser la simulación de procesos una herramienta poderosa tanto para diseño y optimización de circuitos de conminución.

En el capítulo 2 se desarrollara los conceptos básicos de conminución, mecanismos de fractura, descripción de circuitos utilizados usualmente en las industrias, las teorías clásicas de conminución, una descripción de las condiciones operacionales del molino de bolas, por otro lado se describe las bases matemáticas con la cual se realizara la simulación (modelo balance poblacional) y la determinación de los parámetros función selección y función fractura los cuales son inherentes del mineral.

En el capítulo 3 se desarrollara el procedimiento experimental necesario para obtener los parámetros de fractura (función selección y función fractura), se describirá un esquema del procedimiento a seguir así como el procedimiento para la validación de los parámetros; posteriormente se realizara pruebas de molienda ya en el simulador para observar el efecto de las variables con respecto a la granulometría de descarga del mineral (D80) y el consumo de potencia del molino.

En el capítulo 4 se discutirá y examinara los resultados de la parte experimental, estos incluyen las pruebas de laboratorio para la obtención de los parámetros de fractura (función y selección), se observara la influencia en la granulometría del mineral y el consumo energético de la velocidad crítica del molino y del nivel de llenado del mismo.

Por último se puede apreciar que parámetros tienen mayor influencia en la granulometría del mineral y en el consumo energético del molino.

INDICE

GENERALIDADES **1**

1.1. INTRODUCCIÓN 1

1.2. JUSTIFICACIÓN 2

1.3. OBJETIVOS 2

1.3.1 Objetivo General 2

1.3.2. Objetivos específicos 2

CAPITULO II **3**

MARCO TEÓRICO **3**

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS 3

2.1.1. Conminución 3

2.1.2. Principios Básicos de Fragmentación 4

2.1.3 Mecanismos de fractura 6

2.1.4 Molinos de bolas 7

2.1.5. Circuitos de molienda 10

2.2. TEORÍAS CLÁSICAS DE CONMINUCIÓN 15

2.2.1. Ley de Rittinger 15

2.2.2. Ley de Kick 16

2.2.3. Ley de Bond 16

2.2.4. Limitaciones y deficiencias 18

2.3. CONDICIONES OPERACIONALES DEL MOLINO DE BOLAS 18

2.3.1. Velocidad de giro /rotación del molino y velocidad critica 18

2.3.2. Nivel de llenado / volumen de carga 20

2.3.2.1. Altura de carga 23

2.3.3. Potencia 26

2.4. TEORÍAS MODERNAS DE CONMINUCIÓN 28

2.4.1. Hipótesis de Molienda de Primer Orden 28

2.4.2. Formulación del modelo de molienda batch. 30

2.4.3. La energía especifica como variable controlante de la molienda Modelo Herbst y Fuerstenau 31

2.4.4. Estimación de Parámetros de Fractura 34

CAPITULO III 37

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL 37

3.1. Procedimiento experimental 37

3.2. Análisis mineralógico 39

3.3. Determinación de los parámetros de fractura (función selección y función fractura) 41

3.3.1. Preparación del mineral 41

3.3.2. Análisis granulométrico de alimentación del molino 43

3.3.3. Equipo de molienda y condiciones de operación 43

3.3.4 Análisis granulométrico descarga del mineral 45

3.3.5. Desarrollo del modelo 45

3.3.6. Validación del modelo 46

3.4. Influencia de la variación de la velocidad crítica y nivel de llenado a través de simulación 46

3.4.1. Pruebas de simulación 46

3.4.2. Variación de la velocidad critica 46

3.4.3. Variación del nivel de llenado del molino 47

3.4.4. Variación del nivel de llenado de pulpa 47

CAPITULO IV 48

RESULTADOS Y DISCUSIÓN 48

4.1. Determinación de los parámetros de fractura 48

4.2. Validación de los parámetros 50

4.3. Influencia del porcentaje de la velocidad crítica 51

4.4. Influencia del nivel de llenado del molino 53

4.4.1 Nivel de llenado de bolas en el molino 53

4.4.2 Nivel de llenado de pulpa en los intersticios 55

CONCLUSIONES 57

BIBLIOGRAFÍA 58

ANEXOS 60

INDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Deformación de un cristal por fuerzas de compresión y tensión 4

Figura 2.2 Propagación de una grieta por ruptura de uniones químicas bajo esfuerzo interno. 5

Figura 2.3. Mecanismos de fractura 7

Figura 2.4. Molino de bolas 8

Figura 2.5 Mecanismo de fractura dentro de un molino de bolas 9

Figura 2.6 Regímenes de movimiento del medio de molienda dentro del molino ..9

Figura 2.7 Tipos de circuitos. 10

Figura 2. 8 Circuito abierto. 11

Figura 2.9 Circuito cerrado. 12

Figura 2. 10 Ventajas de la molienda en circuito cerrado. 13

Figura 2. 11. Circuito cerrado inverso. 13

Figura 2. 12 Circuitos cerrados inversos y normales. 14

Figura 2. 13. Relación entre las 3 leyes de molienda. 17

Figura 2.14 Carga de un molino de bolas o barras. 19

Figura 2.15 Obtención de la velocidad critica del molino. 20

Figura 2.16 Descripción grafica del nivel de carga en el molino. 22

Figura 2.17 Altura de bolas y mineral. 23

Figura 2.18 Medida de la altura del lecho. 24

Figura 2. 19. Representación esquemática de los eventos de fractura y generación de fragmentos entre t y dt en un molino Batch. 30

Figura 2. 20. Representación esquemática de la Funcion Selección. 34

Figura 2. 21 Estructura logica de la rutina de estimacion de parametros funcion selección y fractura 36

Figura 3. 1 Diagrama de flujo procedimiento de parámetros a encontrar.....38

Figura 3. 2 Analisis mineralogico.....40

Figura 3.3. Mineral en estudio.....42

Figura 3.4 Procedimiento de cuarteo 42

Figura 3. 5 Molino de laboratorio UNSA, 8"x12".....45

Figura 4. 1 Comparación de los datos experimentales con los simulados.....49

Figura 4. 2 Comparación porcentaje pasante acumulado Experimental y Simulado 50

Figura 4. 3 Variación del D80 vs Porcentaje de la velocidad critica 52

Figura 4. 4 Potencia del molino vs Porcentaje de la velocidad critica 52

Figura 4. 5 D80 vs el Nivel de llenado del molino, %JB 54

Figura 4. 6 Potencia del molino vs Porcentaje de llenado del molino.....54

Figura 4. 7 D80 vs el nivel de llenado de pulpa.....56

Figura 4. 8 Potencia usada del molino vs Porcentaje de llenado de pulpa en el molino.....56

INDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Rango de tamaño normal y la eficiencia aproximada de energía para diferentes mecanismos de conminución. 4

Tabla 3.1 Mallas utilizadas en el procedimiento experimental.....43

Tabla 3. 2 Características del molino y condiciones de operación..... 44

Tabla 3. 3 Composición del collar de bolas..... 44

Tabla 3.4 Parámetros de Fractura (Función Selección y Función Fractura) 46

Tabla 4.1. Parámetros de la función fractura y selección a partir de datos experimentales.....48

Tabla 4.2 Comparación Porcentaje pasante Experimental prueba de validación. 50

Tabla 4.3 Variación en micrones del D80 con respecto al Porcentaje de la velocidad critica a diferentes niveles de llenado de Pulpa en los intersticios. 51

Tabla 4.4 Variación de la Potencia [Watts] con respecto al Porcentaje de la velocidad critica a diferentes niveles de llenado de Pulpa en los intersticios. 51

Tabla 4.5 Variación en micrones del D80 con respecto al Porcentaje de llenado de bolas a diferentes niveles de llenado de Pulpa en los intersticios..... 53

Tabla 4.6 Variación de la Potencia [W] con respecto al Porcentaje de llenado de bolas a diferentes niveles de llenado de Pulpa en los intersticios..... 53

Tabla 4.7 Variación en micrones del D80 con respecto al porcentaje de llenado de pulpa en los intersticios a diferentes porcentajes de la velocidad critica..... 55

Tabla 4.8 Variación de la Potencia [W] con respecto al porcentaje de llenado de pulpa en los intersticios a diferentes porcentajes de la velocidad critica..... 55

CAPITULO I

GENERALIDADES

1.1. INTRODUCCIÓN

La molienda es uno de los principales procesos en todo circuito de procesamiento de minerales, es de importancia debido a que es, el proceso en el que se identifica el mayor consumo energético y elevados costos en reposición de insumos (medios moledores); por otro lado es el proceso donde se da la granulometría adecuada para los diferentes procesos metalúrgicos posteriores.

Por tal motivo varios investigadores e ingenieros se encuentran en la búsqueda de formas para optimizar circuitos de molienda; para tal efecto existen dos posibles métodos, la primera es la realización de campañas de pruebas y estudio en campo donde implica el cambiar parámetros ya pre-establecidos esperando resultados positivos, este método presenta el riesgo de pérdidas de producción lo que implica pérdidas económicas para la empresa; el segundo método se basa en la simulación de molienda de los circuitos ya pre establecidos a través de software especializado, pero debido al alto precio de los mismos y el alto costo de capacitación del personal para que puedan utilizar estos softwares, hacen que se obtengan resultados a largo plazo y estos inconvenientes se presentan como desventajas en este segundo método.

El presente trabajo de tesis espera contribuir primero con una metodología que permitirá el estudio de la influencia de la variación del porcentaje de la velocidad crítica y nivel de llenado del molino (bolas y pulpa en los intersticios) en la molienda de un mineral cuprífero a través de simulación de procesos, para observar la influencia en los mismos sobre la granulometría de descarga y potencia usada por el molino, lo cual es un herramienta para la optimización de procesos de molienda.

Y segundo espera difundir el conocimiento sobre la operación y simulación de procesos de la molienda de minerales, contribuyendo de esta manera en la formación de futuras promociones.

1.2. JUSTIFICACIÓN

En el ámbito de las empresas mineras (la mayor parte de pequeña y mediana minería), realizan la operación de molienda de una manera técnica y empírica, y mucho depende de la pericia de los operadores el lograr obtener un producto con las características físicas necesarias, limitándose a no cambiar de condiciones de operación; viéndose la optimización del proceso una tarea muy limitada y dificultosa.

Por ello, en este trabajo se plantea un estudio de la influencia de las condiciones de operación (velocidad crítica y nivel de llenado) en el proceso de molienda de un mineral cuprífero a través de simulación de procesos, lo cual permitirá observar la respuesta en la granulometría y potencia frente a cambios de parámetros del molino.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

Determinar la influencia de la velocidad crítica y el nivel de llenado del molino, en la molienda de un mineral cuprífero.

1.3.2. Objetivos específicos

- Analizar los efectos del cambio de condiciones de operación de un molino de bolas a través de simulación.
- Determinación de los parámetros de función selección y función fractura de un mineral cuprífero.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.1. Conminución

La conminución es un proceso en el que las especies mineralógicas se reducen por medio de diferentes mecanismos, tales como explosión, trituración y molienda para conseguir una granulometría adecuada para las subsiguientes etapas de operación o producto final. En el procesamiento de minerales, se utilizan los procesos de conminución para asegurar que la parte valiosa del mineral sea liberado físicamente de los componentes sin valor.

En las plantas de beneficio de minerales, la conminución es necesaria para obtener una granulometría adecuada, necesaria en los procesos de concentración, así como para conseguir una liberación adecuada de la especie mineralógica que se desea concentrar.

En resumen, los objetivos de la conminución pueden ser resumidos de la siguiente manera:

- Producir partículas de un tamaño o forma determinada.
- Liberar la parte valiosa (mena) de la ganga para poder concentrarla en un siguiente proceso.
- Aumentar el área superficial específica del mineral para que pueda reaccionar en presencia de agentes químicos con una mayor cinética de reacción.

Los procesos de conminución son muy ineficientes (viéndolos desde un punto de vista energético) [4]. Debido a esta razón, muchos investigadores concentran sus esfuerzos en esta área, ya que, no importa cuán pequeño sea el aumento de la eficiencia obtenida, se puede reducir en gran medida el consumo de energía del proceso o incluso se puede aumentar la productividad.

En la tabla 2.1 se puede observar la eficiencia con respecto a cada forma o mecanismo de conminución.

Tabla 2.1 Rango de tamaño normal y la eficiencia aproximada de energía para diferentes mecanismos de conminución. [10]

Mecanismo	Rango normal de tamaño, mm	Eficiencia Aproximada, %
Tronadura-Explosivos	∞ - 1 000	70
Chancadora Giratoria	1 000 – 200	80
Chancadora de Cono	200 – 20	60
Molino Autógeno/Semiautógeno	200 – 2	3
Molino de Barras	20 – 5	7
Molino de Bolas	5 – 0,2	5
HPGR	20 – 1	20 - 30

2.1.2. Principios Básicos de Fragmentación

Las partículas de los minerales presentan grietas a macro y micro escala las cuales a medida que van reduciéndose de tamaño presentan menos grietas, y debido a estas grietas los minerales de mayor tamaño son más frágiles a comparación de los mismos a un tamaño mucho menor.

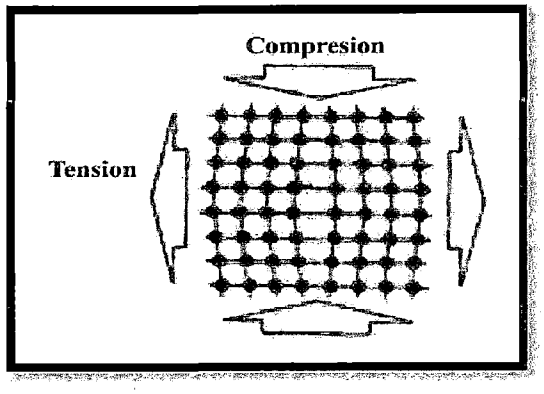

Figura 2.1. Deformación de un cristal por fuerzas de compresión y tensión [19]

Según la teoría de grietas de Griffith [9] este propone que al someter tal material a una tensión, los esfuerzos se concentran en las puntas de las fallas, estableciéndose un frente de ruptura por donde se propaga la grieta y fractura el material a una pequeña fracción del esfuerzo necesario para romper el material ideal.

El mecanismo de la fractura es el siguiente:

Cuando la energía de deformación en la punta de la grieta es lo suficientemente alta, implica que los enlaces químicos en la punta se rompan y la grieta se propaga produciendo la fractura del material.

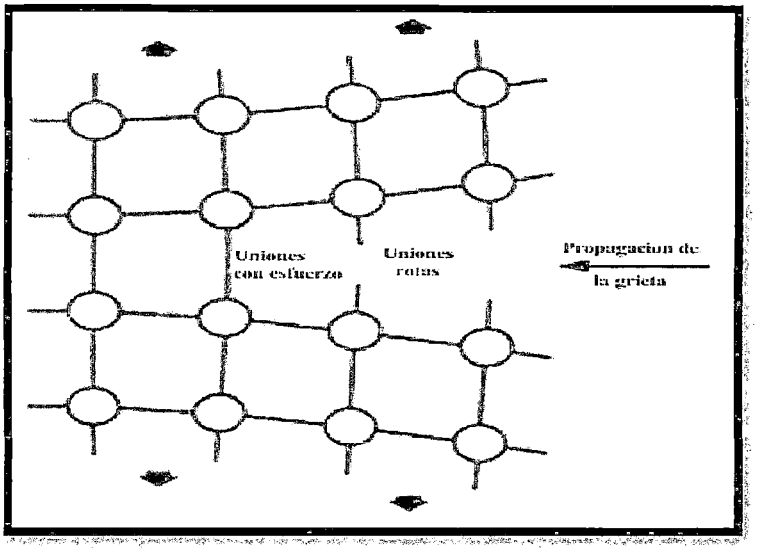

Figura 2.2 Propagación de una grieta por ruptura de uniones químicas bajo esfuerzo interno. [8]

La teoría de Griffith necesita que una fuerza de tensión exista a lo largo de la grieta y más allá de la abertura. Una carga compresiva uniforme sólo puede cerrar una grieta. Sin embargo, una carga compresiva no-uniforme conduce a fuerzas de tensión localizadas; de aquí se desprende que "**En Conminución Las Partículas Normalmente Se Quiebran Bajo Tensión, Y No Bajo Compresión". [9]**

2.1.3 Mecanismos de fractura

Se distinguen tres tipos de mecanismos de fractura:

2.1.3.1 Fractura por abrasión

Este tipo de fractura ocurre cuando la fuerza aplicada es insuficiente para causar fractura a lo largo de toda la partícula.

Prevalece una concentración de esfuerzos, lo que provoca la aparición de pequeñas fracturas y como consecuencia de este tipo de fractura se genera una distribución de partículas finas y partículas de gran tamaño.

En los molinos de bolas este tipo de fractura ocurre cuando el desplazamiento del medio moledor está en forma de cascada.

2.1.3.2 Fractura por Compresión

Este tipo de fractura ocurre cuando la fuerza aplicada es suficiente, de forma que pocas regiones se fracturan, produciéndose así un número relativamente pequeño de partículas fragmentadas y presentan tamaños relativamente grandes.

Este tipo de fractura ocurre preferencialmente en los equipos como chancadoras de mandíbulas, giratorias y cónicas.

2.1.3.3. Fractura por impacto

Este tipo de fractura ocurre cuando las fuerzas de fractura son aplicadas de forma rápida y en intensidades muy superiores de aquella necesaria para fracturar la partícula. El resultado es un gran número de partículas con un amplio rango de tamaños, este tipo de fractura se puede observar en chancadoras de impacto.

En el molino de bolas cuando el medio moledor tiene un desplazamiento en forma de catarata ocurre este tipo de fractura.

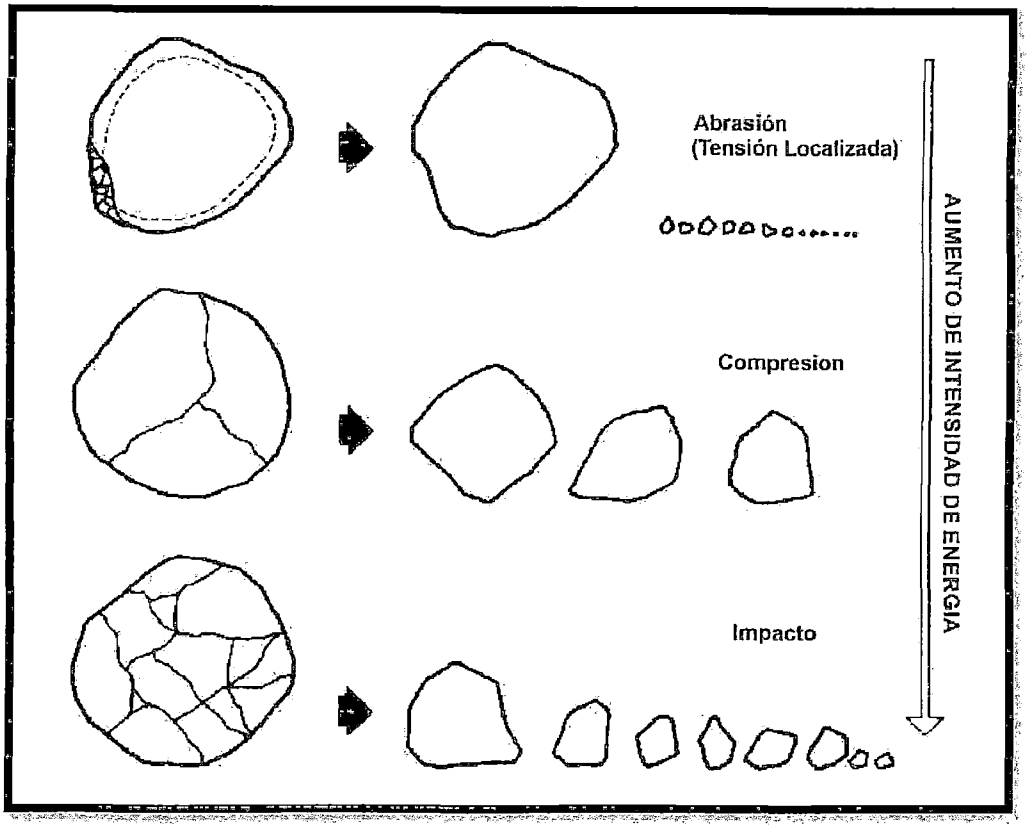

Figura 2.3. Mecanismos de fractura [8]

2.1.4 Molinos de bolas

Los molinos de bolas usualmente son equipos con un ratio de reducción intermedio y fino de molienda por otro lado son característicos por su longitud de carcasa cilíndrica que usualmente es 1 a 1,5 veces el diámetro del mismo. En general, los molinos de bolas pueden operar en seco o en húmedo y son capaces de producir productos alrededor de 100 μm.

El molino de bolas, es un tambor giratorio con un nivel de llenado de bolas de 40% a 50% (usualmente de acero o aleaciones de acero), el material que va a ser molido rellena los espacios entre las bolas, el medio moledor captura las partículas en eventos bola/bola - bola/forros y son estresados hasta el punto de fractura. Los molinos de bolas son empleados en molienda primaria o secundaria. En casos de molienda primaria, estos reciben alimentación de las chancadoras y en molienda secundaria estos reciben su alimentación de molinos de barras, molinos autógenos o semiautogenos. Por otro lado en las operaciones de remolienda usualmente son usados los molinos de bolas, porque la alimentación para esta aplicación es típicamente bastante fina, los molinos de

bolas son algunas veces usadas en circuitos de una sola etapa de molienda. Los circuitos de estos molinos son a menudo de tipo cerrado con clasificadores y elevadas cargas circulantes.

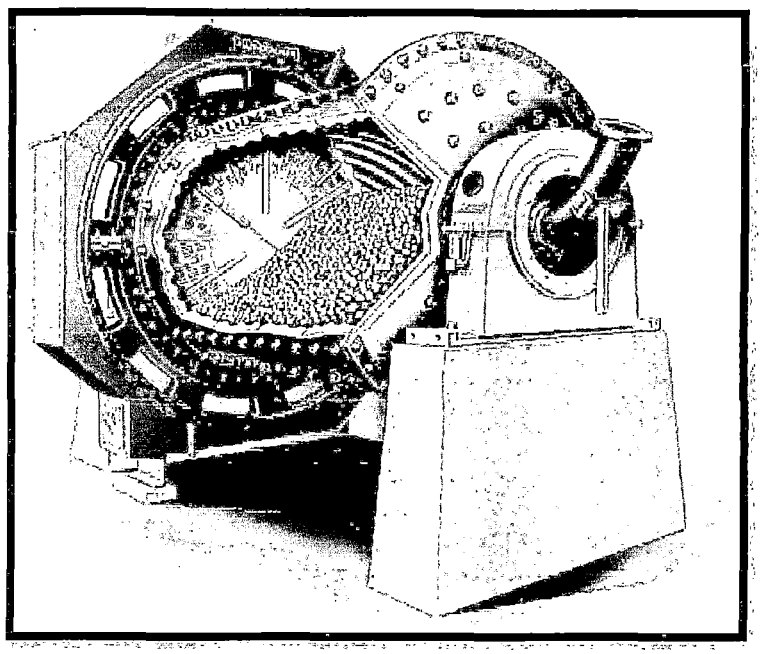

Figura 2.4. Molino de bolas [10]

2.1.4.1 Mecanismo de fractura dentro de un molino de bolas

Como se vio anteriormente, dentro de un molino está presente los tres mecanismos de fractura, anteriormente detallados, estos mecanismos de fractura también son sensibles de acuerdo a los parámetros de operación del molino.

En la figura 2.5 se observa 2 áreas, en la zona "A" los cuerpos moledores se mueven uno sobre otros en capas prácticamente concéntricas, produciendo fractura principalmente por abrasión y compresión.

En la zona "B" los cuerpos moledores se desplazan de arriba hacia abajo produciendo una fractura principalmente por impacto.

Entre las zonas A y B existe una pequeña región donde no se observa ninguna fractura, esta zona es denominada como ZONA MUERTA.

En la figura 2.6 se puede observar los 2 régimen de desplazamiento del medio moledor en el cual un molino de bolas puede tener, los cuales son Régimen de cascada y Régimen de catarata.

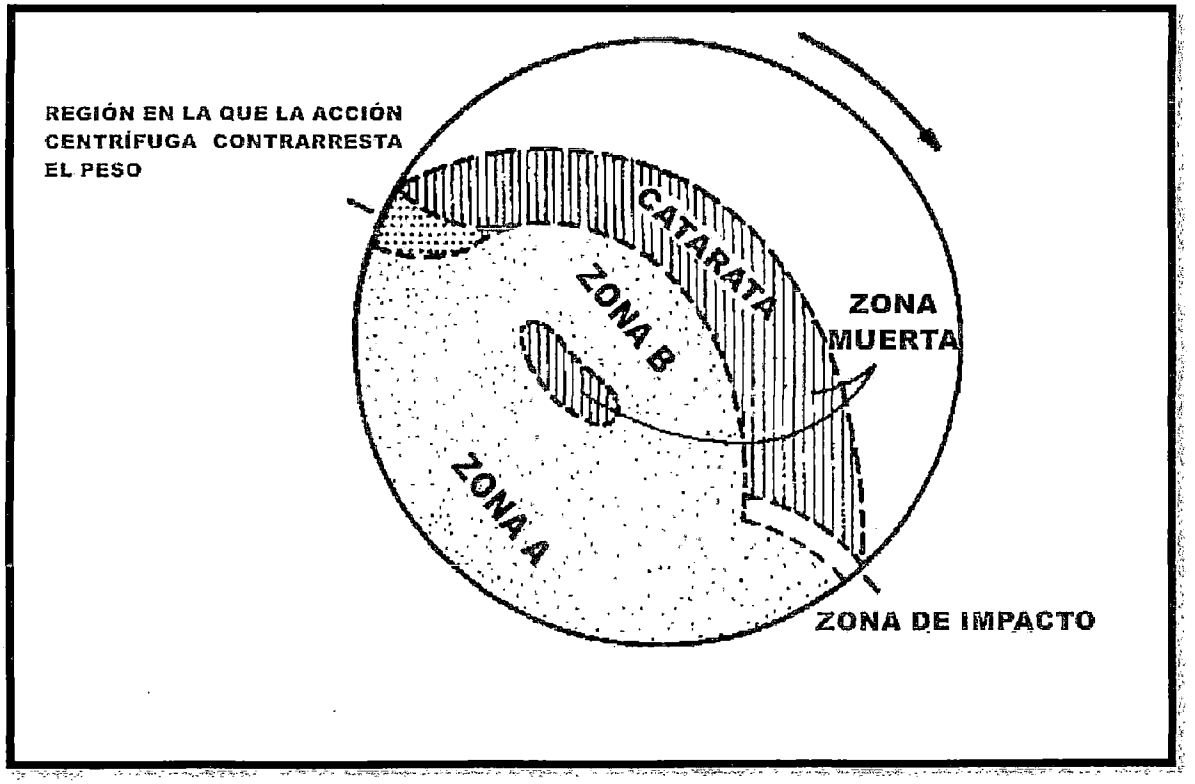

Figura 2.5 Mecanismo de fractura dentro de un molino de bolas [19]

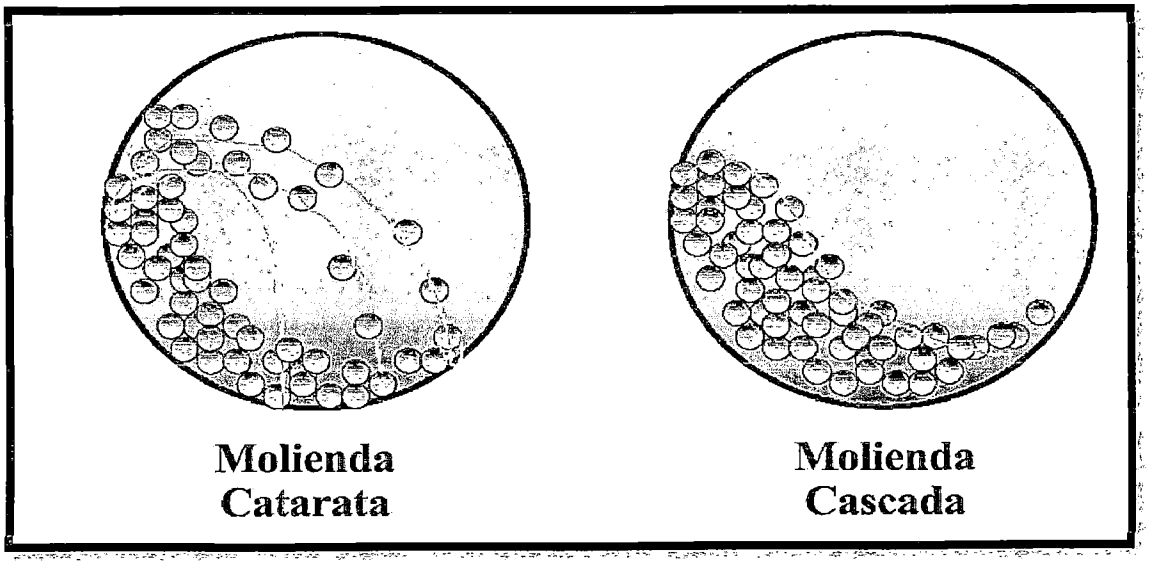

Figura 2.6 Regímenes de movimiento del medio de molienda dentro del molino [20]

2.1.5. Circuitos de molienda

Existen tres tipos básicos de circuitos de molienda:

- Circuitos abiertos
- Circuitos cerrados
- Circuitos cerrados inversos

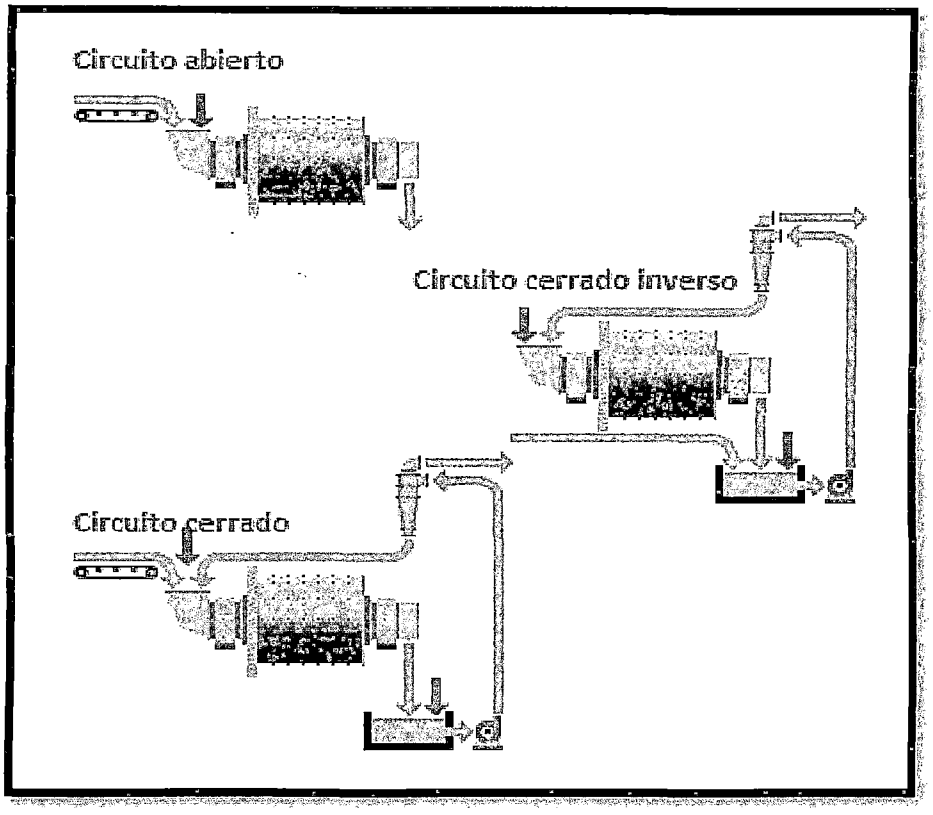

Figura 2.7 Tipos de circuitos. [13]

Los circuitos se diferencian entre sí por la forma en que se distribuyen estos componentes.

2.1.5.1. Circuitos abiertos

El circuito abierto de molienda es uno de los circuitos más sencillos, estos están constituidos por una fuente de alimentación (faja transportadora) y el mismo molino en sí, si la molienda es en húmedo en la entrada del molino se agrega agua al material de alimentación para formar la pulpa.

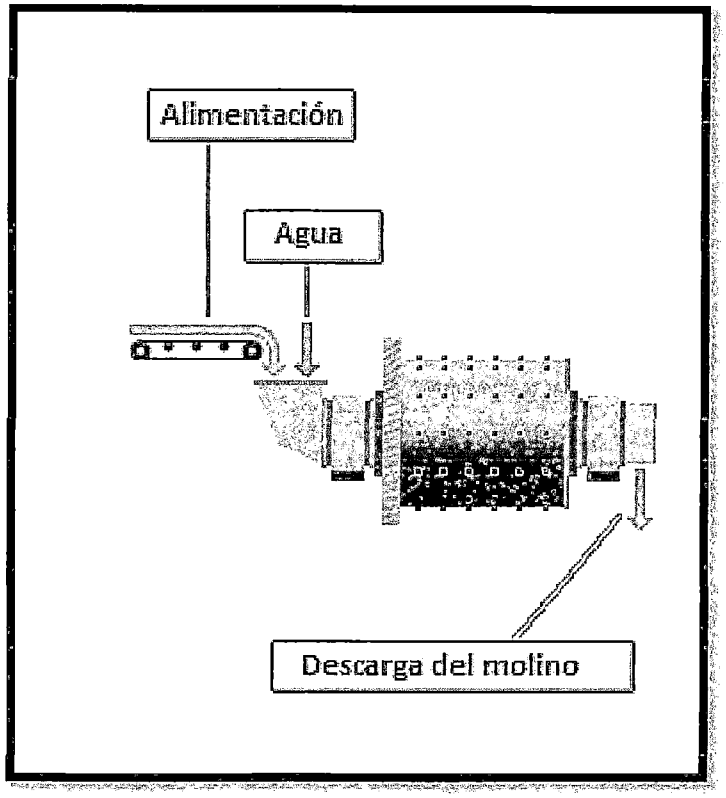

Figura 2. 8 Circuito abierto. [13]

Granulometría del producto en un circuito abierto

En un circuito abierto, las partículas de mineral pasan por el molino una sola vez; para alcanzar una granulometría adecuada, el tonelaje utilizado en un circuito abierto debe ser inferior al tonelaje de un circuito cerrado pues el primero no cuenta con un clasificador en la descarga del molino el cual controle el tamaño de las partículas.

En general, los circuitos abiertos ofrecen una distribución granulométrica más amplia; el material que entrega un circuito abierto contiene más partículas finas y más partículas gruesas que las que entrega un circuito cerrado, esto puede tener un efecto negativo en el proceso subsiguiente de concentración. Por lo general, la configuración de circuito abierto se utiliza en molinos de barras para preparar el material que alimentará a los molinos de bolas.

2.1.5.2 Circuitos cerrados

En los circuitos cerrados de molienda se caracterizan porque parte del producto molido es devuelto al molino.

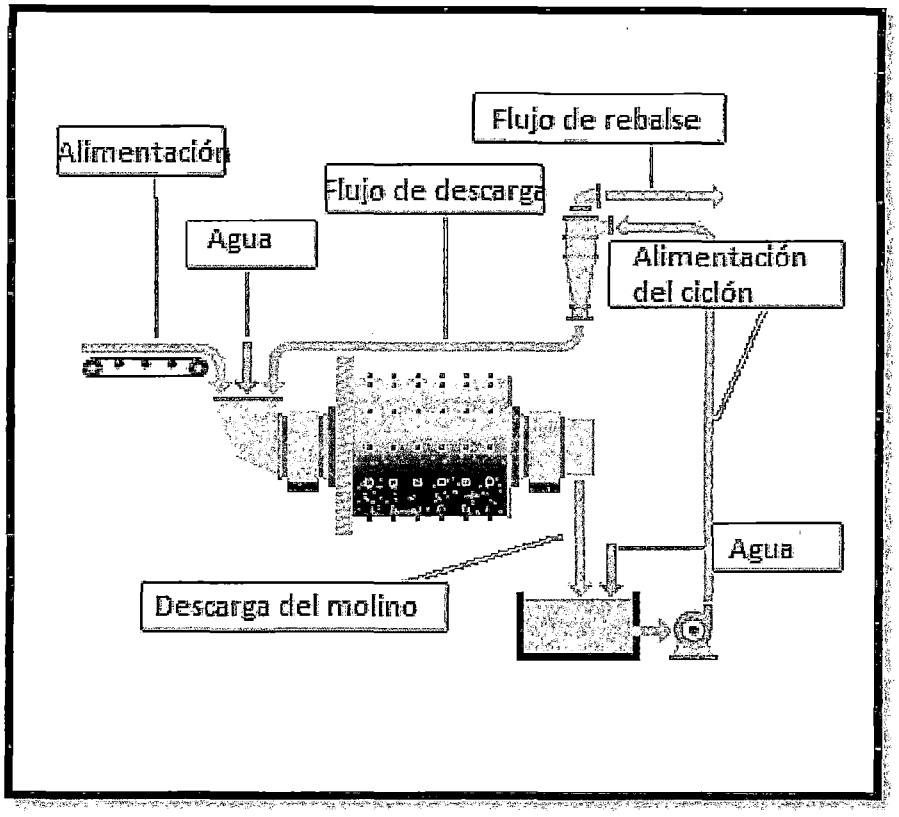

Figura 2.9 Circuito cerrado. [13]

Ventajas de la molienda en circuito cerrado

En un circuito cerrado, el flujo de descarga del clasificador devuelve partículas gruesas al molino, debido a este bucle de reciclado, la magnitud de flujo que pasa por el molino es superior en un circuito cerrado que en un circuito abierto.

En un circuito cerrado, el material que alimenta el molino también es más grueso. Esto permite al molino triturar las partículas que deban ser trituradas, en lugar de sobrefragmentar las partículas finas.

Lo anterior permite generar una mayor capacidad del circuito y una distribución granulométrica más uniforme del producto.

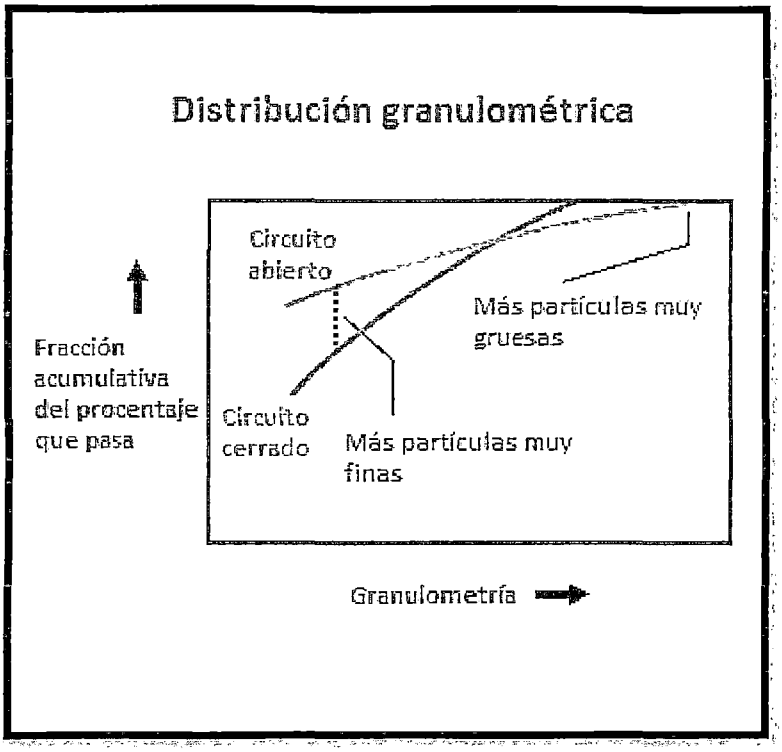

Figura 2. 10 Ventajas de la molienda en circuito cerrado. [13]

Circuitos cerrados inversos

En un circuito cerrado inverso, la clasificación ocurre antes de la molienda.

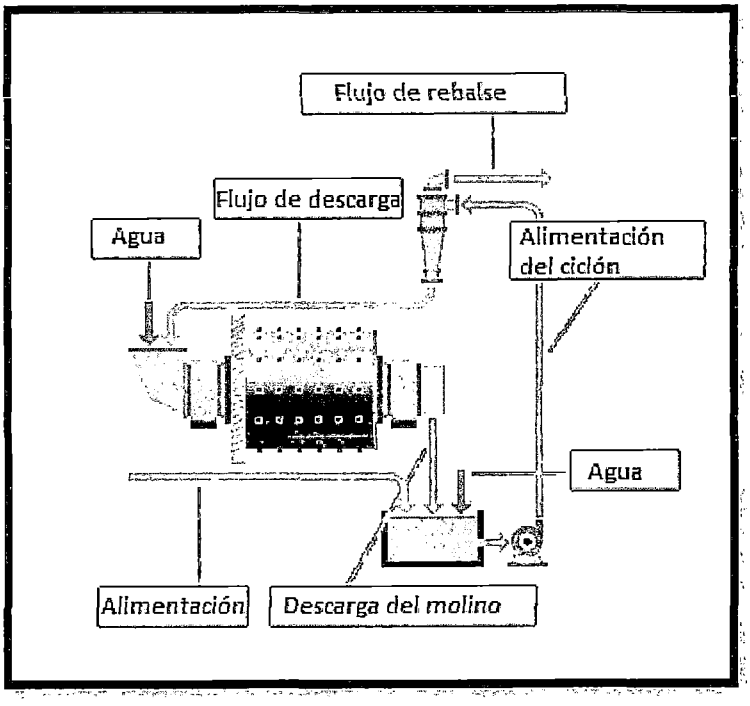

Figura 2. 11. Circuito cerrado inverso. [13]

Circuitos cerrados inversos y normales

Los circuitos cerrados inversos ofrecen mayor capacidad que los circuitos cerrados normales, porque el material fino se retira antes de la molienda. Cuando la alimentación del circuito proviene de un triturador, la opción suele ser un circuito cerrado normal; de esta forma, las partículas gruesas se pueden triturar antes de llegar al clasificador.

Cuando la alimentación procede de una primera etapa de molienda -por ejemplo, de un molino de barras o de un molino SAG a menudo se usa un circuito cerrado inverso para remover los finos antes de que éstos lleguen al molino.

La alimentación fresca que va al molino primario contiene partículas finas y en él se generan aún más finos. Es importante retirar este material fino para alcanzar máxima eficiencia en la segunda etapa de la molienda.

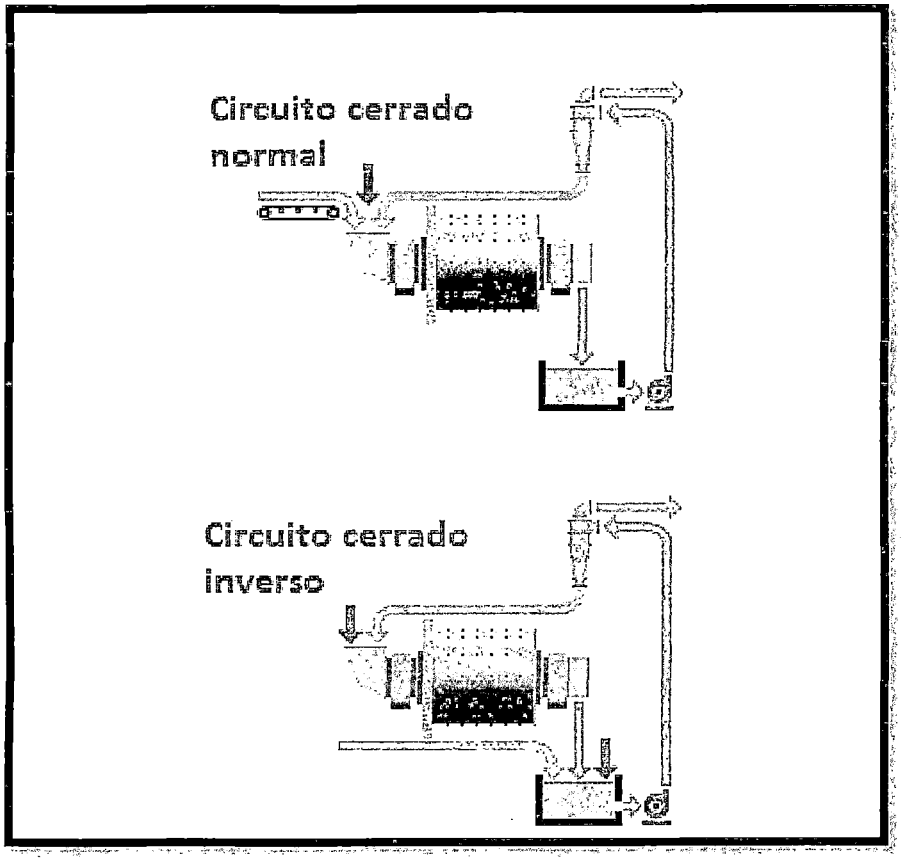

Figura 2. 12 Circuitos cerrados inversos y normales. [13]

2.2. TEORÍAS CLÁSICAS DE CONMINUCIÓN

Desde los inicios de los primeros estudios básicos sobre conminución de minerales, a mediados del siglo pasado, se ha reconocido el rol preponderante que le cabe al consumo específico de energía como parámetro determinante de la respuesta del proceso.

Fue observado experimentalmente que, en un proceso de reducción dimensional, el pequeño cambio de tamaño producido era proporcional a la energía consumida por unidad de peso de las partículas, y que la energía requerida para llevar a cabo el mismo cambio relativo de tamaño era inversamente proporcional a alguna función de tamaño inicial de la partícula. La relación entre la energía y la rotura puede ser expresada por la ecuación: 2.1 [12]

$$dE = -k * \frac{dx}{x^n} \qquad (2.1)$$

De donde por integración se desprende:

$$E = \frac{k}{(n-1)}\left[\left(\frac{1}{x_2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1}\right] \qquad ; si\ n \neq 1 \qquad (2.2)$$

$$E = k \ln \frac{x_1}{x_2} \qquad ; si\ n \neq 1$$

2.2.1. Ley de Rittinger

Cronológicamente, fue Von Rittinger en 1867 quien postulo por primera vez una relación entre la energía específica consumida (Kwh/TMS) y el incremento de nueva superficie generada. El postulado de Rittinger, también conocido como la Primera ley de la conminución, establece:

"La energía especifica consumida en la reducción de tamaño de un sólido es directamente proporcional a la nueva superficie especifica creada"

Analíticamente, la ley de Rittinger se desprende de la ecuación 2.2, para el caso especial en que n = 2.

$$E = K * \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) \qquad (2.3)$$

2.2.2. Ley de Kick

Posteriormente, Kick en 1885 postulo una segunda ley que establece:

"La energía requerida para producir cambios análogos en el tamaño de los cuerpos geométricamente similares es proporcional al volumen de estos cuerpos".

En su forma analítica, la ley de kick se desprende también de la ecuación 2.2 para el caso especial n=1.

$$E = K * \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \qquad (2.4)$$

2.2.3. Ley de Bond

Transcurrió casi un siglo hasta que en 1952, Bond postulo su tercera ley o teoría de la conminución al enunciar:

"El consumo especifico de energía asociado al proceso de reducción de tamaño es proporcional a la longitud de las nuevas grietas producidas. Dado que la longitud exterior de una grieta es proporcional a la raíz cuadrada de sus superficies. Se puede concluir que la energía consumida es proporcional a la diferencia entre la raíz cuadrada de la superficie especifica existente después y antes de la conminución"

En su forma analítica, la ley de Bond se desprende igualmente de la ecuación 2.2, para el caso especial n=3/2:

$$E = 2 \cdot K \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1}}\right) \qquad (2.5)$$

Definiendo además que los tamaños característicos x_2 y x_1 corresponden a los tamaños D_{80} del producto (P_{80}) y de la alimentación (F_{80}), respectivamente. Por conveniencia Bond Especifico:

$$2 * K = 10 * W_i \qquad (2.6)$$

Donde W_i se conoce como el índice de trabajo del mineral ("Work Index") y representa consecuentemente el consumo especifico requerido para fracturar partículas muy gruesas hasta un tamaño $P_{80} = 100$ micrones. De esta manera, se obtiene la forma más conocida de la expresión de Bond:

$$E = 10W_i\left(\frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{80}}}\right) \qquad (2.7)$$

Por otro lado el investigador Hukki [7] verifico en 1961 que las leyes de conminución se aplican a ciertos intervalos de conminución en función a la granulometría del producto. El gráfico que se muestra en la Figura 2.13 [7] muestra que las tres leyes serían aplicables para ciertos intervalos granulométricos, pero la Ley de Bond sería aplicable en el rango de tamaño de partícula que generalmente se desarrolla en la operación de molienda.

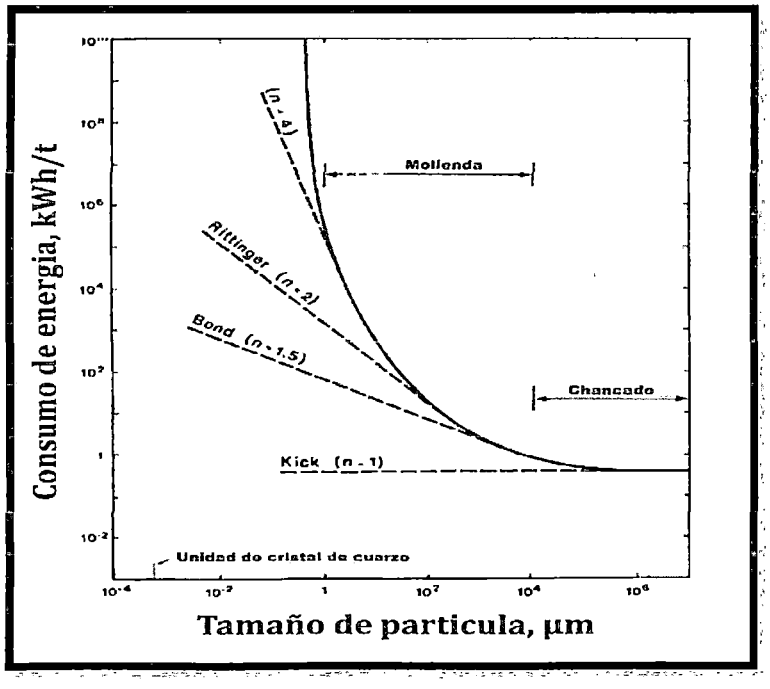

Figura 2. 13. Relación entre las 3 leyes de molienda. [7]

2.2.4. Limitaciones y deficiencias

Las leyes de la conminución, particularmente la tercera propuesta por bond, han tenido una repercusión transcendental en el diseño de múltiples nuevas instalaciones, durante las últimas décadas. Es así como se puede afirmar con certeza que la metodología de diseño propuesta por Bond es la metodología standard adoptada por la mayoría de las empresas especializadas de ingeniería.

Sin embargo, para la evaluación de alternativas operacionales con fines de optimización, la relación de Bond (con una precisión estimada en ± 20%) ha demostrado ser claramente insatisfactoria [12]. Ello debido a que, a pesar de reconocer la estrecha relación existente entre consumo especifico de energía y tamaño de productos, es demasiado global en su descripción del proceso. Así por ejemplo, no tiene en cuenta la razón de la carga circulante, la eficiencia del clasificador, la variación de la reología de pulpa (tiempo de residencia y densidades de pulpa), las condiciones de operación tales como: coeficiente de llenado, coeficiente de fracción critica de rotación (velocidad critica), acción de la mezcla de carga de medios moledores y la carga del mineral, variables importantes, para diseñar condiciones de trabajos óptimas.

Estas serias limitantes, y otras de menor relevancia práctica, han motivado el interés de los diversos grupos de investigadores sobre la materia a desarrollar nuevas metodologías de análisis, apoyadas estas en una caracterización matemática significativamente más detallada de los distintos mecanismos básicos operativos en el proceso.

2.3. CONDICIONES OPERACIONALES DEL MOLINO DE BOLAS

2.3.1. Velocidad de giro /rotación del molino y velocidad critica

La velocidad de rotación del molino es un parámetro de importancia tanto en el consumo de energía como en la operación de molienda que realiza. Este giro del molino sobre su eje produce el desplazamiento de la carga, lo que produce el movimiento relativo de los elementos que la componen entre sí, produciéndose la fricción, impacto, etc., lo que produce la molienda del mineral y el desgaste de los medios moledores.

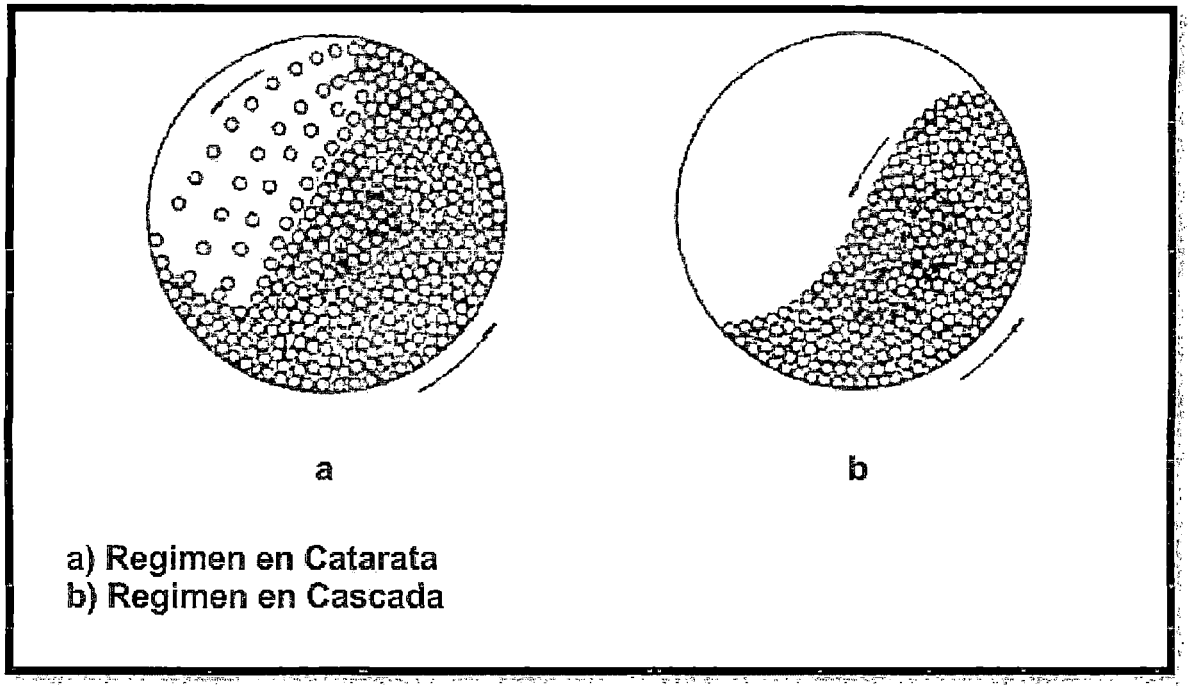

Figura 2.14 Carga de un molino de bolas o barras. [6]

La velocidad de giro de un molino (velocidad de trabajo / operación) se define como un porcentaje de la **"velocidad crítica teórica"** o **"velocidad crítica"** del molino, y esta se denomina como aquella velocidad de rotación en el que el medio moledor del molino, por el efecto centrífugo, se adhiere a la carcasa y deja de producir efecto de molienda.

En el momento que se alcanza la velocidad crítica, el molino pierde capacidad de molienda ya que hay un porcentaje de la carga de medios moledores que no realiza trabajo alguno.

El valor de la "Velocidad Critica, Vc o ωc" es:

$$Vc = \frac{42{,}3}{\sqrt{D}} \qquad \omega_c = \frac{4{,}43}{\sqrt{D}} \tag{2.8}$$

Vc : Velocidad crítica en r.p.m.

ω_c : Velocidad crítica en rad/s .

D : Diámetro interno del molino en (m)

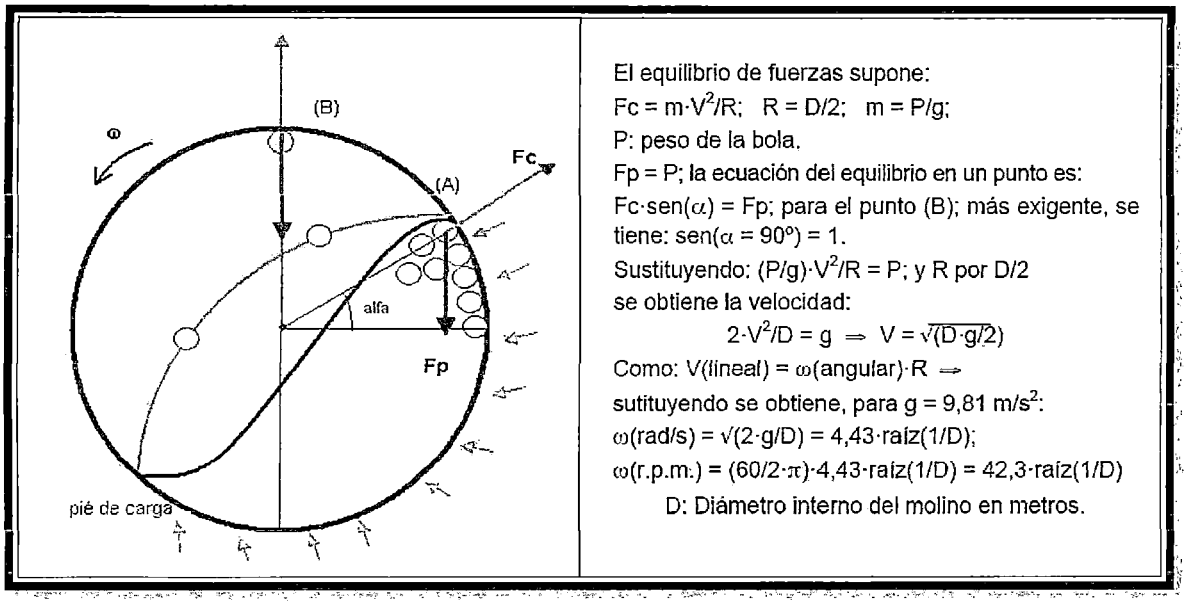

Figura 2.15 Obtención de la velocidad critica del molino. [6]

La velocidad de operación del molino debe ser menor a la velocidad crítica, situándose un rango de operación para los molinos de bolas entre 65% y 80% de Vc. [5]

2.3.2. Nivel de llenado / volumen de carga

Es importante que el Molino no este sobrecargado o por otro lado tenga un nivel de carga muy bajo. La sobrecarga tiende a acumular finos en la base del molino, lo cual genera un efecto de amortiguación que absorbe el impacto (el cual genera fractura). Cuando la carga del mineral es baja, se crea un excesivo contacto bola a bola lo que disminuye la taza de fractura.

El porcentaje de volumen del molino ocupado por la carga de material, es una función de la carga de volumen de las rocas y bolas. El porcentaje del volumen del molino ocupado por el mineral, V_R , será:

$$V_R = \frac{(\,Peso\ del\ mineral\ /\ densidad\ del\ mineral\,)}{Volumen\ del\ molino} * 100 \qquad (2.9)$$

Y el porcentaje del volumen del molino ocupado por el medio moledor (bolas), V_B, será similarmente:

$$V_B = \frac{(Peso\ del\ medio\ moledor\ /\ densidad\ del\ medio\ moledor)}{Volumen\ del\ molino} * 100 \qquad (2.10)$$

Así si la porosidad de la cama que contiene el mineral a triturar en el medio moledor, es φ (espacio intersticial) entonces:

$$J_R = \frac{(Peso\ del\ mineral\ /\ Densidad\ del\ mineral)}{Volumen\ de\ bolas} * \frac{1}{\varphi} \qquad (2.11)$$

Y para el caso de ser molienda húmeda, el nivel de llenado de pulpa en los intersticios seria:

$$J_P = \frac{(Peso\ de\ la\ pulpa\ /\ Densidad\ de\ la\ pulpa)}{Volumen\ de\ bolas} * \frac{1}{\varphi} \qquad (2.12)$$

Y la fracción del volumen del molino ocupado por la carga de bolas es:

$$J_B = \frac{(Peso\ del\ medio\ moledor\ /\ densidad\ del\ medio\ moledor)}{Volumen\ del\ molino} \qquad (2.13)$$

Donde:

J_R = La fracción del volumen de los intersticios del medio moledor ocupado por la masa de mineral cargado.

J_P = La fracción del volumen de los intersticios del medio moledor ocupado por la pulpa de mineral cargado (molienda húmeda).

J_B = La fracción del volumen del molino ocupado por la masa de carga de bolas

φ = Fracción de espacios intersticiales

Si los pesos de la pulpa y de las bolas son M_P y M_B respectivamente y V_M el volumen interno del molino, la fracción de los intersticios del medio moledor ocupado por pulpa de mineral (J_P) y la fracción del volumen del molino ocupado por los medios de molienda (J_B) será:

$$J_P = \frac{M_P/\rho_P}{V_B} * \frac{1}{\varphi} \qquad (2.14)$$

$$J_B = \frac{M_B/\rho_B}{V_M} \qquad (2.15)$$

La máxima posible porosidad de la cama es aproximadamente 40%, pero un valor de 30 – 40 % porosidad de la cama es común. En la práctica se prefiere que el Nivel de llenado de pulpa en los intersticios del medio moledor no exceda el 100%, por otra parte el nivel de llenado de bolas en de molinos de bolas de descarga por rebose seria hasta un máximo de 45%.

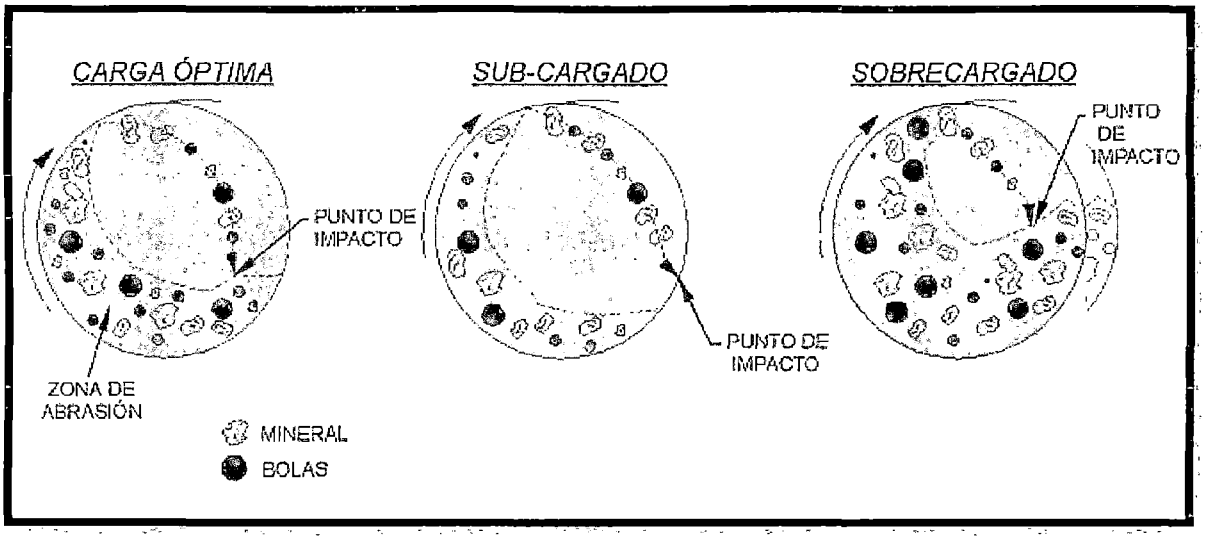

Figura 2.16 Descripción grafica del nivel de carga en el molino. [20]

2.3.2.1. Altura de carga

La medición de la altura de carga dentro de un molino es un método conveniente para estimar el volumen de carga. Como regla general:

1. Para molinos de bolas con descarga por rebose, la carga no debería exceder de 45% del volumen del molino.
2. Para molinos de descarga por parrilla, la carga debe ocupar alrededor del 50 % del volumen del molino.

La figura 2.17 ilustra un molino de bolas en reposo cargado con rocas y medios de molienda. Bond determino la altura, H_C, por medio de una relación estadística:

$$\% \, Carga = 113 - \left(\frac{63 H_C}{R}\right) \qquad (2.16)$$

Donde:

H_C = Altura de la carga vertical desde el nivel de las bolas la parte superior del liner y el centro del molino y R es el radio interior del molino

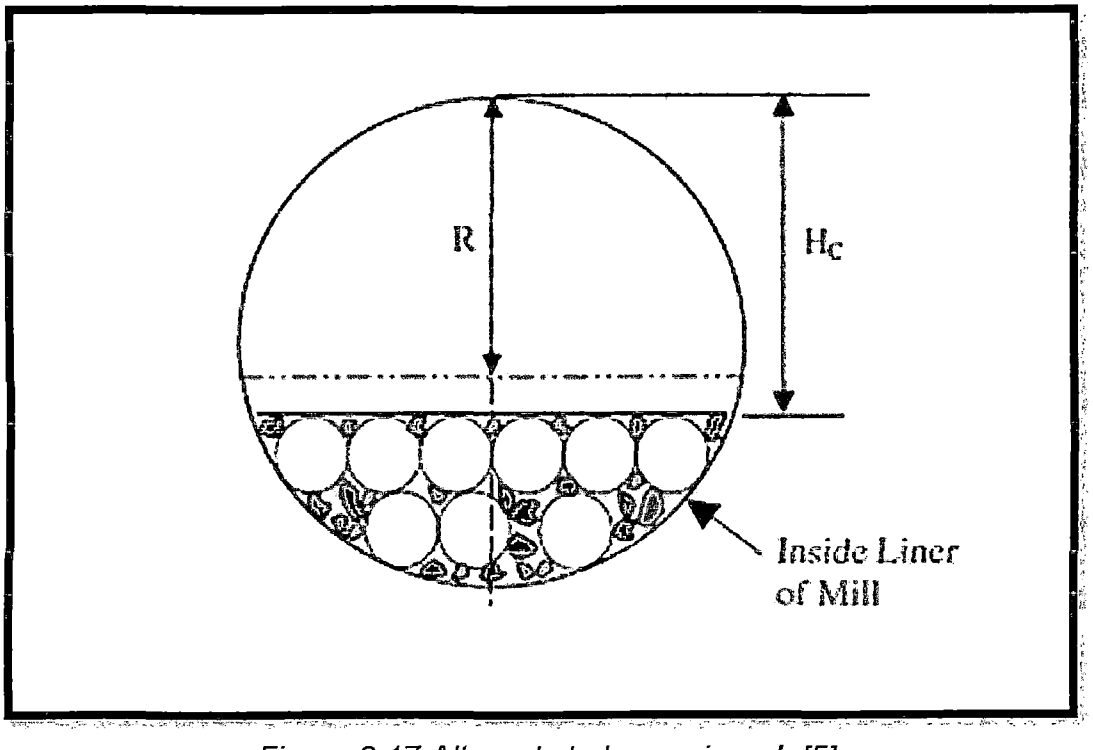

Figura 2.17 Altura de bolas y mineral. [5]

Sin embargo, Morrell demostró errores que se encuentran en la ecuación (de bond) para pequeñas cargas de bolas, menor que alrededor del 20%.

Mientras la altura de carga (y por lo tanto el volumen ocupado) puede ser fácilmente medido como se muestra en la figura 2.17, pero puede ser conveniente en algunos casos el medir la altura de la carga desde las dimensiones mostradas en la figura 2.18.

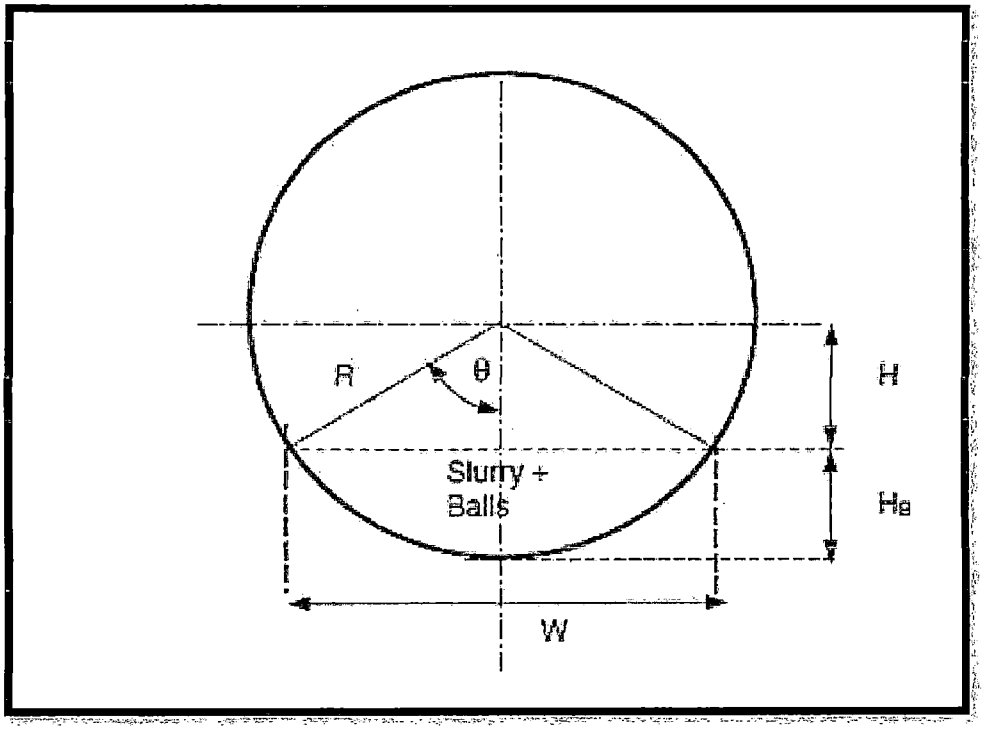

Figura 2.18 Medida de la altura del lecho. [5]

En este caso la altura del lecho H_B, es tomada desde la base del molino. Esta altura será dada por la ecuación:

$$H_B = R(1 - \cos\theta) \qquad (2.17)$$

$$W = 2R\sin\theta \qquad (2.18)$$

Como es difícil el medir el Angulo θ en la práctica, es más conveniente eliminarlo de la ecuación 2.15 y 2.16. La altura de cama puede luego ser escrita en términos de radio y largo W, de la carga en el molino como:

$$R = 0.5\,H_B + 0.125\,W^2/H_B \qquad (2.19)$$

La fracción del volumen del molino ocupado por la carga puede ser también calculada por el área transversal de la carga y del molino. Una aproximación del área de sección transversal de la carga del molino, A_C, (semento de un círculo) será:

$$A_C \approx \frac{H_B}{6W}(3{H_B}^2 + 4W^2) \qquad (2.20)$$

El área de sección transversal del molino es πR^2, el volumen fraccional de llenado por la carga seria:

$$J_B = \frac{A_C}{\pi R^2} \qquad (2.21)$$

$$J_B = \frac{H_B}{6W}(3{H_B}^2 + 4W^2).\frac{1}{\pi R^2} \qquad (2.22)$$

Por simple geometría, el segmento del círculo es también dado por la ecuación

$$A_C = R^2\cos^{-1}\left(\frac{H}{R}\right) - H\sqrt{R^2 - H^2} \qquad (2.23)$$

Y desde una simple relación de la figura 2.17 y 2.18

$$H_C = R + H = D - HB \qquad (2.24)$$

$$H = R - H_B \qquad (2.25)$$

$$W = 2\sqrt{R^2 - H^2} \qquad (2.26)$$

2.3.3. Potencia

El cálculo de la potencia en molinos rotatorios ha sido estudiado por varios investigadores en las últimas décadas, por lo tanto a continuación se mencionara la formulación de algunos autores de dicho cálculo.

Conforme Bond [2], la potencia en un molino de bolas puede ser calculada conforme a la ecuación 2.27:

$$kW_b = 2{,}8\, D^{0.4}(3{,}2 - 3V_P) * CS * \left(1 - \frac{0{,}1}{2^{9-10CS}}\right) \qquad (2.27)$$

Donde:

kW_b = Potencia en kW por tonelada corta (907 kg) de bolas en el molino
D = Diámetro interno del molino, en pies
V_p = Porcentaje del volumen de molino cargado con bolas
CS = Porcentaje de la velocidad critica

Conforme Rowland [5], la potencia en un molino de bolas puede ser calculada conforme a la ecuación 2.28:

$$kW_b = 4{,}879 D^{0.3}(3{,}2 - 3V_P)CS\left(1 - \frac{0{,}1}{2^{9-10CS}}\right) + S_s \qquad (2.28)$$

Donde:

kW_b = potencia en kW por tonelada de bolas en el Molino
D = diámetro interno del molino, en metros
V_p = porcentaje del volumen de molino cargado con bolas
CS = porcentaje de la velocidad critica
S_s = factor de tamaño de bolas

El factor de tamaño de bolas S_s utilizadas se puede calcular de acuerdo con la siguiente ecuación 2.29

$$S_s = 1{,}102\left(\frac{B - 12{,}5D}{50{,}8}\right) \qquad (2.29)$$

Donde:

S_s = Factor de tamaño de bolas

B = tamaño de bolas, en mm

D = diámetro interno del molino, en metros

Según Hogg y Fuerstenau [14] la potencia neta demandada de un molino convencional de bolas puede ser estimada por un modelo simple, descrito en su trabajo, y J. Sepúlveda [16,17] expande dicha fórmula original de Hogg y Fuerstenau para representar la contribución independiente de cada componente de la carga del molino (bolas y pulpa) para el total de consumo del molino:

$$P_{liq.} = \eta P_{inst.} = 0{,}238D^{3{,}5}\left(\frac{L}{D}\right)N_C\rho_{ap}(J - 1{,}065J^2)sen\alpha \qquad (2.30)$$

Donde:

$P_{liq.}$ = Potencia neta; kW

$P_{inst.}$ = Potencia instalada; kW

η = Eficiencia de transmisión eléctrica y de potencia; %

D = Diámetro interno del molino, en pies

L = Longitud efectiva del molino, en pies

N_C = Fracción de la velocidad critica: Ncrit = 76,6 / $D^{0,5}$

J = Llenado volumétrico parcial aparente, en porcentaje (incluyendo las bolas y los huecos intersticiales entre las bolas). En casos especiales, particularmente con molinos con descarga por rebose (overflow) operando con baja carga de bolas, deben también ser incluidos como parte del volumen aparente el exceso de pulpa que pudiera acumularse en la parte superior de las bolas de carga. Esto se refiere al desbordamiento de la pulpa, para distinguir la pulpa

intersticial que, por definición, está limitada a los huecos disponibles entre las bolas;

α = Ángulo de elevación de carga (define la posición dinámica del centro de gravedad de la carga en el molino con respecto a la dirección vertical). Normalmente entre 35° a 40 °;

ρ_{ap} = Densidad aparente de carga (ton/m^3). Esta puede ser estimada basado en los componentes de la carga (bolas, relleno intersticial del desbordamiento de la pulpa y la pulpa), como se muestra en la Ecuación 2.31

$$\rho_{ap} = \frac{\{(1-f_v)\rho_b J_b + \rho_p J_p f_v J_b + \rho_p (J - J_b)\}}{J} \qquad (2.31)$$

Donde

f_v = Volumen (%) de vacíos intersticiales entre las bolas (típicamente se asume ser 40% del volumen aparente ocupado por las bolas)

J_b = Llenado aparente de bolas (%) (Incluyendo bolas, pulpa y vacíos intersticiales entre las bolas)

J_p = Llenado intersticial de la pulpa (%) corresponde a la fracción intersticial de huecos disponible (entre las bolas de carga) efectivamente ocupada por las partículas de finos;

ρ_p = Peso específico de pulpa (ton/m^3)

2.4. TEORÍAS MODERNAS DE CONMINUCIÓN

2.4.1. Hipótesis de Molienda de Primer Orden

La aplicación del modelo de balance poblacional en el proceso de molienda se basa en la hipótesis de que el molino es un reactor bien mezclado que contiene una masa "W" de partículas que experimentan eventos de fractura mientras el molino se encuentra en operación, y tales partículas se encuentran distribuidas en intervalos geométricos de tamaño de $\sqrt{2}$ o $\sqrt[4]{2}$ [9,12 ,17].

Y al considerar que la alimentación inicial del molino está limitada por partículas dentro de un intervalo de tamaño mayor, numerado como intervalo 1, entonces

la condición inicial es $w_1(0) = 1$. Esta alimentación se muele por un intervalo de tiempo t_1, se muestrea el producto para determinar por tamizaje la fracción en peso que permanece en el intervalo de tamaño original y es retornando la muestra al molino para reanudar su operación por un intervalo de tiempo adicional t_2, repitiendo todo el procedimiento. Parecería razonable que la velocidad de desaparición de la masa de la fracción de tamaño 1 concuerde con una ley de primer orden, esto es:

$$\frac{d[w_1(t)W]}{dt} \propto -w_1(t)W$$

Como la masa retenida en el molino W es constante, resulta:

$$\frac{dw_1(t)}{dt} = -S_1 w_1(t) \qquad (2.32)$$

Donde S_1 es una constante de proporcionalidad que recibe el nombre de ***velocidad especifica de fractura (o más conocida como función selección)*** y tiene unidades de t^{-1}. Entonces, si S_1 no varía con el tiempo, integrando la ecuación (2.32) sujeta a la condición inicial $w_1(0)$ se da la expresión:

$$w_1(t) = w_1(0)\exp(-S_1 t)$$

Siendo $w_1(0)$ la fracción másica inicial de partículas en el intervalo 1. Se debe reconocer que no hay una razón fundamental de porque la hipótesis de primer orden debiera cumplirse; sin embargo, ello ocurre muy frecuentemente en la práctica

Cuando se tiene una distribución de tamaño de partículas se requiere un concepto adicional a los "S_i" (función selección) para completar la caracterización del sistema. En efecto, para un evento de fractura primaria se debe definir la fracción másica de partículas inicialmente en la clase "j" de tamaño que genera fragmentos en la clase "i" de tamaño; tal parámetro se denota por "b_{ij}" función fractura.

2.4.2. Formulación del modelo de molienda batch.

El balance diferencial de masa se entiende fácilmente mediante uso de la figura siguiente que representa la situación del molino en un instante t y un instante posterior $t + dt$.

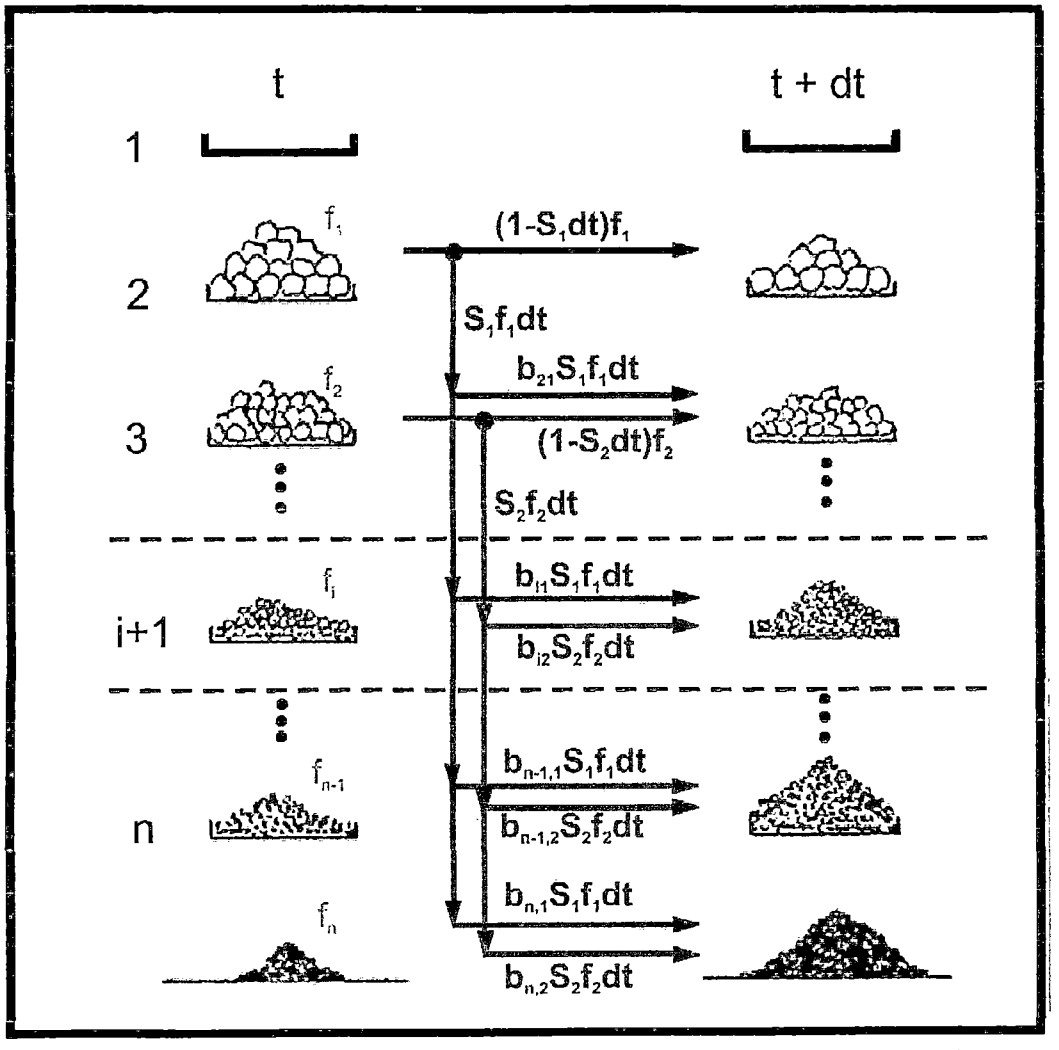

Figura 2. 19. Representación esquemática de los eventos de fractura y generación de fragmentos entre t y dt en un molino Batch. [12,17]

Matemáticamente:

$$\frac{df_i(t)}{dt} = -S_i f_i(t) + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j f_j(t) \qquad (2.33)$$

Donde $f_i(t)\ y\ f_j(t)$ representa la fracción de masa del tamaño de abertura "i" y "j" *presentes en el molino en un tiempo* "t" *respectivamente*; b_{ij} *es la función* fractura y S_i es la función selección del material en el intervalo "i".

Actualmente se conoce la solución analítica de este complejo sistema de ecuaciones diferenciales. Asumiendo que los parámetros S_i y b_{ij} no varían con el tiempo, se da una solución general del sistema, llamado "modelo lineal" [15,17], el cual puede ser expresado en su forma matricial como:

$$f = T * J * T^{-1} * f^o \qquad (2.34)$$

Donde "T" es una matriz triangular inferior $(n\ x\ n)$, cuyos elementos T_{ij} están dado por:

$$T_{ij} = \begin{cases} 0 & ,si \quad i < j \\ 1 & ,si \quad i = j \\ \sum_{j=k}^{i-1} \frac{b_{ik} * S_k}{S_i - S_j} * T_{kj} & ,si \quad i > j \end{cases} \qquad (2.35)$$

Mientras que "J" es una matriz diagonal $(n\ x\ n)$, cuyos elemetros J_{ij}están dado por:

$$J_{ij} = \begin{cases} 0 & ,si \quad i \neq j \\ \exp(-S_i * t) & ,si \quad i = j \end{cases} \qquad (2.36)$$

Y donde además el vector f^o corresponden al vector de alimentación $(t = 0)$y el vector f representa al vector de descarga $(t = t)$

2.4.3. La energía especifica como variable controlante de la molienda Modelo Herbst y Fuerstenau

Según el modelo propuesto por Herbst y Fuerstenau [17], propone que en la práctica se ha observado que los valores de la función de selección "S_i" presentan relaciones de proporcionalidad con la potencia absorbida por el molino en forma de la ecuación:

$$S_i = S_i{}^E * \frac{P}{H} \qquad (2.37)$$

Donde:

$S_i{}^E$ = Función selección especifica (que es independiente de las condiciones geométricas u operacionales del molino)

H = Masa del material contenida en el molino.

P = Potencia Neta consumida.

Donde "P" es la potencia neta consumida y "H" es la masa contenida en el molino.

Ahora si el consumo especifico de energía E; está dado por la expresión:

$$E = \frac{P * t}{H} \qquad (2.38)$$

al reemplazar la ecuación (2.37) en (2.36), se obtiene:

$$S_i = S_i{}^E * \left(\frac{P}{H}\right) = S_i{}^E * \left(\frac{E}{t}\right) \qquad (2.39)$$

De donde:

$$S_i * t = S_i{}^E * E \qquad (2.40)$$

Lo cual constituye la relación clave, para expresar el modelo cinético de molienda Batch en su forma normalizada:

$$\frac{df_i(E)}{dE} = -S_i{}^E f_i(E) + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j{}^E f_j(E) \qquad (2.41)$$

La ecuación constituye el modelo de molienda Batch expresada en función de la Función selección específica "$S_i{}^E$", la solución de dicha ecuación debido a su similitud en su forma lineal es:

$$f = T * J * T^{-1} * f^o \qquad (2.42)$$

Siendo T_{ij}:

$$T_{ij} = \begin{cases} 0 & ,si \quad i < j \\ 1 & ,si \quad i = j \\ \sum_{j=k}^{i-1} \frac{b_{ik} * S_k{}^E}{S_i{}^E - S_j{}^E} * T_{kj} & ,si \quad i > j \end{cases} \qquad (2.43)$$

Y "J_{ij}" :

$$J_{ij} = \begin{cases} 0 & ,si \quad i \neq j \\ \exp(-S_i{}^E * E) & ,si \quad i = j \end{cases} \qquad (2.44)$$

2.4.4. Estimación de Parámetros de Fractura

2.4.4.1 Función selección

Como se vio anteriormente la función selección se define como la velocidad fraccional a la cual se trituran las partículas retenidas en una malla 'i', es decir la fracción de partículas que se fracturan por kWh (tiempo).

La función Selección está representado por la siguiente relación (2.45) [17]:

$$S_i^E = \frac{\alpha_0 * (d_i^*)^{\alpha_1}}{1 + \left(\frac{d_i^*}{d_c}\right)^{\alpha_2}} \qquad (2.45)$$

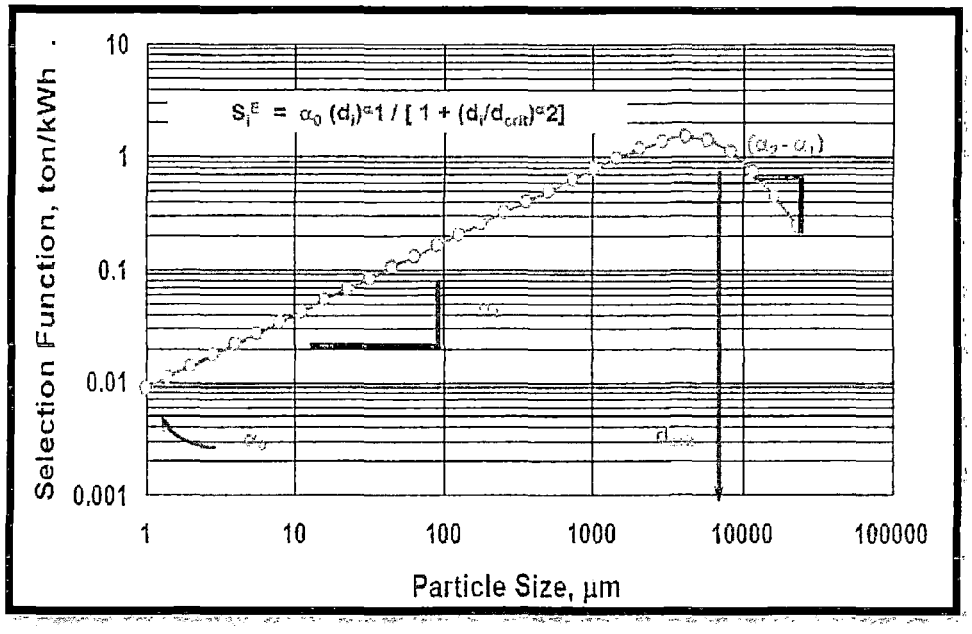

Figura 2. 20. Representación esquemática de la Funcion Selección. [17,20]

2.4.4.2 Función Fractura

La función fractura denota la fracción de los fragmentos de las partículas retenidas en la malla 'j' que resultan retenidas a la malla 'i', como consecuencia de un evento dado de fractura.

La función fractura está representado por la siguiente relación (2.46):

$$B_{ij} = \beta_0 * \left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{\beta_1} + (1-\beta_0) * \left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{\beta_2} \quad (2.46)$$

2.4.4.3 Estimación de los parámetros de fractura

Existen 3 métodos de estimación, los cuales son:

- Estimación de parámetros con ensayos de laboratorio con mono-tamaños.
- Estimación de parámetros por regresión no-lineal.
- Estimación de parámetros por el método simplificado.

De los métodos antes mencionado, en este trabajo de tesis se optó por utilizar el método de estimación de parámetros por regresión no-lineal, debido sus ventajas en comparación de los otros métodos [17], y este método prevé resultados con una precisión aceptable.

Este método se basa en la búsqueda óptima de parámetros de la función selección y fractura (ecuación 2.45 y ecuación 2.46); para la función selección $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ y d_c y para la función fractura β_0, β_1 y β_2; y esto se logra a través de técnicas de regresión no lineal.

La función objetivo utilizada es la minimización por mínimos cuadrados [11], ecuación 2.47.

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left[F_{i_{exp}} - F_{i_{mod}}\right]^2 \quad (2.47)$$

Donde:

$F_{i_{exp}}$ = Porcentaje pasante acumulado experimental en la posición "i"

$F_{i_{mod}}$ = Porcentaje pasante acumulado simulado en la posición "i"

El problema de minimización es planteado como se observa en la figura 2.21:

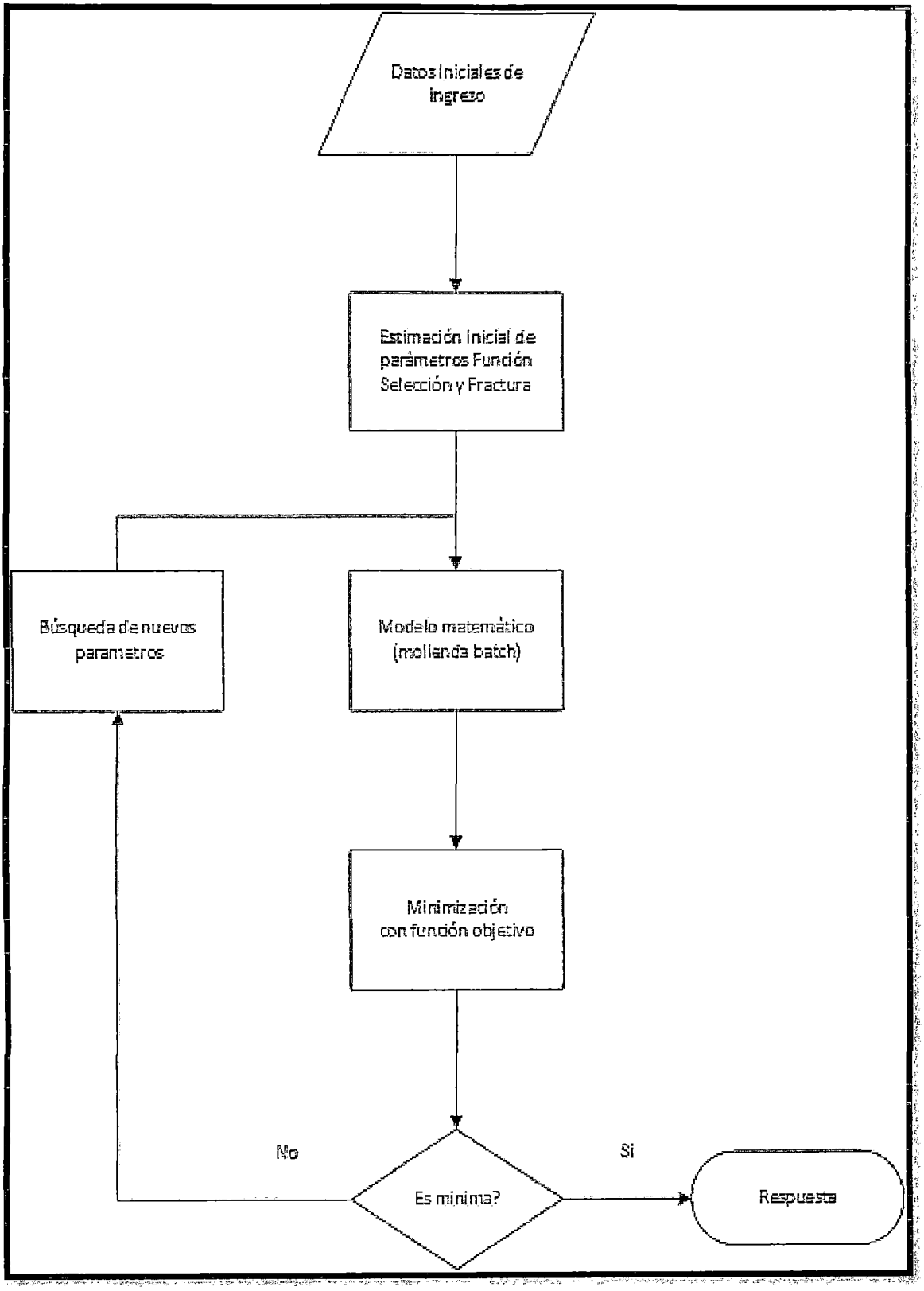

Figura 2. 21 Estructura logica de la rutina de estimacion de parametros funcion selección y fractura

CAPITULO III

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

3.1. Procedimiento experimental

Para poder evaluar la influencia de las condiciones de operación (Nivel de llenado y Porcentaje de velocidad critica) en el molino a través de simulación, se debe realizar la determinación de la función selección y fractura del mineral, así como su respectivo estudio mineralógico, puesto que estas son características inherentes de cada mineral.

Para la realización de las pruebas de simulación y determinación de parámetros, se implementó un programa para determinar dichas funciones de fractura, de acuerdo a la bibliografía revisada. Para mayor detalle revisar (Anexo A y D)

El la Figura 3.1 se puede observar el algoritmo que sigue el programa descrito en el anexo A el cual se utilizó para determinar los parámetros de función selección y fractura. Los gráficos de las distribuciones granulométricos se grafican con el modelo Log – Cartesiano.

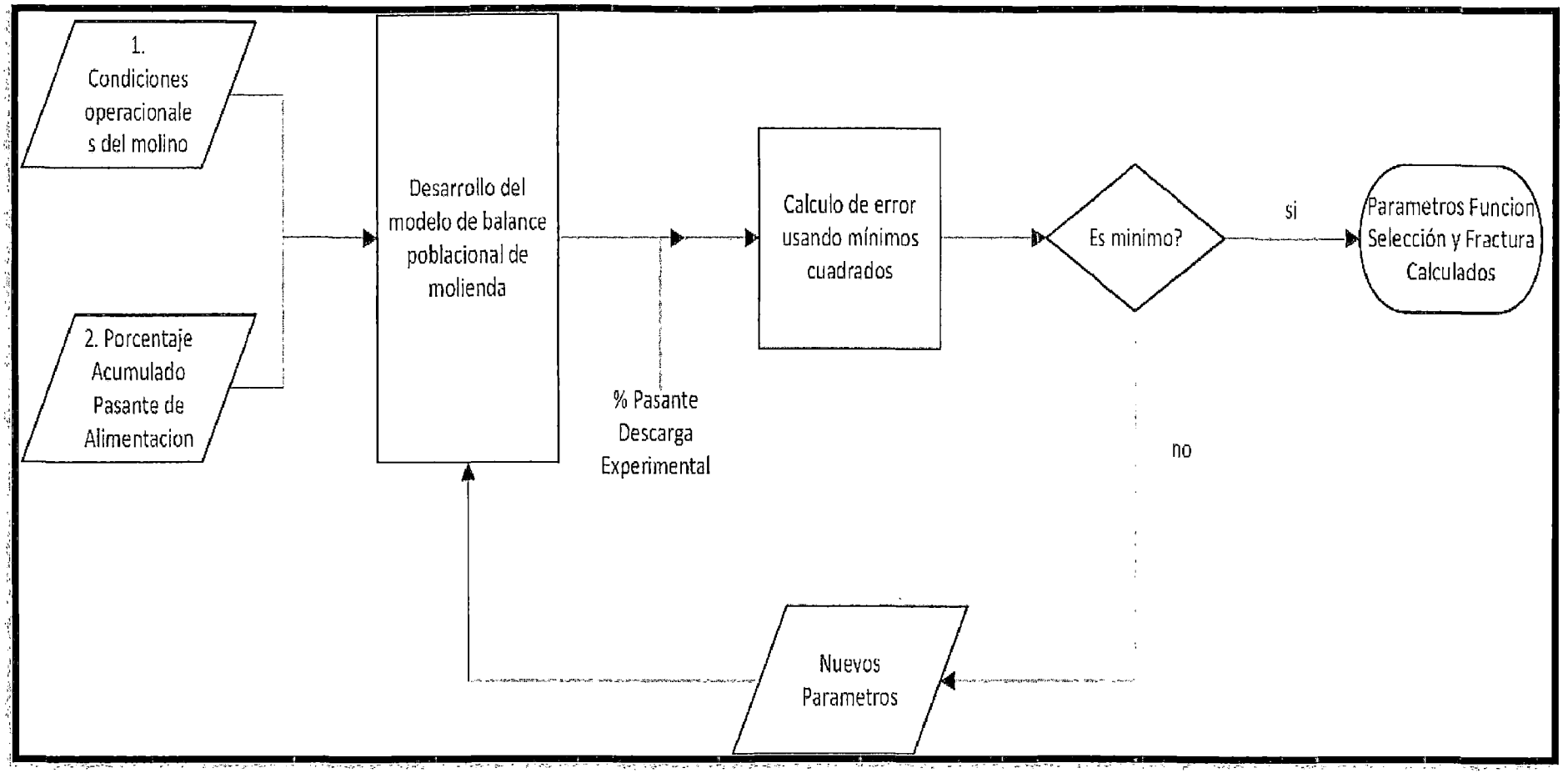

Figura 3. 1 Diagrama de flujo procedimiento de parámetros a encontrar

3.2. Análisis mineralógico

Descripción macroscópica:

La muestra es una mena mineral de color verde claro, aparentemente ha sido atacada con una substancia ácida, aparecen visiblemente granos finos diseminados de pirita en toda la muestra asociados con arcilla no determinada.

Estudio Microscópico.-

La muestra presenta la siguiente mineralogía:

Pirita (FeS2).

Este mineral se presenta en cristales, con formas diferentes algunos de ellos son de aspecto euhedral con 4 lados perfectos que representan su forma cubica de cristalización (Figura 3.2(a)) también se puede observar pequeños individuos en formas de agujas y en granos finos granulares cuyas formas van de euhedrales a subhedrales algunos con lados perfectos y rectos que se desarrollen en una matriz de ganga de cuarzo y arcillas esta última familia de piritas sus tamaños varían entre 30 y 400 micrones. Otros se encuentran en megacristales que alcanzan los 3000 micrones de tamaño con sus bordes sinuosos que probablemente tengan un origen de corrosión ácido, hasta alcanzar formas en golfos de corrosión (Figura 3.2(b)). Finalmente otra familia de pirita se encuentran formando la matriz de la mena en cristales pequeños rotos y angulosos formando texturas de tipo brecha (Figura 3.2(c))

Esfalerita (ZnFe) S. Están como inclusiones en la pirita (Figura 3.2(b)) son bastante pequeños y escasos, presentan texturas de asociación simple con la calcosina.

Calcopirita CuFeS2. Este mineral solo se encuentra como inclusiones dentro de la pirita, son muy escasos y no se encuentran en individuos simples, para genéticamente serían unos de los primeros en formarse.

Calcosina Cu2S.- Dentro de los minerales de sulfuros de cobre es el más abundante, se presentan en finas asociaciones con la esfalerita (Figura 3.2(b)), también están en pequeñas venillas de grano fino asociados a la pirita, también formando la matriz de las zonas de brechas de la pirita (Figura 3.2(c)) y finalmente se desarrolla en amplias playas en una ganga de cuarzo-arcillas (Figura 3.2(e)(f)).

Interpretación

Aparentemente la roca ha sido afecta por soluciones ácidas que han transformado su carácter principal de cristalización y asociación tanto en la mena como en la ganga, sin embargo ha sido reconocidos sus principales minerales mena primarios y secundarios.

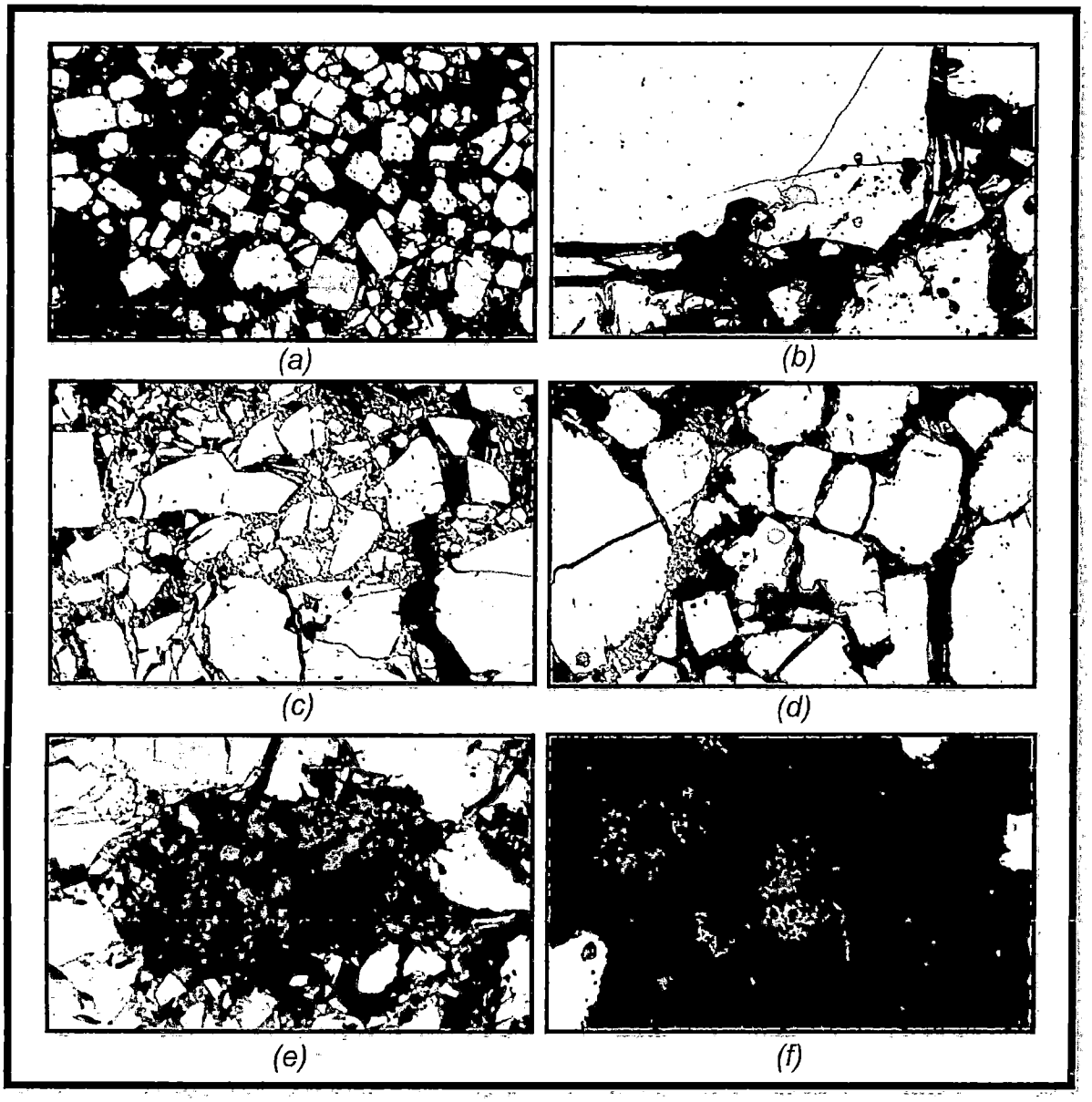

Figura 3. 2 Analisis mineralogico

3.3. Determinación de los parámetros de fractura (función selección y función fractura)

En esta parte del procedimiento experimental está enfocado en la determinación de los 2 parámetros necesarios para la simulación del mineral cuprífero (función selección y función fractura), cabe mencionar que este procedimiento puede ser utilizado para otros minerales.

El procedimiento fue el siguiente:

1. Se utilizó como muestra de cabeza un total de 8 kilogramos, de este obtuvo por cuarteo, 4 muestras de un kilogramo cada uno.

2. Se realizó un análisis granulométrico de la alimentación del molino la cual se realizó en húmedo para retirar los finos (malla 200) y posteriormente se secó la muestra y se realizó un análisis granulométrico.

3. Posteriormente se caracterizó el medio moledor (bolas de acero), la descripción de la mima se describe en la tabla 3.3.

4. Se realizó las pruebas de molienda estas fueron a 1, 2,4 y 8 minutos, en cada prueba de molienda se utilizó 1 kilogramo, las condiciones de operación se muestran en la tabla 3.2.

5. Posteriormente se realizó un análisis granulométrico en húmedo y seco, primero se retiró el material fino con la última malla a usar (en este trabajo se usó la malla 200), el material obtenido + m200 se secó y se realizó un análisis granulométrico en seco.

3.3.1. Preparación del mineral

El mineral en estudio es una mena de cobre, dicho mineral es chancado y tamizado a un 100% malla –10 (Fig. 3.3); posteriormente se realizó un cuarteo y luego se toma una muestra de 1 kg para realizar las pruebas posteriores.

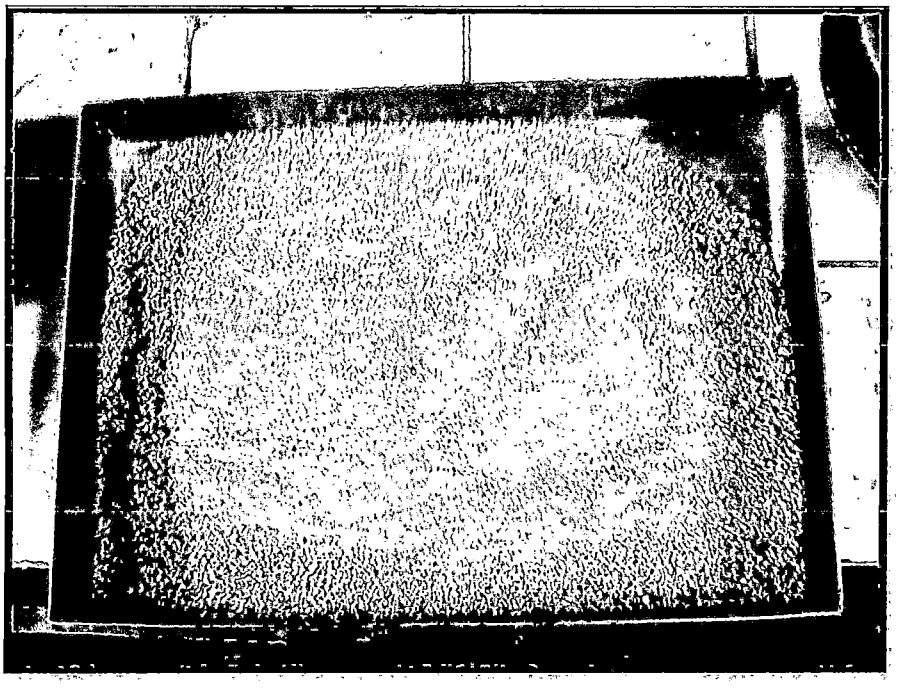

Figura 3.3. Mineral en estudio

Figura 3.4 Procedimiento de cuarteo

3.3.2. Análisis granulométrico de alimentación del molino

Se realizara un completo análisis granulométrico de la alimentación del molino, se usó un total de 12 mallas (tabla 3.1), estas tienen un abertura según el sistema Tyler (Ver Anexo C)

Tabla 3.1 Mallas utilizadas en el procedimiento experimental

Malla	Abertura
8	2 360
10	1 700
14	1 180
20	850
28	600
35	425
48	300
65	212
100	150
150	106
200	75

3.3.3. Equipo de molienda y condiciones de operación

El equipo a utilizar será un molino de bolas Batch a nivel laboratorio de dimensiones 8" x 12", sus características son descritas en la tabla (3.2).

En cuanto a los medios moledores se utilizó una distribución de tamaños como se observa en la tabla 3.3 el peso total del medio moledor es de 19,9 kg y el porcentaje de solidos con el que se trabajó del molino es de 67 porciento.

Tabla 3. 2 Características del molino y condiciones de operación

CONDICIONES DE OPERACIÓN	MEDIDA
Diámetro del molino (pulgadas)	8,00
Largo del molino (pulgadas)	12,00
Nivel de llenado (%)	43,21
Porcentaje Veloc. Crit. (%)	84,90
Potencia (kW)	0,049
Peso de la carga (kg)	1,00
Gravedad Especifica del mineral	2,85
Porcentaje de Solidos (%)	67,00
Peso de Agua Adicionada (kg)	0,49
Peso de carga moledora (kg)	19,90
Densidad aparente carga molino Ton/m^3	4,99
Fracción de espacios intersticiales (º/1)	0,40

Tabla 3. 3 Composición del collar de bolas

Tamaño	**3/4"**	**1"**	**1,5"**
Numero de Bolas	58	14	62
Peso por Bola (g)	69,0	114,3	230,6
Peso Total (g)	4 000	1 600	14 300
Porcentaje (%)	20,1	8,0	71,9

Con los parámetros de la tabla 3.2 y 3.3 se procede a realizar las pruebas de molienda, en total se realizaran 4 pruebas de molienda, todas en las mismas condición de operación; en cada prueba el tiempo de molienda será de 1, 2, 4, 8 minutos, después de cada evento de molienda se realizara un análisis granulométrico con las mallas descritas en la tabla (3.1).

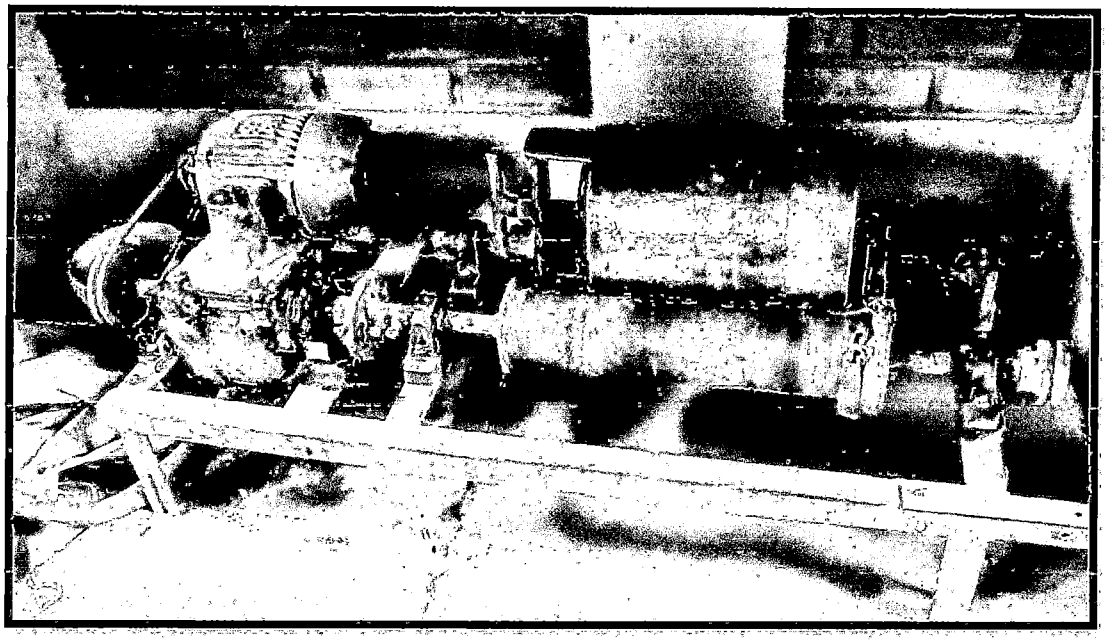

Figura 3. 5 Molino de laboratorio UNSA, 8"x12"

3.3.4 Análisis granulométrico descarga del mineral

Posteriormente realizados las pruebas de molienda; al descargar el mineral se realizara un tamizaje inicial sobre la malla 200 para eliminar finos (en húmedo), se secara la muestra, y posteriormente se realizara un análisis granulométrico en seco de cada muestra, este procedimiento se realizara para cada prueba de molienda señalada anteriormente.

3.3.5. Desarrollo del modelo

Una vez obtenidos los perfiles granulométricos de las pruebas de molienda se procedió a determinar los parámetros de función selección y función fractura; estos son determinados a través de técnicas de regresión no lineal con un programa diseñado para tal fin en lenguaje de programación Matlab, el cual sigue el algoritmo desarrollado por J.E. Sepúlveda (17) mostrado en la figura 3.1.

Los coeficientes determinados se muestran en la tabla 3.4; cabe mencionar que debido a su naturaleza no lineal del modelo utilizado, se vuelve una tarea difícil pero no imposible el determinar estos parámetros por regresión no lineal y esto se vuelve algo crucial debido a que estos determinan la precisión de la simulación.

Tabla 3.4 Parámetros de Fractura (Función Selección y Función Fractura)

Función Selección		Función Fractura	
alpha0	0,034 98	beta0	0,285 28
alpha1	0,646	beta1	0,55
alpha2	3	beta2	5
Dcrit	100 000		

3.3.6. Validación del modelo

Ya una vez encontrado los parámetros de función selección y función fractura, se procedió a realizar su validación, este consiste en realizar simulación de molienda a 4 minutos cambiando parámetros operativos, en este caso será el de nivel de llenado de pulpa de 49,2% a 73,1%, se compara los resultados y se verifico su margen de error.

3.4. Influencia de la variación de la velocidad crítica y nivel de llenado a través de simulación

3.4.1. Pruebas de simulación

Una vez validado el modelo, se procede a realizar una campaña de simulaciones, variando el porcentaje de velocidad crítica (de 65 – 85 %), el porcentaje de llenado de bolas en el molino de 20 a 40%, y por último el nivel de llenado de pulpa en los espacios intersticiales del medio moledor (40% a 100%).

3.4.2. Variación de la velocidad critica

En el presente trabajo se variara la velocidad critica dentro de un rango de 65% – 85% por ciento, los cuales son rangos característicos de operación, y se observa como tiene efecto estas variaciones sobre la granulometría del mineral molido (D80) y el consumo de energía del molino.

3.4.3. Variación del nivel de llenado del molino

La variación del nivel de llenado del molino por las bolas se encuentra en un rango de operación de 20 a 40 %, estos rangos de operación son descritos como rangos utilizados usualmente por las empresas mineras.

3.4.4. Variación del nivel de llenado de pulpa

En este tiene una variación de 40 a 100% de llenado de pulpa en los espacios intersticiales del medio moledor (bolas), en las empresas mineras este factor varía según el mineral a moler pero este es un rango característico.

CAPITULO IV
RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Determinación de los parámetros de fractura

La determinación de los parámetros de fractura (función selección y fractura) se realizó con el procedimiento de la figura 3.1; los resultados se muestran en la tabla 4.1

Como se observa en la tabla 4.1 los parámetros de fractura (función selección y función fractura) son los elementos importantes para poder realizar campañas de simulación de un mineral.

Tabla 4. 1. Parámetros de la función fractura y selección a partir de datos experimentales

Función Selección		Función Fractura	
alpha0	0,034 98	beta0	0,285 28
alpha1	0,646	beta1	0,55
alpha2	3	beta2	5
Dcrit	100 000		

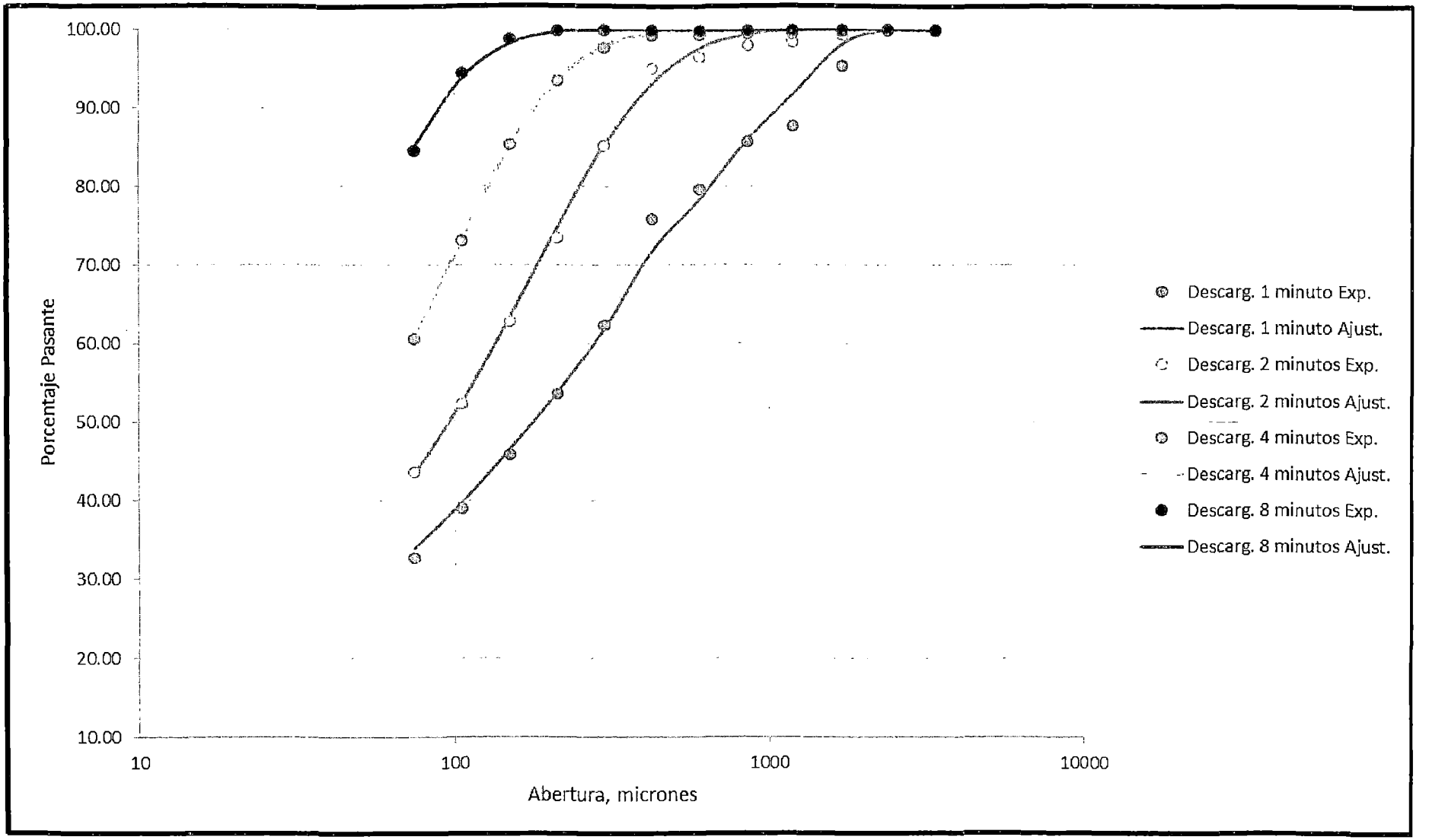

Figura 4. 1 Comparación de los datos experimentales con los simulados

4.2. Validación de los parámetros

Los parámetros calculados mostraron un margen de error (Tabla 4.2). Este margen de error es debido a la no linealidad, y posibles errores en los análisis granulométricos de las muestras. Pero a pesar de este margen de error es aceptable y se puede realizar las pruebas de simulación pertinentes.

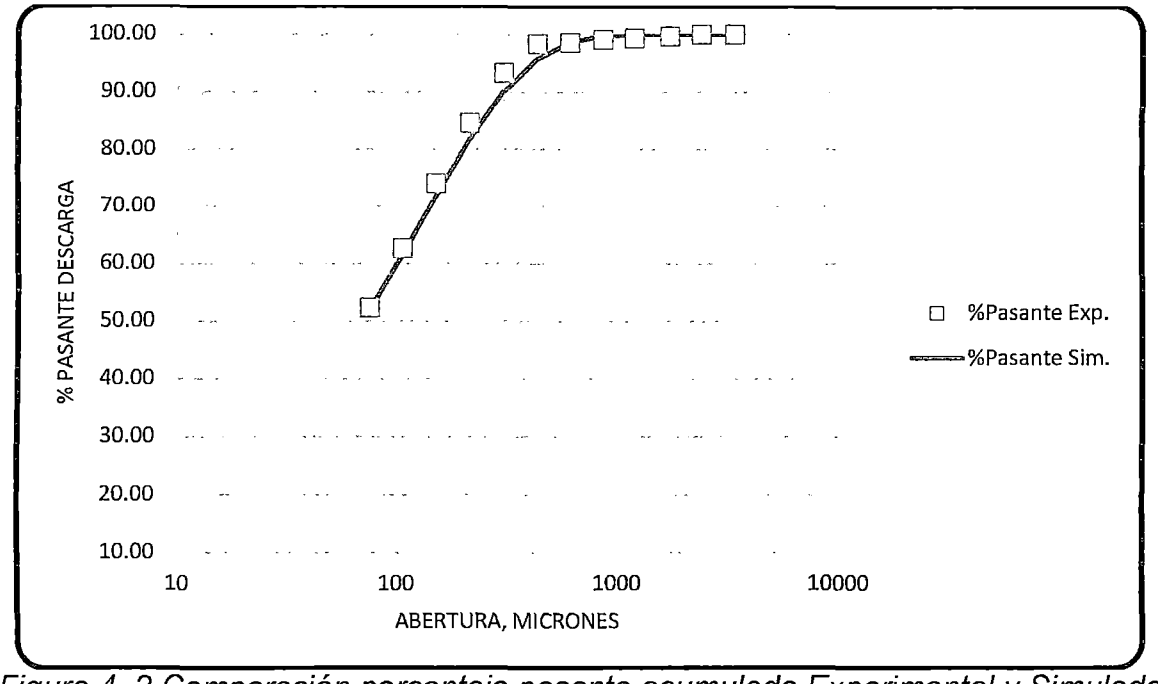

Figura 4. 2 Comparación porcentaje pasante acumulado Experimental y Simulado

Tabla 4. 2 Comparación Porcentaje pasante Experimental prueba de validación

Malla	% Pasante Experimental	% Pasante Simulado	SSE	SSR	SST
m6	100	100	0,000	132,116	132,116
m8	100	100	0,000	132,116	132,116
m10	99,72	100	0,078	125,758	125,836
m16	99,40	99,97	0,325	118,683	119,008
m20	99,17	99,74	0,325	113,724	114,049
m28	98,56	98,66	0,010	101,086	101,096
m35	98,33	95,73	6,760	96,514	103,274
m48	93,40	90,04	11,290	23,953	35,242
m65	84,55	81,65	8,410	15,649	24,059
m100	74,01	71,71	5,290	210,129	215,419
m150	62,57	61,51	1,124	672,667	673,791
m200	52,36	52,05	0,096	1 306,521	1 306,617
	SUMATORIA		33,708	3 048,916	3 082,624
	R^2			0,989	

Biblioteca Cs. Ingenierías Hemeroteca Universidad Nac. San Agustín

4.3. Influencia del porcentaje de la velocidad crítica

Como se puede observar en la figura 4.3 y en la tabla 4.3., el D80 disminuye a medida que aumenta el porcentaje de Velocidad Critica, observándose una variación de 133 micrones hasta 94 micrones en el caso de 40% de llenado de pulpa por ejemplo. Los valores de D80 más bajos se encuentran cuando la variable del porcentaje de la velocidad crítica es de 85% esto debe ser por el régimen en catarata el cual tiene mayor impacto y genera una mayor cantidad de finos.

Por otro lado la figura 4.4 y tabla 4.4, se puede observar que a medida que aumenta el porcentaje de la velocidad crítica aumenta la potencia consumida por el molino (figura 4.4) asimismo se observa que el consumo de energía aumenta hasta un 30%.

En los gráficos 4.3 y 4.4 señalan que la fineza del producto es inversamente proporcional a la potencia consumida por el molino al variar el porcentaje de la velocidad crítica.

Tabla 4.3 Variación en micrones del D80 con respecto al Porcentaje de la velocidad critica a diferentes niveles de llenado de Pulpa en los intersticios.

	65 %VC	70 %VC	75 %VC	80 %VC	85 %VC
100 %Jp	374	348	324	300	283
80 %Jp	296	275	256	239	222
60 %Jp	216	199	184	171	158
40 %Jp	133	122	111	102	94

Tabla 4.4 Variación de la Potencia [Watts] con respecto al Porcentaje de la velocidad critica a diferentes niveles de llenado de Pulpa en los intersticios.

	65 %VC	70 %VC	75 %VC	80 %VC	85 %VC
100 %Jp	40,3	43,4	46,5	49,6	52,7
80 %Jp	39,2	42,2	45,2	48,3	51,3
60 %Jp	38,1	41,1	44,0	46,9	49,9
40 %Jp	37,1	39,9	42,8	45,6	48,5

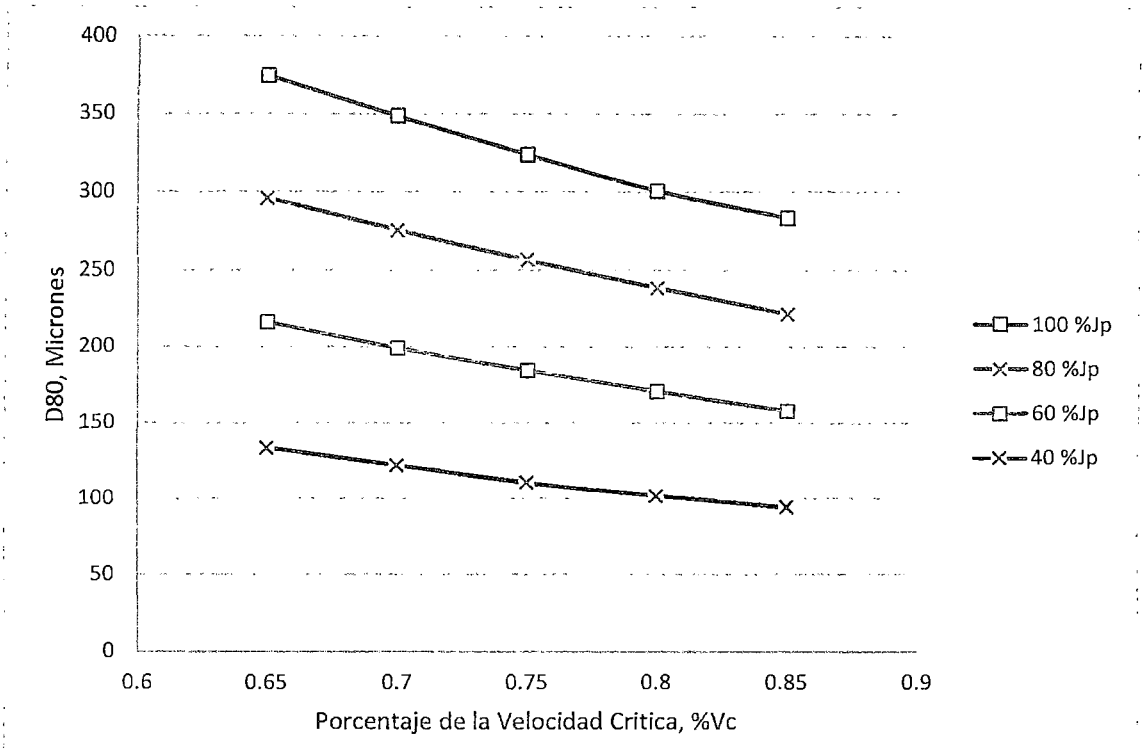

Figura 4. 3 Variación del D80 vs Porcentaje de la velocidad critica

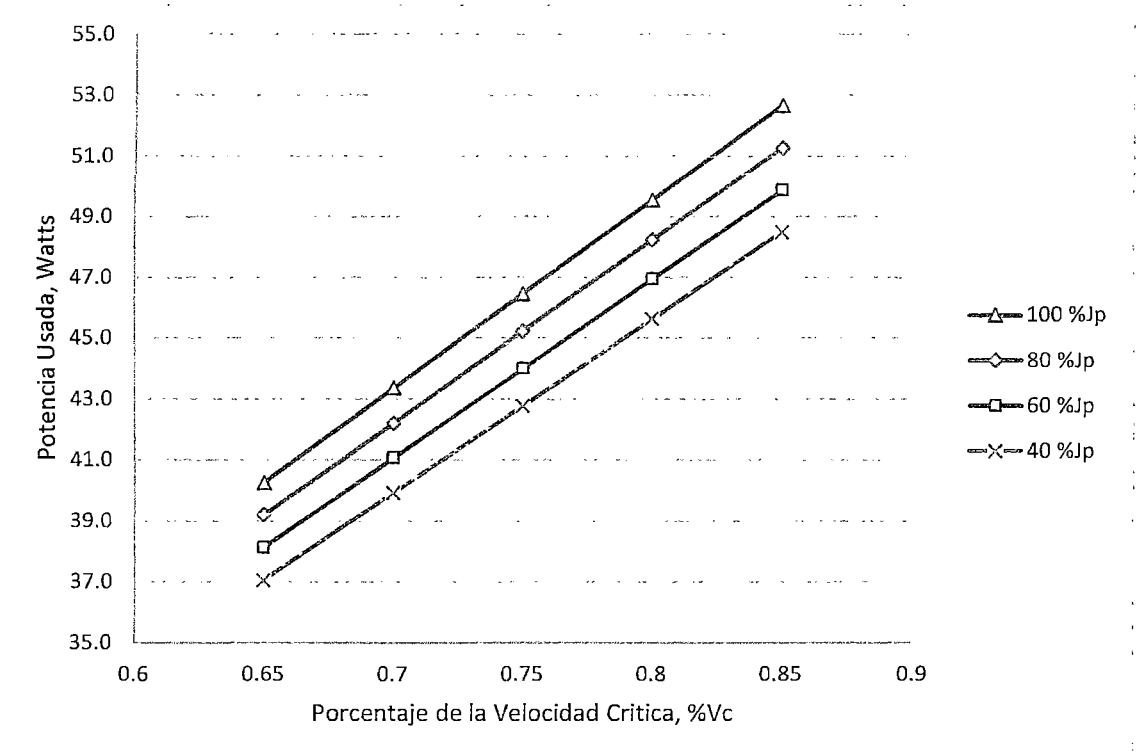

Figura 4. 4 Potencia del molino vs Porcentaje de la velocidad critica

4.4. Influencia del nivel de llenado del molino

4.4.1 Nivel de llenado de bolas en el molino

En la figura y tabla 4.5, el D80 de descarga tiende a aumentar con respecto al nivel de llenado de bolas del molino, esto es lo contrario con lo ya observado en la variación del porcentaje de la velocidad crítica (Fig. 4.3); esto nos indica que al aumentar el nivel de llenado del molino (que significa un aumento en la producción) se sacrifica la fineza del producto, pero gracias a la simulación de procesos se puede evaluar el parámetro optimo a escoger.

Por otro lado en la figura y tabla 4.6 se observa que la potencia del molino, desde el nivel bajo de llenado de bolas (20%) hasta el nivel superior (40%), presenta un incremento de hasta un 46%, este aumento es elevado y este cambio de potencia en plantas de molienda debería ser cuidadosamente evaluado con la potencia instalada del motor del molino.

Tabla 4.5 Variación en micrones del D80 con respecto al Porcentaje de llenado de bolas a diferentes niveles de llenado de Pulpa en los intersticios.

	20 % JB	25% JB	30 % JB	35 % JB	40 % JB
% 100 Jp	215	234	255	278	303
% 80 Jp	166	181	197	216	240
% 60 Jp	116	127	139	153	172

Tabla 4.6 Variación de la Potencia [W] con respecto al Porcentaje de llenado de bolas a diferentes niveles de llenado de Pulpa en los intersticios.

	20 % JB	25% JB	30 % JB	35 % JB	40 % JB
% 100 Jp	31,3	36,5	40,6	43,7	45,7
% 80 Jp	30,5	35,6	39,6	42,5	44,5
% 60 Jp	29,7	34,6	38,5	41,4	43,3

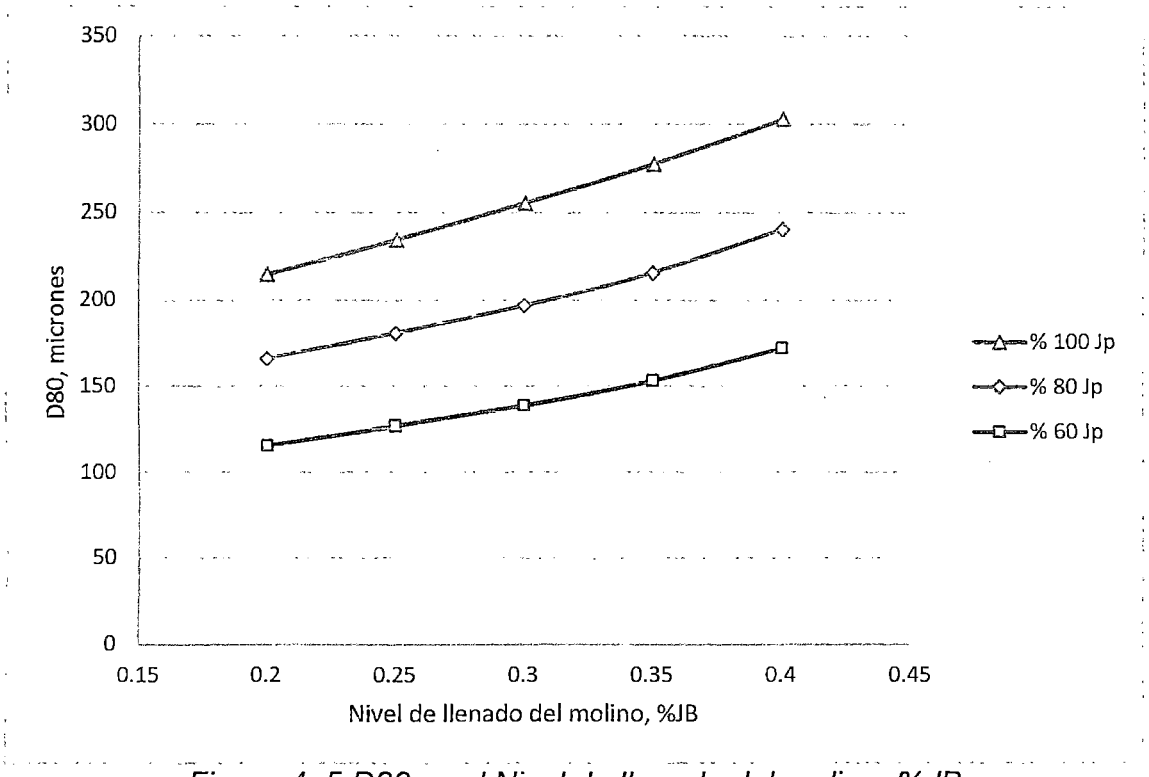

Figura 4. 5 D80 vs el Nivel de llenado del molino, %JB

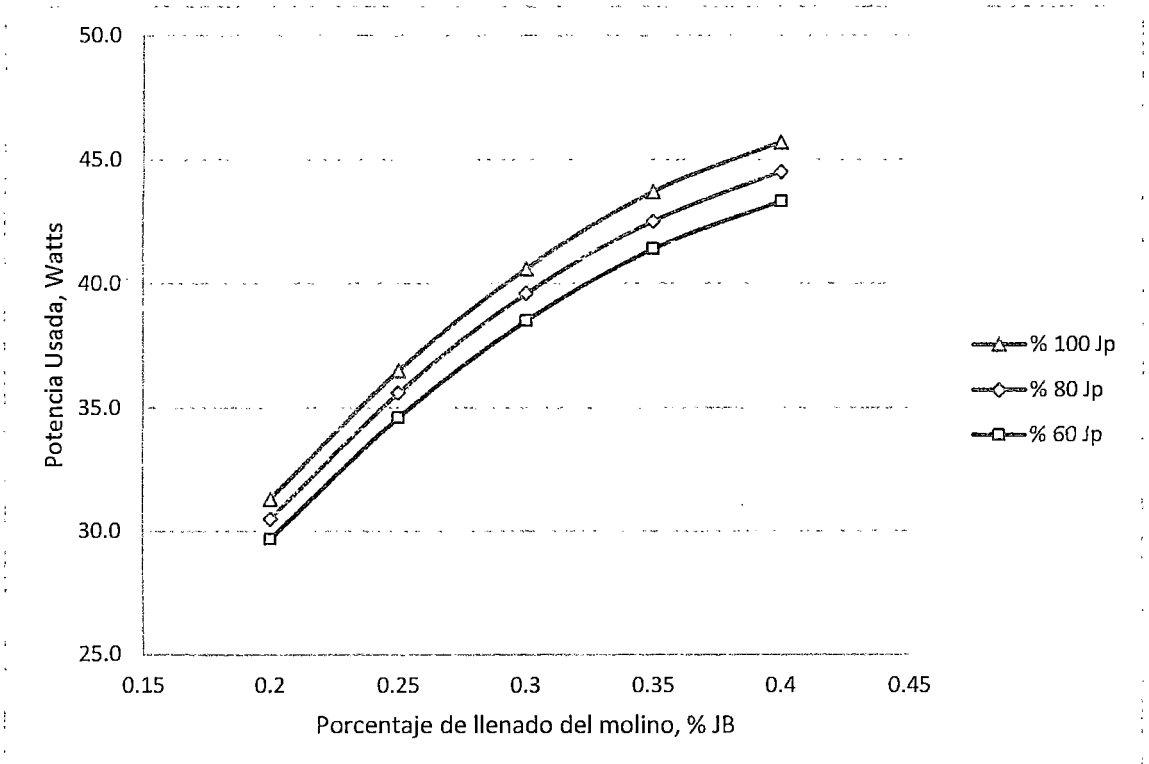

Figura 4. 6 Potencia del molino vs Porcentaje de llenado del molino

4.4.2 Nivel de llenado de pulpa en los intersticios

El D80 se ve afectada en gran medida por la variación del nivel de llenado de pulpa en los intersticios del medio moledor (fig. 4.7 y tabla 4.7) así en el caso de 65% de la velocidad critica, al aumentar el nivel de llenado de pulpa en los intersticios (de 40 a 100%) el D80 aumenta de 134 a un valor de 375 micrones; comparado anteriormente con las tablas 4.3 y 4.5, este es el parámetro que influye en mayor medida la fineza del mineral.

En la tabla 4.8 y figura 4.8, se observa que la potencia no incrementa de igual magnitud como en los anteriores parámetros evaluados, estos tienen hasta un máximo de 10% de aumento.

En este parámetro se observa cómo influye en mayor proporción el D80 a medida que aumenta el porcentaje de llenado de pulpa en los intersticios, pero este no tiene un gran efecto en la potencia del molino.

Tabla 4.7 Variación en micrones del D80 con respecto al porcentaje de llenado de pulpa en los intersticios a diferentes porcentajes de la velocidad critica.

	40% Jp	60% Jp	80% Jp	100% Jp
65 %VC	134	217	297	375
70 %VC	122	200	276	349
75 %VC	111	185	257	325
80 %VC	102	171	239	301
85 %VC	95	158	222	284

Tabla 4.8 Variación de la Potencia [W] con respecto al porcentaje de llenado de pulpa en los intersticios a diferentes porcentajes de la velocidad critica.

	40% Jp	60% Jp	80% Jp	100% Jp
85 %VC	48	50	51	53
80 %VC	46	47	48	50
75 %VC	43	44	45	46
70 %VC	40	41	42	43
65 %VC	37	38	39	40

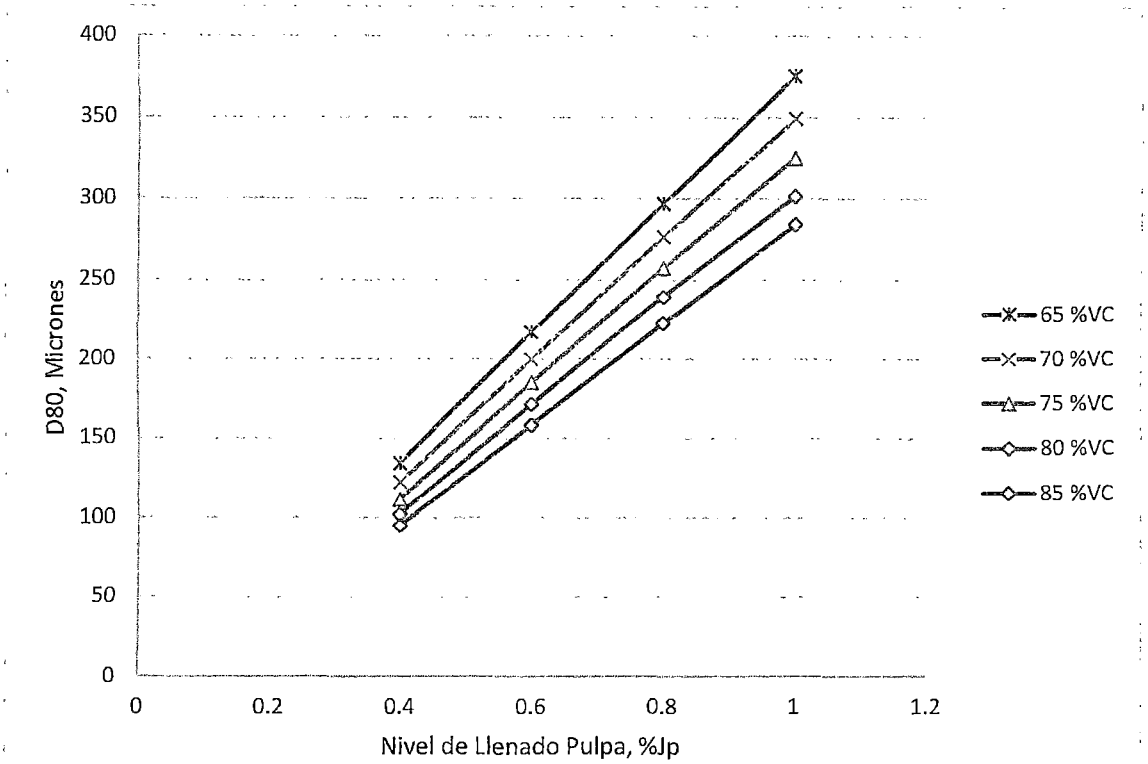

Figura 4. 7 D80 vs el nivel de llenado de pulpa

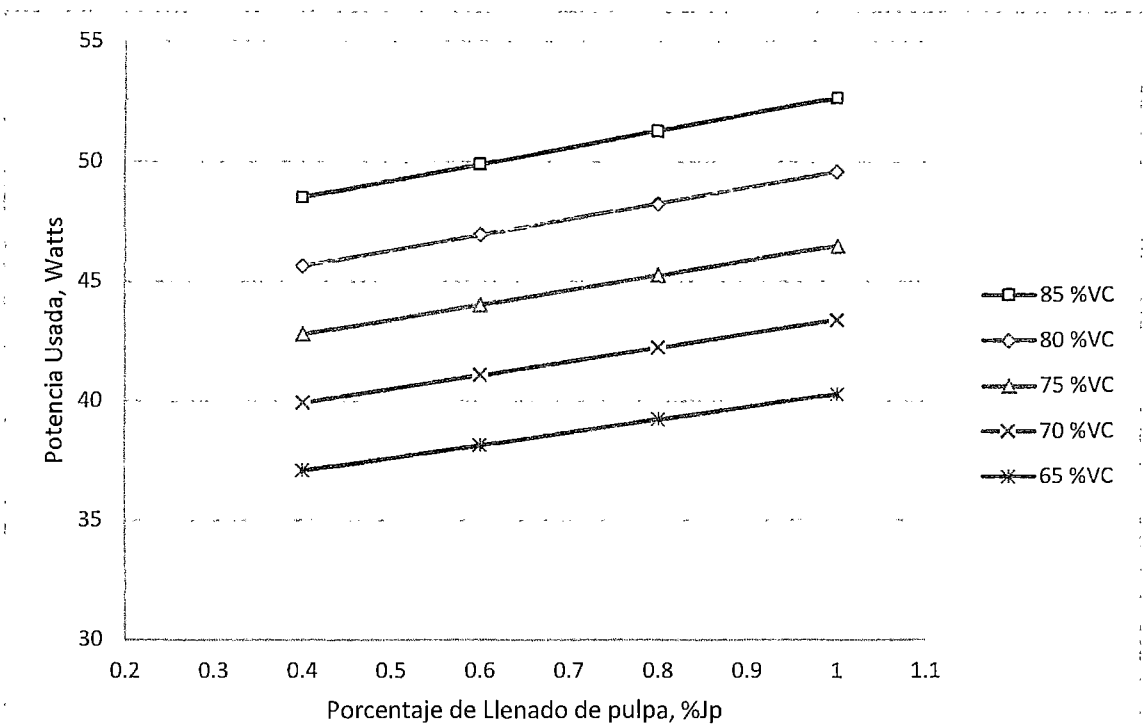

Figura 4. 8 Potencia usada del molino vs Porcentaje de llenado de pulpa en el molino

CONCLUSIONES

- A través de simulación de procesos se determinó la influencia en la granulometría (D80) y la potencia del molino al variar los parámetros de porcentaje de la velocidad crítica y el nivel de llenado del molino (de bolas y pulpa en los intersticios), en la molienda de un mineral cuprífero.

- El incremento del porcentaje de la velocidad crítica disminuye el D80 (un producto más fino), pero a medida que este aumenta la potencia demandada por el molino aumenta.

- El incremento del nivel de llenado del molino por bolas incrementa el D80, que es lo opuesto comparándolo con la variación del porcentaje de la velocidad critica, y a medida que aumenta el nivel de llenado del molino por bolas aumenta en mayor proporción la potencia del molino, se concluye que este afecta más en la potencia del molino comparándola con los otras variables de operación estudiadas.

- El parámetro de operación que afecto en mayor medida al D80 fue el nivel de llenado de pulpa en los intersticios, y este a su vez presenta la menor variación en potencia del molino.

- Se determinó la función Selección y función Fractura a través del método de regresión no-lineal, esta determinación de parámetros es necesaria para la simulación de molienda y estas deben ser determinadas para cada tipo de mineral diferente.

BIBLIOGRAFÍA

1. A.J. Lynch. (1980). *Circuitos de trituracion y molienda de minerales.* Madrid: Rocas y Minerales.
2. Bond, F. C. . (1961). Crushing & Grinding Calculations. *British Chemical Engineering*, 378-385, 543-548.
3. Carhuaz R., M. (s.f.). Avances en la optimizacion de circuitos de molienda y clasificacion por modelacion matematica.
4. D.W. Fuerstenau , A.-Z.M. Abouzeid . (2002). The energy efficiency of ball milling in comminution. *International Journal of Mineral Processing*, 161-185.
5. Denis Yan, Ashok Gupta . (2006). *Mineral Processing Design and Operation: An Introduction.* Elsevier Science.
6. Emilio Andrea Blanco (apuntes de clase). (2014). *Tecnología Mineralúrgica OpenCourseWare.* Universidad de Catambria.
7. Hukki, R. T. . (1962). Proposal for a Solomonic Settlement Between the Theories of von Rittinger, Kick, and Bond. *Trans. AIME, Vol. 223*, 403-408.
8. Jorge Cacéres N. (Apuntes de clase). *Metalurgia Extractiva - Programa de mineralogia y metalurgia.* Chile: Universidad de Aconcagua .
9. Leonard G. Austin, Fernando Concha A. (1994). *Diseño y simulacion de circuitos de molienda y clasificacion.* CYTED.
10. Maurice C. Fuerstenau, Kenneth N. Han. (2003). *Principles of Mineral Processing.* Society for Mining, Metallurgy, and Exploration.
11. Maxx Capece, Ecevit Bilgili, Rajesh Dave. (2011). Identification of the breakage rate and distribution parameters in a non-linear population balance model for batch milling. *Powder Technology Volume 208*, 195-204.
12. Menacho, J.M. (1988). *Diseño y optimizacion de sistemas industriales de molienda convencional y semiautogena .* Lima: Ingemmet.
13. Metso Process Technology. (2014). Online Course "Grinding 3 - Circuits".
14. R. Hogg and D. W. Fuerstenau. (1972). Power Relationships for Tumbling Mills. *Society of Mining Engineers, AIME*, 418-423.

15. Sanches, E. M. , Amauta, W. (1989). Solutions to the system of batch ball mill grinding equations. *Proceedings of the International Symposium on Computer Software in Chemical an Extractive Metallurgy*, 153 - 160.

16. Sepulveda J. E. (2004). Methodologies for the evaluation of grinding media consumption rates at full plant scale. *Minerals Engineering Volume 17*, 1269–1279.

17. Sepulveda J. E., Gutierrez L. (1986). *Dimensionamiento y optimización de plantas concentradoras mediante técnicas de modelación matemática.* Santiago, Chile: CIMM - Centro de investigacion minera y metalurgica.

18. Silva, A. C. (2003). Simulação de moagem implementada a partir do modelo de austin. *Universidade federal de ouro preto.*

19. Wills, B. A. (2006). Wills' Mineral Processing Technology (Seventh Edition) .

20. Yianatos, J. (s.f.). Beneficio de minerales "Conminucion". *Universidad Técnica Federico Santa María.*

ANEXOS

ANEXO A

DESARROLLO DE PROGRAMA PARA DETERMINACION DE PARAMETROS DE MOLIENDA Y SIMULACION DE MOLIENDA

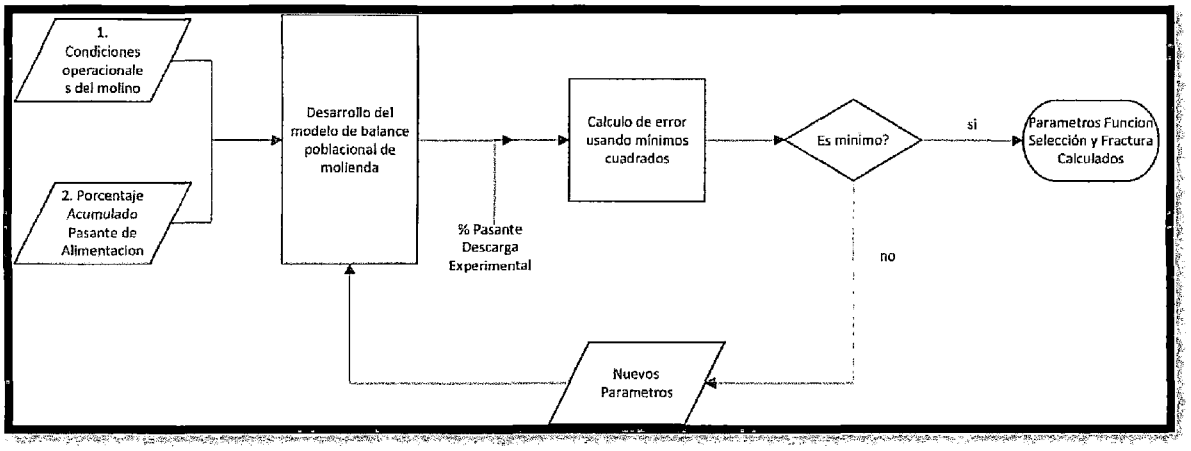

Figura A-1 Diagrama del programa para la determinación de parámetros

Programa determinación de parámetros Formulario

1. Diámetro del molino:	[ft]	= D
2. Largo del molino:	[ft]	= L
3. Peso del mineral :	[kg]	= M_m
4. Densidad del mineral :	[ton/m³] [kg/l]	= ρ_m
5. Porcentaje de Solidos :	[%]	= %Solidos
6. Peso del medio moledor:	[kg]	= M_B
7. Densidad medio moledor:	[ton/m³][kg/l]	= ρ_B
8. Espacios Intersticiales:	[°/1]	= f_v (0,3-0,4)
9. Potencia Neta:	[kW]	= P_{Net}
10. Tiempo de Molienda	[min]	= t
11. Porcentaje Velocidad Critica :	[%]	= $\%N_{crit}$

$$\%N_{crit} = \frac{N_{crit}}{N_c}$$

12. Velocidad Critica del molino:	[RPM]	=N_{crit}

$$N_{crit} = \frac{76{,}6}{\sqrt{D}}$$

13. Velocidad del molino [RPM] $= N_c$

$$RPM\ Molino = \frac{76.6}{\sqrt{D}} * \frac{\%N_{crit}}{100}$$

14. Peso de pulpa (Slurry weight): [kg] $= M_p$

$$M_p = \frac{M_m}{\%Solidos} * 100$$

15. Volumen de Pulpa (Slurry volumen): [l] $= V_p$

$$V_p = \frac{M_m}{\rho_m} + (M_p - M_m)$$

16. Densidad de Pulpa: [ton/m^3] $= \rho_p$

$$\rho_p = \frac{M_p}{V_p}$$

17. Volume de Bolas (Balls weight): [kg] $= V_B$

$$V_B = \frac{M_B}{(1 - f_v) * \rho_B}$$

18. Sobrellenado (Overfilling) , Volumen en Exceso:[l] $= V_E$

$$Si\ \ V_p > f_v * V_B, V_E = V_p - (f_v * V_B), V_E = 0$$

19. Volumen del molino (Mill volume): [l] $= V$

$$V = \frac{\pi}{4} * (0{,}305 * D)^2 * (0{,}305 * L) * 1\,000$$

20. Densidad Aparente de Carga (App. Charge Density): [ton/m^3] $= \rho_{ap}$

$$\rho_{ap} = \frac{M_B + M_p}{V_B + V_E}$$

21. Porcentaje de Llenado de carga (Charge Filling, %) : [%] = J

$$J = \frac{(V_B + V_E)}{V} * 100$$

22. Porcentaje Llenado de Bolas (Balls Filling,%): [%] = J_B

$$J_B = \frac{V_B}{V} * 100$$

23. Nivel llenado pulpa en espacios intersticiales entre bolas (Interstitial Slurry Filling, %) [%] = J_p

*Condicional $Si\ V_E > 0 \rightarrow J_p = 100\%$

$$J_p = \frac{V_p}{f_v * V_B} * 100$$

24. Potencia demandada bolas: [kW] = P_B

$$P_B = \frac{M_B}{(M_B + M_p)} * P_{Net}$$

25. Potencia demandad exceso de pulpa [kW] = P_E

$$P_E = \left(\frac{V_E * \rho_p}{M_B + M_p}\right) * P_{Net}$$

26. Potencia demandada pulpa, espacios intersticiales [kW] = P_P

$$P_p = \left(\frac{\left(\frac{J_p}{100}\right) * f_v * V_B * \rho_p}{M_B + M_p}\right) * P_{Net}$$

27. Energía Total por Tonelada Carga (Total Energy): [kWh/ton] = E

$$E = \frac{\left(\frac{t}{60}\right)}{\left(\frac{M_m}{1\,000}\right)} * P_{Net}$$

28. Energía por tonelada, Bolas, (Balls Energy): [kWh/ton] = E_B

$$E_B = \frac{\left(\frac{t}{60}\right)}{\left(\frac{M_m}{1\,000}\right)} * P_B$$

29. Función Selección Especifica (S_i^E)

$$S_i^E = \frac{\alpha_0 * (d_i^*)^{\alpha_1}}{1 + \left(\frac{d_i^*}{d_c}\right)^{\alpha_2}}$$

$$d_i^* = (d_i * d_{i+1})$$

30. Función fractura

$$B_{ij} = \beta_0 * \left(\frac{d_i}{d_{j+1}}\right)^{\beta_1} + (1 - \beta_0) * \left(\frac{d_i}{d_{j+1}}\right)^{\beta_2}$$

$$B_{ij} = \begin{cases} 0 & ;para\ i < j \\ 1 & ;para\ i = j \\ \beta_0 * \left(\frac{d_i}{d_{j+1}}\right)^{\beta_1} + (1 - \beta_0) * \left(\frac{d_i}{d_{j+1}}\right)^{\beta_2} & ;para\ i > j \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & ;para\ i \leq j \\ B_{i,j} - B_{i+1,j} & ;para\ i > j \end{cases}$$

31. Modelo de simulación de molienda Batch

$$f = T * J * T^{-1} * f^o$$

Siendo T_{ij}:

$$T_{ij} = \begin{cases} 0 & ,si \quad i < j \\ 1 & ,si \quad i = j \\ \sum_{j=k}^{i-1} \frac{b_{ik} * {S_k}^E}{{S_i}^E - {S_j}^E} * T_{kj} & ,si \quad i > j \end{cases}$$

Y "J_{ij}" :

$$J_{ij} = \begin{cases} 0 & ,si \quad i \neq j \\ \exp(-{S_i}^E * E) & ,si \quad i = j \end{cases}$$

32. Minimización de error por Suma de cuadrados de los residuos

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left[F_{i_{exp}} - F_{i_{mod}} \right]^2$$

ANEXO B

DETERMINACION DE PARAMETROS DE MOLIENDA

Tabla B-1, Alimentación pruebas de molienda determinación de parámetros

N° de Malla	Abertura µ	% Retenido	% Aculada Pasante
m6	3 350	0,00	100,00
m8	2 360	0,00	100,00
m10	1 700	13,93	86,07
m16	1 180	24,04	62,03
m20	850	4,66	57,36
m28	600	9,49	47,87
m35	425	4,11	43,76
m48	300	10,79	32,97
m65	212	5,42	27,54
m100	150	4,22	23,32
m150	106	3,99	19,33
m200	75	3,09	16,24
-m200	-75	16,24	

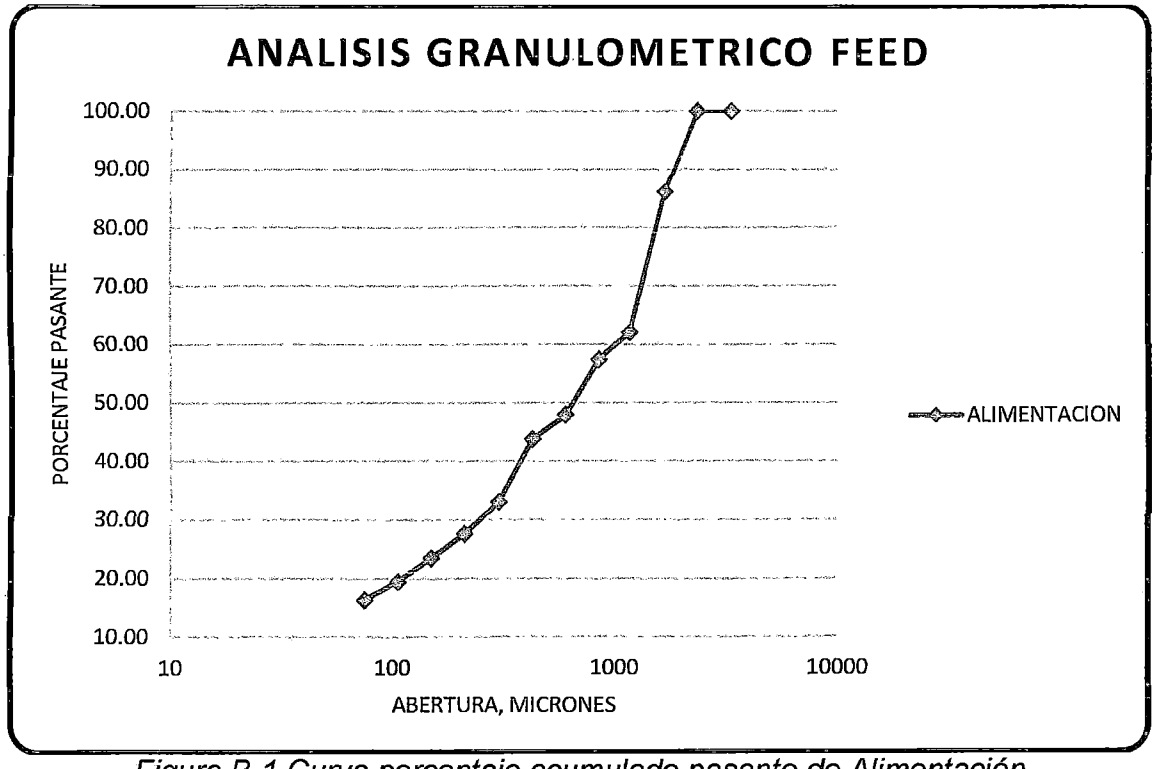

Figura B-1 Curva porcentaje acumulado pasante de Alimentación

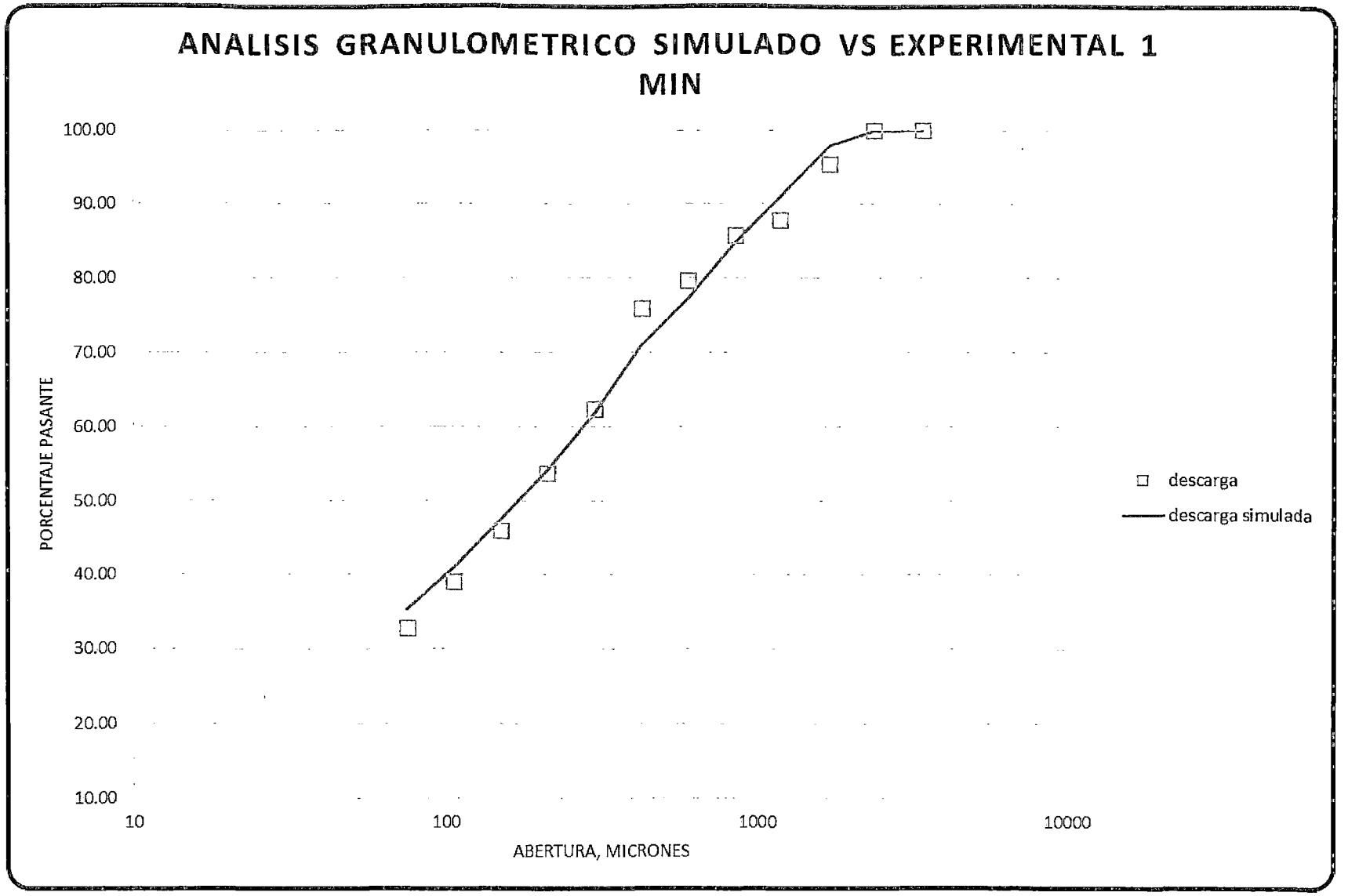

Figura B-2 Curva porcentaje acumulado pasante descarga a 1 minuto, Experimental y Simulado

Tabla B-2 Parámetros calculados a un minuto de molienda.

Prueba	1 min de molienda		
Parámetros determinados			
Función selección :		**Función Fractura:**	
α_0	0,021 728	β_0	0,700 00
α_1	0,634	β_1	0,550
α_2	3,0	β_2	5,0
d_c	100 000		
Función Objetivo:		45,3688	

Tabla B-3 Descarga porcentaje pasante experimental y simulado

N° de Malla	Abertura µ	% Pasante Descarga Exp.	% Pasante Descarga Sim.
m6	3 350	100,00	100,00
m8	2 360	100,00	100,00
m10	1 700	95,43	97,89
m16	1 180	87,79	91,02
m20	850	85,78	84,85
m28	600	79,75	77,37
m35	425	75,91	70,98
m48	300	62,41	61,88
m65	212	53,63	54,13
m100	150	45,95	47,33
m150	106	38,99	40,95
m200	75	32,74	35,37

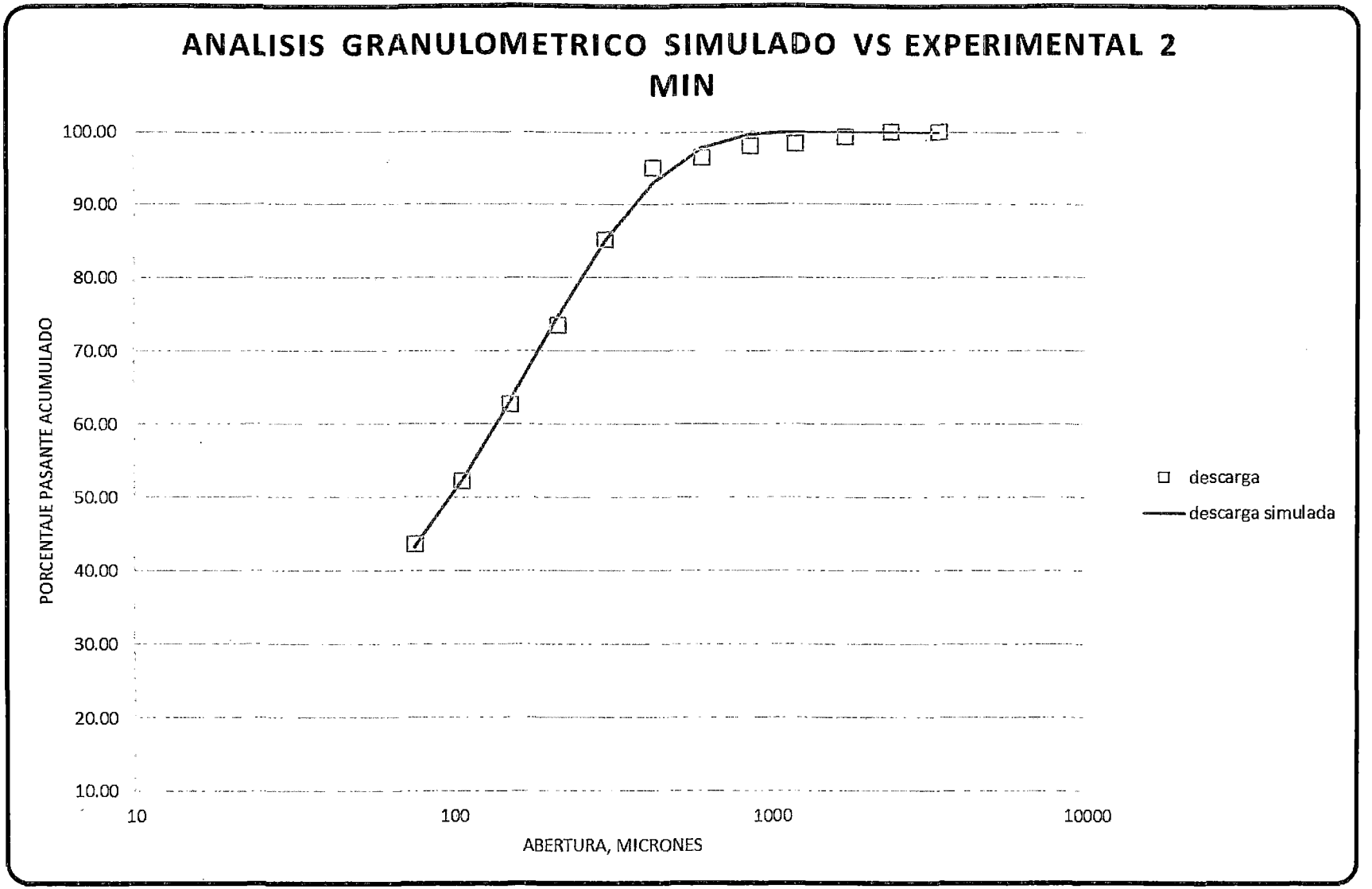

Figura B-3 Curva porcentaje acumulado pasante descarga a 2 minutos, Experimental y Simulado

Tabla B-4 Parámetros calculados a dos minutos de molienda.

Prueba	2 min de molienda		
Parámetros determinados			
Función selección :		**Función Fractura:**	
α_0	0,041 695	β_0	0,203 03
α_1	0,650	β_1	0,550
α_2	3,0	β_2	5,0
d_c	100 000		
Función Objetivo:		12,5	

Tabla B-5 Descarga porcentaje pasante experimental y simulado, a 2 minutos de molienda

N° de Malla	Abertura µ	% Pasante Descarga Exp.	% Pasante Descarga Sim.
m6	3 350	100,00	100,00
m8	2 360	100,00	100,00
m10	1 700	99,31	100,00
m16	1 180	98,34	99,94
m20	850	98,00	99,50
m28	600	96,57	97,65
m35	425	95,14	93,09
m48	300	85,22	85,11
m65	212	73,57	74,47
m100	150	62,81	63,03
m150	106	52,30	52,33
m200	75	43,66	43,20

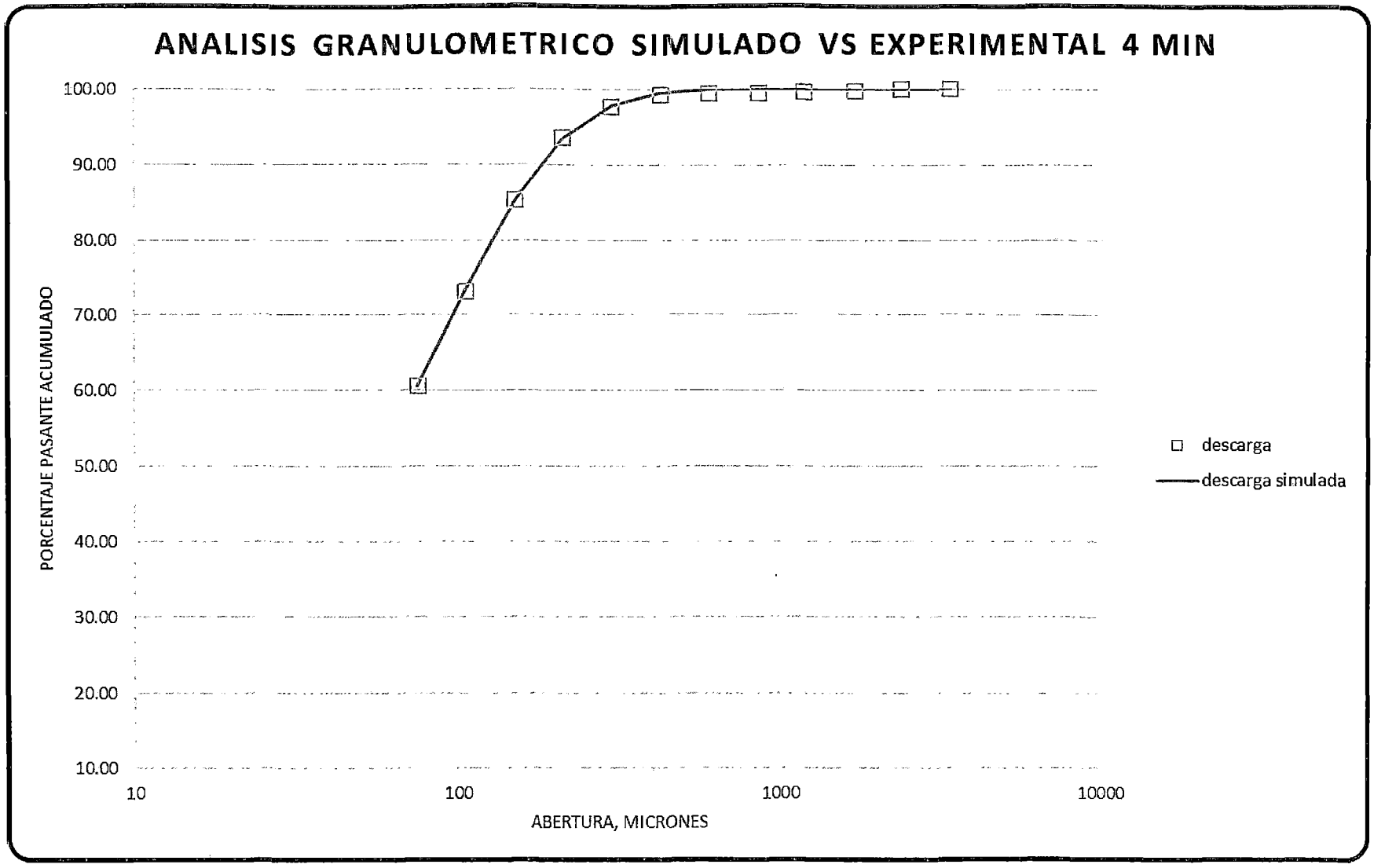

Figura B-4 Curva porcentaje acumulado pasante descarga a 4 minutos, Experimental y Simulado

Tabla B-6 Parámetros calculados a cuatro minutos de molienda.

Prueba	4 min de molienda		
Parámetros determinados			
Función selección :		**Función fractura:**	
α_0	0,040 297	β_0	0,138 11
α_1	0,650	β_1	0,550
α_2	3,0	β_2	5,0
d_c	100 000		
Función Objetivo:		0,876	

Tabla B-7 Descarga porcentaje pasante experimental y simulado, a 4 minutos de molienda

N° de Malla	**Abertura µ**	**% Pasante Descarga Exp.**	**% Pasante Descarga Sim.**
m6	3 350	100,00	100,00
m8	2 360	100,00	100,00
m10	1 700	99,80	100,00
m16	1 180	99,62	100,00
m20	850	99,57	100,00
m28	600	99,45	99,94
m35	425	99,33	99,53
m48	300	97,76	97,88
m65	212	93,60	93,45
m100	150	85,36	85,14
m150	106	73,12	73,48
m200	75	60,68	60,53

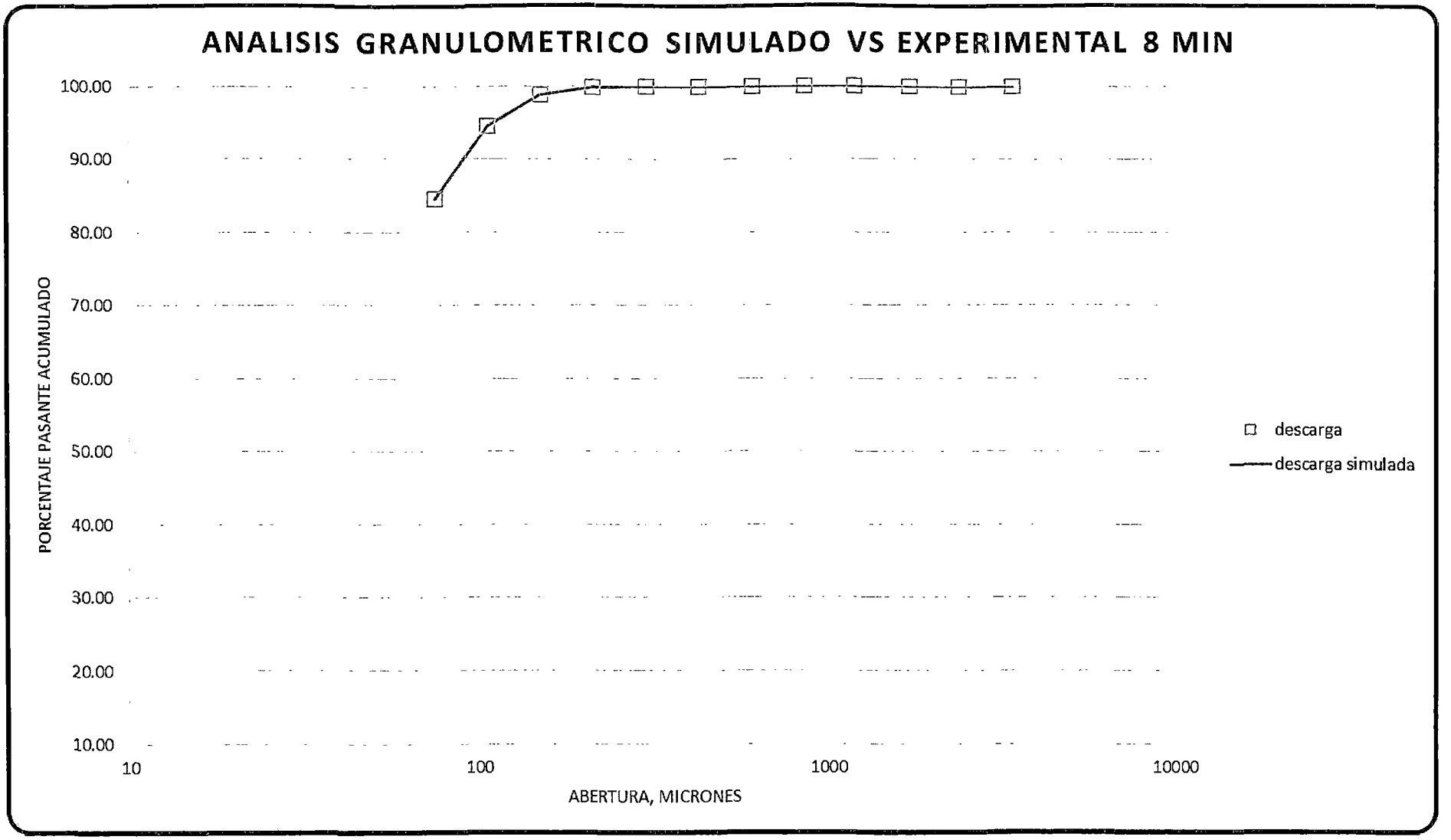

Figura B-5 Curva porcentaje acumulado pasante descarga a 8 minutos, Experimental y Simulado

Tabla B-8 Parámetros calculados a ocho minutos de molienda.

Prueba	8 min de molienda		
Parámetros determinados			
Función selección :		**Función fractura:**	
α_0	0,036 190	β_0	0,100 00
α_1	0,650	β_1	0,550
α_2	3,0	β_2	5,0
d_c	100 000		
Función Objetivo:		1,126	

Tabla B-9 Descarga porcentaje pasante experimental y simulado, a 8 minutos de molienda

N° de Malla	Abertura µ	% Pasante Descarga Exp.	% Pasante Descarga Sim.
m6	3 350	100,00	100,00
m8	2 360	100,00	100,00
m10	1 700	100,00	100,00
m16	1 180	100,00	100,00
m20	850	100,00	100,00
m28	600	100,00	100,00
m35	425	100,00	100,00
m48	300	99,99	99,99
m65	212	99,87	99,86
m100	150	98,80	98,81
m150	106	94,52	94,54
m200	75	84,54	84,57

Tabla B-10 Cuadro general determinación de parámetros función selección y función fractura

Prueba	1 min	2 min	4 min	8 min	
Función selección :					**Valor Promedio**
α_0	0,021 728	0,041 695	0,0402 97	0,036 190	0,034 98
α_1	0,634	0,650	0,650	0,650	0,646
α_2	3,0	3,0	3,0	3,0	3,00
d_c	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000
Función fractura					
β_0	0,700 00	0,203 03	0,138 11	0,100 00	0,285 28
β_1	0,550	0,550	0,550	0,550	0,550
β_2	5,0	5,0	5,0	5,0	5,00
Función Objetivo	45,369	12,500	0,876	1,126	

Tabla B-11 Parámetros determinados por regresión no lineal

Función Selección		**Función Fractura**	
α_0	0,034 98	β_0	0,285 28
α_1	0,646	β_1	0,55
α_2	3	β_2	5
d_c	100 000		

ANEXO C

Nº de mallas y su abertura en diversos sistemas de medición

USA		Tyler	British		French		German
Standard	Alternative	Mesh No.	Aperture	Mesh No.	Opening	Sieve No.	Opening
31.50 mm	1 1/4				(mm)		
26.50 mm	1.06"	1.05"					
25.00 mm	1"						25.0 mm
22.40 mm	7/8"	0.883					20.0 mm
19.00 mm	3/4"	0.742"					18.0 mm
16.00 mm	5/8"	0.624"					16.0 mm
13.20 mm	0.530"	0.525"					
12.50 mm	1/2"						12.5 mm
11.20 mm	7/16"	0.441"					
9.50 mm	3/8"	0.371"					10.0 mm
8.00 mm	5/16"	2 1/2					8.0 mm
6.70 mm	0.265"	3					
6.30 mm	1/4"						6.3 mm
5.60 mm	3 1/2						
4.75 mm	4	4			5.000	38	5.0 mm
4.00 mm	5	5			4.000	37	4.0 mm
3.35 mm	6	6	3.35 mm	5			
2.80 mm	7	7	2.80 mm	6	3.150	36	3.15 mm
2.36 mm	8	8	2.40 mm	7	2.500	35	2.50 mm
2.00 mm	10	9	2.00 mm	8	2.000	34	2.00 mm
1.70 mm	12	10	1.68 mm	10	1.600	33	1.60 mm
1.40 mm	14	12	1.40 mm	12			
1.18 mm	16	14	1.20 mm	14	1.250	32	2.25 mm
1.10 mm	18	16	1.10 mm	16	1.000	31	1.00 mm
850 µm	20	20	850 µm	18			
710 µm	25	24	710 µm	22	0.800	30	800 µm
600 µm	30	28	600 µm	25	0.630	29	630 µm
500 µm	35	32	500 µm	30	0.500	28	500 µm
425 µm	40	35	420 µm	36	0.400	27	400 µm
355 µm	45	42	355 µm	44			
300 µm	50	48	300 µm	52	0.315	26	315 µm
250 µm	60	60	250 µm	60	0.250	25	250 µm
212 µm	70	65	210 µm	72	0.200	24	200 µm
180 µm	80	80	180 µm	85	0.160	23	160 µm
150 µm	100	100	150 µm	100			
125 µm	120	115	125 µm	120	0.125	22	125 µm
106 µm	140	150	105 µm	150	0.100	21	100 µm
90 µm	170	170	90 µm	170			90 µm
75 µm	200	200	75 µm	200	0.080	20	80 µm
							71 µm
63 µm	230	250	63 µm	240	0.063	19	63 µm
53 µm	270	270	53 µm	300	0.050	18	50 µm
45 µm	325	325	45 µm	350			45 µm
38 µm	400	400			0.040	17	40 µm

ANEXO D

Memoria de Calcula, "Simulación de molienda", prueba de validación de parámetros de la función selección y fractura

Ingreso de datos

1.	Diámetro del molino:	D	= 0,667
2.	Largo del molino:	L	= 1
3.	Peso del mineral :	M_m	= 1,484
4.	Densidad del mineral :	ρ_m	= 2,85
5.	Porcentaje de Solidos :	%Solidos	= 67
6.	Peso del medio moledor:	M_B	= 19,9
7.	Densidad medio moledor:	ρ_B	= 7,75
8.	Espacios Intersticiales:	f_v	= 0,4
9.	Potencia Neta:	P_{Net}	= 0,050 7
10.	Tiempo de Molienda:	t	= 4
11.	Porcentaje Velocidad Critica :	$\%N_{crit}$	= 84,9
12.	Velocidad Critica del molino:	N_{crit}	= 93,79

$$N_{crit} = \frac{76{,}6}{\sqrt{0{,}667}}$$

13. Velocidad del molino N_c = 79,63

$$RPM\ Molino = \frac{76{,}6}{\sqrt{0{,}667}} * \frac{84{,}9}{100}$$

14. Peso de pulpa (Slurry weight): M_p = 2,21

$$M_p = \frac{1{,}484}{67} * 100 = 2{,}21$$

15. Volumen de Pulpa (Slurry volumen): V_p = 1,25

$$V_p = \frac{1{,}484}{2{,}85} + (2{,}21 - 1{,}484) = 1{,}25$$

16. Densidad de Pulpa: ρ_p =1,77

$$\rho_p = \frac{2,21}{1,25} = 1,77$$

17. Volume de Bolas (Balls weight): V_B = 4,28

$$V_B = \frac{19,9}{(1-0,4)*7,75}$$

18. Sobrellenado (Overfilling) , Volumen en Exceso: V_E = 0

$$Si \;\; 1,25 > 0,4*4,28$$
$$Verdadero \rightarrow V_E = V_p - (f_v * V_B),$$
$$Falso \rightarrow V_E = 0$$

19. Volumen del molino (Mill volume): V = 9,904

$$V = \frac{\pi}{4} * (0,305*0,667)^2 * (0,305*1) * 1\,000$$

20. Densidad Aparente de Carga (App. Charge Density): ρ_{ap} = 5,17

$$\rho_{ap} = \frac{19,9+2,21}{4,28+0}$$

21. Porcentaje de Llenado de carga (Charge Filling, %) : J = 43,21

$$J = \frac{(4,28+0)}{9,904} * 100$$

22. Porcentaje Llenado de Bolas (Balls Filling,%): J_B = 43,21

$$J_B = \frac{4,28}{9,904} * 100$$

23. Nivel llenado pulpa en espacios intersticiales entre bolas (Interstitial Slurry Filling, %)

J_p = 73,1

*Condicional $Si\ V_E > 0 \rightarrow J_p = 100\%$

$$J_p = \frac{1{,}25}{0{,}4 * 4{,}28} * 100 = 73{,}1$$

24. Potencia demandada bolas: P_B = 0,045 6

$$P_B = \frac{19{,}9}{(19{,}9 + 2{,}21)} * 0{,}050\ 7 = 0{,}0456$$

25. Potencia demandad exceso de pulpa P_E = 0

$$P_E = \left(\frac{0 * 1.77}{19{,}9 + 2{,}21}\right) * 0{,}049$$

26. Potencia demandada pulpa, espacios intersticiales P_P = 0,005

$$P_p = \left(\frac{\left(\frac{73{,}12}{100}\right) * 0{,}4 * 4{,}28 * 1{,}77}{19{,}9 + 2{,}21}\right) * 0{,}0507 = 0{,}005$$

27. Energía Total por Tonelada Carga (Total Energy): E = 2,278

$$E = \frac{\left(\frac{4}{60}\right)}{\left(\frac{1{,}484}{1\,000}\right)} * 0{,}0507 = 2{,}278$$

28. Energía por tonelada, Bolas, (Balls Energy): E_B = 2,049

$$E_B = \frac{\left(\frac{4}{60}\right)}{\left(\frac{1{,}484}{1\,000}\right)} * 0{,}0456 = 2{,}049$$

29. Función Selección Especifica (S_i^E)

Función selección :	
α_0	0,034 98
α_1	0,645
α_2	3
d_c	100 000

$$S_i^E = \frac{\alpha_0 * (d_i^*)^{\alpha_1}}{1 + \left(\frac{d_i^*}{d_c}\right)^{\alpha_2}}$$

$$d_i^* = (d_i * d_{i+1})^{0,5}$$

*En posición i = 1

$$S_i^E = \frac{0,034\,98 * 3\,350^{0,645}}{1 + \left(\frac{2\,811,761}{100\,000}\right)^3}$$

$$S_i^E = 5,913$$

$$d_i^* = (3\,350 * 2\,360)^{0,5}$$

$$d_i^* = 2\,811,761$$

Posición "i"	Nº Malla	Abertura, micrones	Tamaño Intermedio, di*	SiE
1	6	3 350	2 811,761	5,914
2	8	2 360	2 002,998	4,750
3	10	1 700	1 416,333	3,797
4	14	1 180	1 001,499	3,036
5	20	850	714,143	2,440
6	28	600	504,975	1,950
7	35	425	357,071	1,559
8	48	300	252,190	1,245
9	65	212	178,326	0,996
10	100	150	126,095	0,796
11	150	106	89,163	0,636
12	200	75	0,000	0

30. Función fractura

Función Fractura	
β_0	0,285 28
β_1	0,55
β_2	5

Función fractura acumulada

$$B_{ij} = \begin{cases} 0 & ;para\ i < j \\ 1 & ;para\ i = j \\ \beta_0 * \left(\frac{d_i}{d_{j+1}}\right)^{\beta_1} + (1-\beta_0) * \left(\frac{d_i}{d_{j+1}}\right)^{\beta_2} & ;para\ i > j \end{cases}$$

En la posición "i" = 1; "j" = 1

$$\boldsymbol{B_{1,1} = 1}$$

En la posición "i" = 2; "j" = 1

$$B_{2,1} = 0{,}285\ 28 * \left(\frac{2\ 360}{2\ 360}\right)^{0{,}55} + (1 - 0{,}285\ 28) * \left(\frac{2\ 360}{2\ 360}\right)^{5}$$

$$\boldsymbol{B_{2,1} = 1}$$

En la posición "i" = 3; "j" = 1

$$B_{3,1} = 0{,}285\ 28 * \left(\frac{1\ 700}{2\ 360}\right)^{0.55} + (1 - 0.285\ 28) * \left(\frac{1\ 700}{2\ 360}\right)^{5}$$

$$\boldsymbol{B_{3,1} = 0{,}377}$$

Matriz B_{ij}

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,377	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,217	0,349	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,167	0,217	0,377	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,135	0,165	0,221	0,361	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,111	0,134	0,167	0,217	0,363	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,918	0,110	0,135	0,165	0,217	0,361	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,758	0,091	0,111	0,134	0,165	0,217	0,362	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000
10	0,063	0,751	0,092	0,110	0,134	0,165	0,217	0,363	1,000	1,000	0,000	0,000
11	0,518	0,062	0,076	0,091	0,110	0,134	0,165	0,217	0,362	1,000	1,000	0,000
12	0,043	0,513	0,063	0,075	0,091	0,110	0,134	0,165	0,217	0,363	1,000	1,000

Función fractura retenida

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & ;para\ i \leq j \\ B_{i,j} - B_{i+1,j} & ;para\ i > j \end{cases}$$

En la posición "i" = 1; "j" = 1

$$b_{1,1} = 0$$

En la posición "i" = 2; "j" = 1

$$b_{2,1} = B_{2,1} - B_{3,1}$$

$$b_{2,1} = 1 - 0{,}377$$

$$b_{2,1} = 0{,}623$$

En la posición "i" = 3; "j" = 1

$$b_{2,1} = B_{3,1} - B_{4,1}$$

$$b_{2,1} = 0{,}377 - 0{,}217$$

$$b_{2,1} = 0{,}160$$

Matriz b_{ij}

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,623	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,160	0,652	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,050	0,131	0,623	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,032	0,524	0,156	0,639	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,024	0,031	0,054	0,144	0,637	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,020	0,024	0,032	0,052	0,146	0,639	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,016	0,019	0,024	0,031	0,052	0,144	0,638	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,013	0,157	0,019	0,024	0,031	0,052	0,145	0,637	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,011	0,131	0,016	0,019	0,024	0,312	0,052	0,145	0,638	0,000	0,000	0,000
11	0,009	0,011	0,013	0,016	0,019	0,024	0,031	0,052	0,145	0,637	0,000	0,000
12	0,043	0,051	0,063	0,075	0,091	0,110	0,134	0,165	0,217	0,363	1,000	1,000

31. Modelo de simulación de molienda Batch

Matriz T_{ij}:

$$T_{ij} = \begin{cases} 0 & ,si \quad i < j \\ 1 & ,si \quad i = j \\ \sum_{j=k}^{i-1} \frac{b_{ik} * {S_k}^E}{{S_i}^E - {S_j}^E} * \ T_{kj} & ,si \quad i > j \end{cases}$$

En la posición "i" = 1; "j" = 1

$$T_{1,1} = 1$$

En la posición "i" = 2; "j" = 1

$$T_{2,1} = \sum_{1=k}^{2-1} \frac{b_{2,k} * {S_k}^E}{{S_2}^E - {S_1}^E} * \ T_{k,1}$$

$$T_{2,1} = \frac{b_{2,1} * {S_1}^E}{{S_2}^E - {S_1}^E} * \ T_{1,1}$$

$$T_{2,1} = \frac{0{,}623\ 2 * 5{,}913\ 6}{4{,}750\ 1 - 5{,}913\ 6} * 1$$

$$\boldsymbol{T_{2,1} = -3{,}167\ 5}$$

En la posición "i" = 3; "j" = 1

$$T_{3,1} = \sum_{1=k}^{3-1} \frac{b_{3,k} * {S_k}^E}{{S_3}^E - {S_1}^E} * \ T_{k,1}$$

$$T_{3,1} = \frac{b_{3,1} * {S_1}^E * \ T_{1,1}}{{S_3}^E - {S_1}^E} + \frac{b_{3,2} * {S_2}^E * \ T_{2,1}}{{S_3}^E - {S_1}^E}$$

$$T_{3,1} = \frac{0{,}159\ 6 * 5{,}913\ 6 * 1 + 0{,}651\ 5 * 4{,}750\ 1 * -3{,}167\ 5}{3{,}797\ 3 - 5{,}913{,}6}$$

$$\boldsymbol{T_{3,1} = 4{,}185\ 5}$$

En la posición "i" = 4; "j" = 1

$$T_{4,1} = \sum_{1=k}^{4-1} \frac{b_{4,k} * {S_k}^E}{{S_4}^E - {S_1}^E} * T_{k,1}$$

$$T_{4,1} = \frac{b_{4,1} * {S_1}^E * T_{1,1}}{{S_4}^E - {S_1}^E} + \frac{b_{4,2} * {S_2}^E * T_{2,1}}{{S_4}^E - {S_1}^E} + \frac{b_{4,3} * {S_3}^E * T_{3,1}}{{S_4}^E - {S_1}^E}$$

$$T_{4,1} = \frac{0{,}050\,2 * 5{,}913\,6 * 1 + 0{,}131\,4 * 4{,}750 * -3{,}167\,5 + 0{,}623\,2 * 3{,}797\,3 * 4{,}185\,5}{3{,}035\,6 - 5{,}913\,6}$$

$$\boldsymbol{T_{4,1} = -2{,}858}$$

En la posición "i" = 5; "j" = 1

$$T_{5,1} = \sum_{1=k}^{5-1} \frac{b_{5,k} * {S_k}^E}{{S_5}^E - {S_1}^E} * T_{k,1}$$

$$T_{5,1} = \frac{b_{5,1} * {S_1}^E * T_{1,1}}{{S_5}^E - {S_1}^E} + \frac{b_{5,2} * {S_2}^E * T_{2,1}}{{S_5}^E - {S_1}^E} + \frac{b_{5,3} * {S_3}^E * T_{3,1}}{{S_5}^E - {S_1}^E} + \frac{b_{5,4} * {S_4}^E * T_{4,1}}{{S_5}^E - {S_1}^E}$$

$$T_{5,1} = \frac{\begin{array}{c}(0{,}031\,9 * 5{,}913\,6 * 1 + 0{,}052\,4 * 4{,}750\,1 * -3{,}167\,5 + \\ 0{,}155\,8 * 3{,}797\,3 * 4{,}185\,5 + 0{,}639\,2 * 3{,}035\,6 * -2{,}858\,0)\end{array}}{2{,}439\,9 - 5{,}913\,6}$$

$$\boldsymbol{T_{5,1} = 1{,}055\,9}$$

Matriz T_{ij}

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	-3,167	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	4,186	-3,248	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	-2,858	4,119	-3,107	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	1,056	-2,735	4,005	-3,257	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	-0,234	1,061	-2,746	4,260	-3,173	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,024	-0,226	1,057	-2,918	4,087	-3,187	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	-0,002	0,026	-0,231	1,133	-2,766	4,100	-3,173	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	-0,001	0,000	0,024	-0,244	1,053	-2,764	4,070	-3,178	1,000	0,000	0,000	0,000
10	-0,001	0,001	-0,001	0,026	-0,223	1,050	-2,743	4,090	-3,182	1,000	0,000	0,000
11	-0,001	0,001	0,000	-0,001	0,023	-0,223	1,044	-2,762	4,092	-3,178	1,000	0,000
12	-0,002	0,002	-0,002	0,001	-0,001	0,022	-0,198	0,850	-1,910	2,178	-1,000	1,000

$Matriz\ T_{ij}^{-1}$ (Inversa de la matriz T_{ij})

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	3,167	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	6,102	3,248	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	8,768	5,971	3,107	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	11,731	9,178	6,114	3,257	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	13,496	11,541	8,913	6,076	3,173	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	14,887	13,481	11,420	8,967	6,025	3,187	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	15,735	14,794	13,309	11,412	8,869	6,010	3,173	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	16,352	15,755	14,742	13,376	11,381	8,891	6,012	3,178	1,000	0,000	0,000	0,000
10	16,735	16,381	15,729	14,809	13,359	11,408	8,899	6,023	3,182	1,000	0,000	0,000
11	16,921	16,729	16,335	15,755	14,769	13,360	11,396	8,896	6,020	3,178	1,000	0,000
12	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Matriz J_{ij}:

$$J_{ij} = \begin{cases} 0 & ,si \quad i \neq j \\ \exp(-S_i{}^E * E) & ,si \quad i = j \end{cases}$$

En la posición "i" = 1; "j" = 1

$$J_{1,1} = \exp(-S_1{}^E * E)$$

$$J_{1,1} = \exp(-5{,}913\,6 * 2{,}049\,5)$$

$$\boldsymbol{J_{1,1} = 0{,}000\,005}$$

En la posición "i" = 2; "j" = 1

$$\boldsymbol{J_{2,1} = 0}$$

En la posición "i" = 2; "j" = 2

$$J_{2,2} = \exp(-S_2{}^E * E)$$

$$J_{2,2} = \exp(-4{,}750\,1 * 2{,}049\,5)$$

$$\boldsymbol{J_{2,2} = 0{,}000\,059}$$

En la posición "i" = 3; "j" = 3

$$J_{3,3} = \exp(-S_3{}^E * E)$$

$$J_{3,3} = \exp(-3{,}797\,3 * 2{,}049\,5)$$

$$\boldsymbol{J_{3,3} = 0{,}000\,41}$$

En la posición "i" = 4; "j" = 4

$$J_{4,4} = \exp(-S_4{}^E * E)$$

$$J_{4,4} = \exp(-3{,}035\,6 * 2{,}049\,5)$$

$$\boldsymbol{J_{4,4} = 0{,}001\,99}$$

Matriz J_{ij}:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,018	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,041	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,078	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,130	0,000	0,000	0,000
10	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,196	0,000	0,000
11	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,271	0,000
12	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000

Vector f^0

f^o = Porcentaje retenido (alimentación al molino)

Posicion "i"	Nº Malla	Abertura, micrones	Porcentaje Retenido, f^o	Porcentaje Pasante Acumulado
1	6	3 350	0	100
2	8	2 360	0	100
3	10	1 700	13,93	86,07
4	14	1 180	24,04	62,03
5	20	850	4,67	57,36
6	28	600	9,49	47,87
7	35	425	4,11	43,76
8	48	300	10,79	32,97
9	65	212	5,43	27,54
10	100	150	4,22	23,32
11	150	106	3,99	19,33
12	200	75	3,09	16,24
	-200	-75	16,24	3E-13

Vector f^0

f^o
0
13,93
24,04
4,67
9,49
4,11
10,79
5,43
4,22
3,99
3,09
16,24

Vector f

f = Porcentaje Retenido Simulado

De la fórmula:

$$f = T * J * T^{-1} * f^{o}$$

Se multiplica las matrices T, J, T^{-1} y f^{o}

Matriz $T * J$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	-0,001	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,000	0,000	0,002	-0,006	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,000	0,000	-0,001	0,008	-0,021	0,018	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,000	0,000	0,000	-0,006	0,028	-0,059	0,041	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,000	0,000	0,000	0,002	-0,019	0,075	-0,130	0,078	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,007	-0,051	0,167	-0,247	0,130	0,000	0,000	0,000
10	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,001	0,019	-0,112	0,318	-0,414	0,196	0,000	0,000
11	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,004	0,043	-0,215	0,532	-0,622	0,271	0,000
12	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,008	0,066	-0,248	0,426	-0,271	1,000

Matriz $T * J * T^{-1}$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,010	0,008	0,005	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,032	0,028	0,023	0,015	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,065	0,063	0,058	0,050	0,037	0,018	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,094	0,096	0,097	0,095	0,089	0,072	0,041	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,108	0,112	0,117	0,123	0,128	0,129	0,117	0,078	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,106	0,109	0,115	0,123	0,134	0,149	0,163	0,165	0,130	0,000	0,000	0,000
10	0,095	0,097	0,100	0,106	0,116	0,131	0,153	0,183	0,209	0,196	0,000	0,000
11	0,081	0,082	0,083	0,086	0,091	0,100	0,117	0,145	0,187	0,241	0,271	0,000
12	0,406	0,404	0,401	0,399	0,399	0,401	0,409	0,429	0,474	0,564	0,729	1,000

Matriz $T * J * T^{-1} * f^{o} = f$

f
0
0,000 8
0,026 2
0,236 5
1,079
2,931 9
5,687 4
8,388 5
9,939 6
10,204
9,458 1
52,048

Y f en su forma acumulada pasante:

Posición "i"	N° Malla	Abertura, micrones	Porcentaje Retenido, f	Porcentaje Pasante Acumulado
1	6	3 350	0	100,0
2	8	2 360	0	100,0
3	10	1 700	0,000 8	100,0
4	14	1180	0,026 2	100,0
5	20	850	0,236 5	99,7
6	28	600	1,079	98,7
7	35	425	2,931 9	95,73
8	48	300	5,6874	90,04
9	65	212	8,388 5	81,65
10	100	150	9,939 6	71,71
11	150	106	10,204	61,51
12	200	75	9,458 1	52,05
	-200		52,048	