UNIVERSIDAD NACIONAL SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

ESCUELA DE POSGRADO

UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y FORMALES

“LAGRANGIANOS CONVEXOS”

Tesis presentada por la bachiller:

MEYBER YULIANA VARGAS MAQUERA DE NUÑEZ

Para optar el Grado Académico de:

Maestra en Ciencias: Matemáticas, con mención en Matemática Universitaria Superior.

Asesor: Dr. Vladimir Alfonso Rosas Meneses

AREQUIPA – PERÚ

2021

DEDICATORIA

A mi papito Julio Vargas Bernedo, gracias papá por darme el mejor regalo que se puede dar a una persona, creer en mí. Ser padre no es lo mismo que ser un buen padre y tú fuiste las dos cosas. Padre no hay más que uno y como el mío ninguno.

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios por que sin el nada fuese posible, por la vida y por lo que hizo en cada uno de nosotros, sobre todo por siempre acompañarme y ayudarme a no desistir.

A mi esposo Hermann que me animó en todo momento y a mis amados hijos Santiago y Ximena que son mi motor y motivo.

Agradezco a mis padres por todo lo que sembraron en mí.

A mi asesor Vladimir Rosas por la oportunidad y las enseñanzas, fue quien colaboró directamente en la presentación de esta tesis.

Resumen

En el presente trabajo estudiaremos aspectos generales y específicos sobre Lagrangianos Convexos, también estudiaremos hamiltonianos y la relación que tienen sus respectivos flujos.
Luego buscaremos conjuntos invariantes por estos flujos.

Palabras Clave: Lagrangiano, Hamiltoniano.

Abstract

In the present work we will study general and specific aspects about Lagrangian Convexes, we will also study Hamiltonians and the relationship that their own currents have.
Then we will look for invariant sets for these flows.

Key Words: Lagrangian, Hamiltonian.

Índice general

Capítulo 2

INTRODUCCIÓN

El objetivo general de este trabajo es estudiar aspectos genéricos y específicos relacionados con Lagrangianos Convexos.

Sea M una variedad riemanniana compacta y TM su fibrado tangente. Un lagrangiano es una función $L : TM \to \mathbb{R}$ de por lo menos clase C^2 .

Definimos la acción del lagrangiano L sobre el conjunto de curvas $\gamma : [a,b] \to M$, dada por

$$\mathbb{L}(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))\, ds$$

Queremos estudiar curvas que minimizan la acción $\mathbb{L}$ que serán puntos críticos en el espacio de curvas, en un sentido que definiremos más adelante. A estas curvas las llamaremos extremales.

Decimos que L satisface la condición de convexidad si la segunda derivada $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v)$ es definida positiva para todo $(x,v) \in TM$, entonces las curvas extremales de la acción cumplirán las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} L_v(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - L_x(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0 \iff \frac{d}{dt} \mathbb{L}(\gamma + t\gamma_1)\big|_{t=0} = 0$$

Veremos también que las ecuaciones de Euler-Lagrange definen un flujo φ_t^L en *TM*, así mismo en coordenadas locales la ecuación de Euler-Lagrange puede ser escrita como un sistema de ecuaciones deferenciales de primer orden en TM :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = L_{vv}^{-1}\left(L_x - L_{vx} \cdot v\right) \end{cases}$$

A priori este flujo no es completo, es decir no necesariamente está definido para todo parámetro $t \in \mathbb{R}$.

En el fibrado cotangente $\pi : T^*M \to M$ introducimos la función *H*, el dual convexo de *L*, llamado Hamiltoniano del sistema:

$$H : T^*M \to \mathbb{R}$$

$$H(x, p) = \underset{v \in T_x M}{Sup}\left\{pv - L(x, v)\right\}$$

El fibrado cotangente tiene una estructura natural de variedad simpléctica, donde el gradiente simpléctico del hamiltoniano es un campo $X_H : M \to T^*M$ con un flujo local φ_t^H asociado que resulta conjugado, mediante la transformada de Legendre, al flujo lagrangiano φ_t^L. Por cómo se define el gradiente simpléctico, el hamiltoniano *H* es constante en las trayectorias de φ_t^H.

Bajo ciertas condiciones sobre L logra que el conjunto $H^{-1}(c) \subset T^*M$ con $c \in \mathbb{R}$ sea compacto, con lo cual el flujo hamiltoniano φ_t^H estará definido en todo parámetro $t \in \mathbb{R}$.
Por ser conjugado, el flujo lagrangiano φ_t^L también será completo y entonces se puede estudiar su dinámica.
La segunda condición que se le pedirá a L será Superlinealidad, sobre compactos de *M*, decimos que L es superlineal si y solo si $\lim_{\|v\| \to \infty} \frac{L(x, v)}{\|v\|} = +\infty$, equivalentemente podemos decir dado $A > 0$ existe $B > 0$ talque $L(x, v) \geq A\|v\| - B, \quad \forall (x, v) \in TM$.

El hamiltoniano H también es superlineal sobre compactos de M (con la norma dual), con esta propiedades se logra que el conjunto $H^{-1}(c) \subset T^*M$ con $c \in \mathbb{R}$ sea compacto, con lo cual el flujo φ_t^L es definido en todo parámetro real.

Por lo tanto, podemos estudiar este flujo usando teoría de Sistemas Dinámicos; por ejemplo, buscaremos conjuntos que son invariantes por este flujo.

Nuestro objetivo específico será demostrar que dado ω, 1-forma cerrada en M. Si H es constante sobre el gráfico $Graf(\omega) = \{(x, \omega_x) \ / \ x \in M\}$, entonces este gráfico es invariante por φ_t^H.

Con todo lo presentado, ampliaremos las técnicas para encontrar conjuntos invariantes, un ejemplo, son los famosos conjuntos de Aubry-Mather. Para una definición de estos conjuntos ver [6] Contreras.

CAPITULO 0

PRELIMINARES

En el presente capítulo daremos a conocer algunos conceptos básicos de lagrangianos convexos en $\mathbb{R}^n$, para lo cual M denotará un subconjunto abierto contenido en $\mathbb{R}^n$.

Consideremos $TM = M \times \mathbb{R}^n$ su fibrado tangente y $\pi : TM \to M$ la proyección canónica, esto es $\pi(p,v) = p$.

Veamos a continuación la definición de lagrangianos.

<u>Definición 0.1</u> *Un Lagrangiano es una función de clase* C^2, $L : TM \to \mathbb{R}$ *definida en el fibrado tangente.*

Ahora definiremos la acción sobre el lagrangiano L .

<u>Definición 0.2</u> *Si* $\gamma : [a,b] \to M$ *una curva* C^1 *por partes, la acción de* γ *para* L *está definida por:*

$$\mathbb{L}(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt. \tag{1}$$

Consideremos, C el conjunto de curvas $\gamma:[a,b]\to M$, C^1 continuas por partes.

Decimos que $\gamma:[a,b]\to M$ es una curva minimizante para la clase C si para cualquier curva $\alpha:[a,b]\to M$ en C con $\alpha(a)=\gamma(a)$ *y* $\alpha(b)=\gamma(b)$ se tiene que $\mathbb{L}(\gamma)\leq \mathbb{L}(\alpha)$.

Por ejemplo, si $L:TR^n\to\mathbb{R}$ es el lagrangiano dado por $L(x,v)=\|v\|^2$ y si $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ la curva dada por $\gamma(t)=(t,\ldots,t)\in\mathbb{R}^n$ con $t\in[a,b]$ entonces γ minimiza la acción de L .

En efecto, la acción de γ sobre el lagrangiano L está dada por:

$$\mathbb{L}(\gamma)=\int_a^b L(\gamma(s),\dot\gamma(s))\,ds$$

$$\mathbb{L}(\gamma)=\int_a^b \|\dot\gamma(s)\|^2\,ds$$

$$\mathbb{L}(\gamma)=\int_a^b \left(\sqrt{(1+1+\ldots+1)}\right)^2\,ds$$

$$\mathbb{L}(\gamma)=\int_a^b n\,ds$$

$$\mathbb{L}(\gamma)=n(b-a)$$

Por lo tanto, en este caso las curvas que minimizan la acción son segmentos de $\mathbb{R}^n$.

El siguiente lema exhibe la diferenciabilidad de la acción de γ para L .

Lema 0.3

Sean $\gamma,\gamma_1:[a,b]\to M$ *dos curvas continuas por partes de Clase* C^1. *La función* $\mathbb{L}(\gamma+t\gamma_1)$ *se define para un* t *pequeño y su derivada en* $t=0$ *está dada por:*

$$\frac{d}{dt}\mathbb{L}(\gamma+t\gamma_1)\Big|_{t=0}=\int_a^b DL[\gamma(s),\dot\gamma(s)]\,(\gamma_1(s),\dot\gamma_1(s))ds$$

Demostración: Sea $\bar\gamma(s)=\gamma(s)+t\gamma_1(s)$ y la acción $\mathbb{L}(\bar\gamma)=\int_a^b L\left(\bar\gamma(s),\dot{\bar\gamma}(s)\right)ds$

Entonces

$$\frac{d}{dt}\mathbb{L}(\gamma+t\gamma_1)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\mathbb{L}(\bar{\gamma}(s))\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_a^b L\left(\bar{\gamma}(s),\dot{\bar{\gamma}}(s)\right)ds\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_a^b L(\gamma(s)+t\gamma_1(s),\dot{\gamma}(s)+t\dot{\gamma}_1(s))ds\right)\Bigg|_{t=0}$$

Consideremos ahora $x(t)=(\gamma(s)+t\gamma_1(s),\dot{\gamma}(s)+t\dot{\gamma}_1(s))$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_a^b L(x(t))ds\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$= \int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial t}L(x(t))\Big|_{t=0}\right)ds$$

$$= \int_a^b\left(DL(x(t))\cdot \dot{x}(t)\big|_{t=0}\right)ds$$

$$= \int_a^b(DL(x(0))\cdot \dot{x}(0))ds$$

$$= \int_a^b DL(\gamma(s),\dot{\gamma}(s))\cdot(\gamma_1(s),\dot{\gamma}_1(s))ds$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{L}(\gamma+t\gamma_1)\big|_{t=0} = \int_a^b DL[\gamma(s),\dot{\gamma}(s)]\,(\gamma_1(s),\dot{\gamma}_1(s))ds$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{L}(\gamma+t\gamma_1)\big|_{t=0} = \int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial x}L[\gamma(s),\dot{\gamma}(s)]\cdot(\gamma_1(s))+\frac{\partial}{\partial v}L[\gamma(s),\dot{\gamma}(s)]\cdot(\dot{\gamma}_1(s))\right)ds$$

■

Definiremos a continuación curva extremal.

__Definición 0.4__ *Una curva extremal para el lagrangiano* L *, es una curva* $\gamma:[a,b]\to M$ *continua por partes de clase* C^1 *tal que, para cada curva* $\gamma_1:[a,b]\to \mathbb{R}^n$ *de clase* C^∞*, con* $\gamma_1(a)=0=\gamma_1(b)$*, se verifica:*

$$\frac{d}{dt}\mathbb{L}(\gamma+t\gamma_1)\big|_{t=0}=0$$

Por ejemplo, si $L:TR^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es el lagrangiano dado por $L(x,v)=\|v\|^2$ donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana y si $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(s)=p+s(p-q)$, $\gamma(0)=p$ y $\gamma_1:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ tal que $\gamma_1(0)=0=\gamma_1(1)$ entonces aplicando el lema anterior tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbb{L}(\gamma+t\gamma_1)\Big|_{t=0} &= \int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial x}L\left[\gamma(s),\dot{\gamma}(s)\right]\cdot\left(\gamma_1(s)\right)+\frac{\partial}{\partial v}L\left[\gamma(s),\dot{\gamma}(s)\right]\cdot\left(\dot{\gamma}_1(s)\right)\right)ds \\
&= \int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial v}L\left[\gamma(s),\dot{\gamma}(s)\right]\cdot\left(\dot{\gamma}_1(s)\right)\right)ds \\
&= \int_0^1\left(L_v\ \cdot\left(p+s(p-q)\ ,\ p-q\right)\right)\dot{\gamma}_1(s)\,ds \\
&= \int_0^1 2\left\langle p-q\ ,\ \dot{\gamma}_1(s)\right\rangle ds \\
&= 2\int_0^1\left\langle p-q\ ,\ \dot{\gamma}_1(s)\right\rangle ds \\
&= 2\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}\left\langle s(p-q)\ ,\ \gamma_1(s)\right\rangle ds \\
&= 2\left\langle s(p-q),\ \gamma_1(s)\right\rangle\Big|_0^1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Una vez que $\gamma_1(0)=0=\gamma_1(1)$.

Por lo tanto $\frac{d}{dt}\mathbb{L}(\gamma+t\gamma_1)\big|_{t=0}=0$, lo que hace que γ sea una curva extremal para el lagrangiano L .

El siguiente lema nos ayudará en la demostración de una proposición importante sobre curvas extremales.

<u>Lema 0.5</u> (Dubois-Raymond)

Sea $A:[a,b]\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})=(\mathbb{R}^n)^*$ *una aplicación continua tal que* $\int_a^b A(t)(\gamma(t))dt=0$ *para cada curva* $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ *de clase* C^∞ *la cual se anula en la vecindad de* a *y* b*, entonces* $A(t)=0\ ;\ \forall\ t\in[a,b]$.

<u>Demostración:</u> Suponga que $A\neq 0$, existe entonces un $t_0\in\langle a,b\rangle$ y $v_0\in\mathbb{R}^n$ tal que $A(t_0)(v_0)>0$.

Por la continuidad de $A(t)$, tomemos un ε fijo que sea positivo, tal que $A(t)(v_0)>0$ para todo t que pertenece al intervalo $[t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon]\subset[a,b]$.

Sea $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de clase C^∞, positiva en el intervalo $(t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon)$ y nula afuera de ese intervalo.

La curva $\phi\cdot v_0:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ es de clase C^∞ y cumple la condición de anularse en los extremos, además se tiene que

$$\int_a^b A(t)(\phi(t)v_0)dt=\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\phi(t)A(t)(\,v_0)dt>0$$

Porque la función $\phi(t)A(t)(\,v_0)$ es continua y positiva en $(t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon)$.

Llegamos a una contradicción de la hipótesis y por lo tanto $A(t)\equiv 0$. ■

El siguiente lema, nos ayudará con la demostración de un lema en el capítulo 1 y su demostración es fácil de realizar.

<u>Lema 0.6</u>

Sea $L:TM\to\mathbb{R}$ *un lagrangiano de clase* C^1 *donde* M *es un abierto de* $\mathbb{R}^n$. *Sea* $\gamma:[a,b]\to M$ *una curva extremal de clase* C^1*, entonces*

$$\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))=\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a),\dot\gamma(a))+\int_a^t\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s),\dot\gamma(s))ds$$

El siguiente resultado muestra qué relación tiene que tener el lagrangiano con una curva extremal.

<u>Proposición 0.7</u> (Euler Lagrange)

Sea L *un Lagrangiano de clase* C^2*. Si* $\gamma:[a,b]\to U$ *es una curva de clase* C^2*, entonces* γ *es una curva extremal si y solo si satisface la ecuación:*

$$\frac{d}{dt}L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))=L_x(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) \qquad (2)$$

Para todo $t\in[a,b]$.

<u>Demostración:</u> Ya que L y γ son de clase C^2, si $\gamma_1:[a,b]\to M$ de clase C^∞, donde $\gamma_1(a)=\gamma_1(b)=0$.

Entonces la aplicación $t\to L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\cdot(\gamma_1(t))$ es de clase C^1 y se anula en *a* y *b*. Luego:

$$\int_a^b \frac{d}{dt}[L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\cdot(\gamma_1(t))]\,dt=0$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt}[L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))]\cdot(\gamma_1(t))dt+\int_a^b[L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))]\cdot(\dot{\gamma}_1(t))dt=0$$

$$\int_a^b[L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))]\cdot(\dot{\gamma}_1(t))dt=-\int_a^b \frac{d}{dt}[L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))]\cdot(\gamma_1(t))dt \qquad (3)$$

Como γ es una curva extremal sí y solo sí $\frac{d}{dt}\mathbb{L}(\gamma+t\gamma_1)\big|_{t=0}=0$

Por el Lema 0.3

$$\int_a^b[L_x(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))](\gamma_1(t))dt+\int_a^b[L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))]\cdot(\dot{\gamma}_1(t))\,dt=0$$

Usando *(3)* tenemos

$$\int_a^b[L_x(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))](\gamma_1(t))dt-\int_a^b \frac{d}{dt}[L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))]\cdot(\gamma_1(t))=0$$

$$\int_a^b \left(L_x(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt}\left[L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\right]\right)(\gamma_1(t))\, dt = 0$$

Para cada $\gamma_1(t):[a,b]\to M$ de clase C^∞, talque γ_1 se anula en la vecindad de *a* y *b* es decir $\gamma_1(a)=\gamma_1(b)=0$.

Usando el Lema 0.5 se tiene:

$$L_x(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt}\left[L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) = L_x(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))$$

La ecuación *(2)* es llamada de Euler Lagrange. ■

Por ejemplo, para el lagrangiano $L: TR^n \to \mathrm{R}$ dado por $L(x,v)=\|v\|^2 = \langle v; v \rangle$

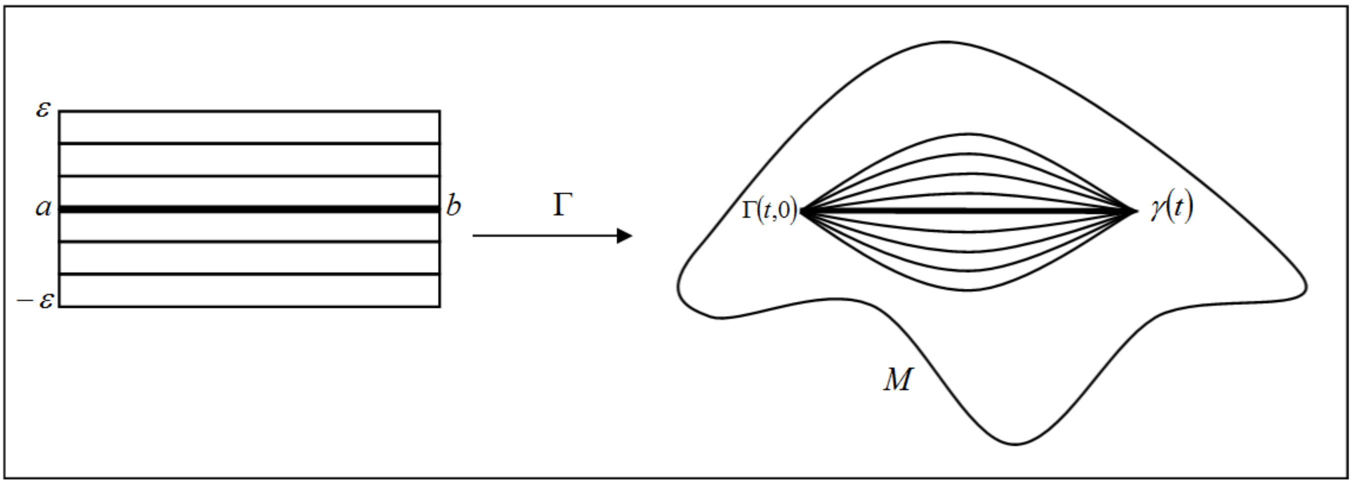
Si $\gamma(t) = p + t(p-q) = p + tv$,

Luego tenemos $L_v\, w = 2\langle v; w\rangle$ y $L_v(\gamma(t);\dot{\gamma}(t)) = 2\langle v;\dot{\gamma}(t)\rangle = 2\langle p-q;\dot{\gamma}(t)\rangle$

Entonces $\frac{d}{dt} L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) = 0 = L_x(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))$ lo que hace que γ sea una curva extremal.

Definiremos a continuación variación respecto a una curva en una variedad M.

Definición 0.8 *Sea* M *una variedad diferenciable y* $\gamma:[a,b]\to M$ *una curva* C^r *por partes. Una variación de clase* C^r *de* γ *es una aplicación* $\Gamma:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ *con* $(\varepsilon>0)$ *tal que* $\Gamma(t,0)=\gamma(t)$ *para todo* $t\in[a,b]$.



Por ejemplo, si consideramos la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$, con la siguiente parametrización $\gamma(t)=(sen t, 0, \cos t);\ t\in[0,\pi]$ una variación de γ estaría dada por:

$$\Gamma(t,s)=(sen\ t\cos\ s, sen\ t\ sen\ s, \cos t)\ ,\ s\in[-\pi,\pi]$$

El siguiente lema exhibe la diferenciabilidad de la acción de Γ y su demostración es esencialmente la misma del Lema 0.3.

Lema 0.9

Si Γ es una variación de clase C^2 de la curva $\gamma:[a,b]\to M$ de clase C^2 con valores en el subconjunto abierto M de $\mathbb{R}^n$.

Entonces la aplicación $s\to\mathbb{L}(\Gamma_s)$ es diferenciable y su derivada en 0 está dada por:

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)_{s=0}=\int_a^b DL[(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))]\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(t,0),\frac{\partial^2\Gamma}{\partial s\,\partial t}(t,0)\right)dt \qquad (4)$$

Veamos a continuación una fórmula para la derivada de la acción con respecto a una variación arbitraria sobre una curva extremal.

Teorema 0.10 *(Fórmula de la Primera Variación)*

Si $\gamma:[a,b]\to U$ de clase C^2 satisface la ecuación de Euler-Lagrange, entonces para cualquier variación Γ de clase C^2 tenemos:

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)\Big|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(b),\dot\gamma(b))\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(b,0) - \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a),\dot\gamma(a))\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(a,0).$$

<u>Demostración:</u> De la ecuación *(4)* tenemos:

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)_{s=0} = \int_a^b DL[(\gamma(t),\dot\gamma(t))\ ]\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(t,0),\frac{\partial^2\Gamma}{\partial s\,\partial t}(t,0)\right)dt$$

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)\Big|_{s=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot\gamma(t))\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(t,0) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))\cdot\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\,\partial s}(t,0)\right]dt$$

Además, por la proposición 0.7 de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))\right] = \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot\gamma(t))$$

Luego encontramos:

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)\Big|_{s=0} = \int_a^b \left[\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))\right]\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(t,0) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))\cdot\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\,\partial s}(t,0)\right]dt$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{ds}\mathrm{L}(\Gamma_s)\Big|_{s=0} = \left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))\right]\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(t,0)\Big|_a^b$$

$$\frac{d}{ds}\mathrm{L}(\Gamma_s)\Big|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(b),\dot\gamma(b))\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(b,0) - \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a),\dot\gamma(a))\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(a,0).$$

■

CAPITULO 1

Hasta ahora todo lo demostrado en el capítulo 0 fue para lagrangianos en abiertos de $\mathbb{R}^n$ todos esos resultados se generalizan a variedades arbitrarias, aplicando localmente en entornos coordenados.

Para tal caso en este capítulo M denota una variedad de clase C^∞, TM su fibrado tangente y $\pi : TM \to M$ la proyección canónica, esto es $\pi(x,v) = x$.

Consideremos M dotado, de un lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ de clase C^r con $r \geq 2$.

Lema 1.1

Considere $\Gamma : [a,b]\times[c,d] \to M$ *una variación de clase* C^2 *de la curva* $\gamma : [a,b] \to M$ *de clase* C^2. *Definimos* $\Gamma_s : [a,b] \to M$ *tal que* $\Gamma_s(t) = \Gamma(t,s)$. *Entonces la aplicación* $s \to \mathbb{L}(\Gamma_s)$ *es de clase* C^1.

Demostración: Para simplificar la notación asumimos que $0 \in [c,d]$, mostraremos que $s \to \mathbb{L}(\Gamma_s)$ es de clase C^1 en algún intervalo $[-\eta, \eta]$ con $(\eta > 0)$.

Podemos cubrir el conjunto compacto $\Gamma\left([a,b]\times\{0\}\right)$ con una familia finita de cartas coordenadas.

Luego encontramos una subdivisión $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ tal que $\Gamma\left(\left[a_i, a_{i+1}\right] \times \{0\}\right)$ está contenido en U_i dominio de definición de alguna de estas cartas.

Por compacidad, para un η suficientemente pequeño, tenemos

$$\Gamma\left(\left[a_i, a_{i+1}\right] \times [-\eta, \eta]\right) \subset U_i \text{ Para } i = 0,1,...,n-1.$$

Transportando la situación vía cartas coordenadas a un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, por el Lema 0.9 se obtiene que

$$s \to \int_{a_i}^{a_{i+1}} L\left[\Gamma(t,s); \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,s)\right] dt,$$ es de clase C^1 en algún intervalo $[-\eta, \eta]$.

Ahora es suficiente notar que

$$\mathbb{L}(\Gamma_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} L\left[\Gamma(t,s); \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,s)\right] dt$$

Para poder terminar la prueba. ■

A continuación introduciremos el concepto de una curva extremal C^2 para el lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ en el caso de curvas $\gamma : [a,b] \to M$ de clase C^2 con valores en la variedad arbitraria M.

Definición 1.2 *Una curva $\gamma : [a,b] \to M$ de clase C^2 es una curva extremal para el Lagrangiano L de clase C^2, si cada variación $\Gamma : [a,b] \times \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to M$ de γ, de clase C^2, con $\Gamma(t,s) = \gamma(t)$ en una vecindad de $(a,0)$ y $(b,0)$ cumple:*

$$\frac{d}{ds} \mathbb{L}(\Gamma_s)\Big|_{s=0} = 0.$$

Lema 1.3

Si $\gamma:[a,b]\to M$ *es una curva extremal de clase* C^2 *y* $[a',b']\subset[a,b]$ *entonces la restricción* $\gamma|_{[a',b']}$ *es también una curva extremal.*

Demostración: Para cualquier variación de clase C^2, $\Gamma:[a',b']\times\langle-\varepsilon,\varepsilon\rangle\to M$ de $\gamma|_{[a',b']}$ con $\Gamma(t,s)=\gamma(t)$ en una vecindad de $(a',0)$ y $(b',0)$, podemos encontrar ε' con $0<\varepsilon'<\varepsilon$ y $\delta>0$ tal que $\Gamma(t,s)=\gamma(t)$ para cada $(t,s)\in\Gamma:[a',a'+\delta]\cup[b'-\delta,b']\times\langle-\varepsilon,\varepsilon\rangle$

Por lo tanto podemos extender $\Gamma|[a',b']\times\langle-\varepsilon',\varepsilon'\rangle$ a $\tilde{\Gamma}|[a,b]\times\langle-\varepsilon',\varepsilon'\rangle$ por $\Gamma(t,s)=\gamma(t)$ para $t\notin[a',b']\times\langle-\varepsilon',\varepsilon'\rangle$.

Está claro que $\tilde{\Gamma}$ es una variación de clase C^2 con $\Gamma(t,s)=\gamma(t)$ en una vecindad de $(a,0)$ y $(b,0)$.

Además para $s\in[-\varepsilon',\varepsilon']$, la diferencia $\mathbb{L}(\tilde{\Gamma}_s)-\mathbb{L}(\Gamma_s)$ es igual a $\mathbb{L}(\gamma|[a,a'])+\mathbb{L}(\gamma|[b',b])$ ■

A continuación, exhibimos y demostramos un resultado sobre ecuaciones de Euler-Lagrange.

Teorema 1.4

Suponga que $\mathbb{L}$ *es un lagrangiano* C^2 *en una variedad* M. *Sea* $\gamma:[a,b]\to M$ *una curva de clase* C^2. *Si* γ *es una curva extremal entonces para cada sub intervalo* $[a',b']\subset[a,b]$ *tal que* $\gamma|[a',b']$ *está contenido en un dominio U de cartas coordenadas, la restricción* $\gamma|[a',b']$ *satisface en coordenadas la ecuación de Euler Lagrange.*

Recíprocamente, si para cada $t_0\in[a,b]$ *podemos hallar un* $\varepsilon>0$ *y un dominio* U *de cartas coordenadas tal que* $\gamma|([t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\cap[a,b])\subset U$ *y* $\gamma|([t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\cap[a,b])$ *satisface en cartas la ecuación de Euler Lagrange, entonces* γ *es una curva extremal.*

Demostración: Si $\gamma:[a,b]\to M$ es una curva extremal, entonces $\gamma|[a',b']$ es también una curva extremal, ya que $\gamma|[a',b']\subset U$, donde U es un dominio de una carta coordenada. Podemos entonces transportar vía cartas coordenadas la situación a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, por lo tanto $\gamma|[a',b']$ debe verificar la ecuación de Euler Lagrange.

Para probar la segunda parte, observamos que por compacidad de *s*, podemos encontrar una sub división $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ y una secuencia $U_0 < \ldots < U_{n-1}$ de dominios de cartas coordenadas tales que $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset U_i$.

Usando el teorema 0.10 tenemos que:

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}\left(\Gamma_s|[a_i, a_{i+1}]\right)\Big|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}\left(\gamma(a_{i+1}), \dot{\gamma}(a_{i+1})\right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a_{i+1}) - \frac{\partial L}{\partial v}\left(\gamma(a_i), \dot{\gamma}(a_i)\right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a_i).$$

Sumando estas igualdades encontramos

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)\Big|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}\left(\gamma(b), \dot{\gamma}(b)\right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b,0) - \frac{\partial L}{\partial v}\left(\gamma(a), \dot{\gamma}(a)\right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a,0).$$

Si $\Gamma(a,s) = \gamma(a)$ y $\Gamma(s,b) = \gamma(b)$ en una vecindad de $s=0$ entendemos que ambos $\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a,0) = 0$ y $\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b,0) = 0$

Por lo tanto, el segundo miembro de la igualdad anterior es 0, así γ es una curva extremal. ■

A continuación, veremos una fórmula para la derivada de la acción respecto a una variación arbitraria M, sobre una curva extremal.

<u>Teorema 1.5</u> (Fórmula de la Primera Variación)

Sea L un lagrangiano de clase C^2 en una variedad M. Si $\gamma : [a,b] \to M$ es una curva extremal de clase C^2, para cada variación $\Gamma : [a,b] \times \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to M$, $(t,s) \to \Gamma(t,s)$ de γ tenemos:

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)\Big|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}\left(\gamma(b), \dot{\gamma}(b)\right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b,0) - \frac{\partial L}{\partial v}\left(\gamma(a), \dot{\gamma}(a)\right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a,0).$$

<u>Demostración:</u> Como $\gamma([a,b]) \subset M$ es un compacto, podemos tomar una subdivisión de $[a,b]$ en subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$ con $i = 0,\ldots,k$ donde cada subsegmento $\gamma([a_i, a_{i+1}])$ esté incluido en un entorno coordenado.

Como $\gamma([a_i\,,a_{i+1}])$ es extremal, γ cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas y entonces también cumple la Formula de la Primera Variación (Para el caso en que M es un abierto de R^n) vista en el teorema 0.10

$$\frac{d}{ds}\mathrm{L}\left(\Gamma_s\big|_{[a_i,a_{i+1}]}\right)\Big|_{s=0}=\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a_{i+1}),\dot{\gamma}(a_{i+1}))\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(a_{i+1},0)-\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a_i),\dot{\gamma}(a_i))\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(a_i,0)$$

Sumando en *i*, encontramos que los términos intermedios se cancelan, entonces

$$\frac{d}{ds}\mathrm{L}(\Gamma_s)\Big|_{s=0}=\sum_{i=0}^{k}\frac{d}{ds}\mathrm{L}\left(\Gamma_s\big|_{[a_i,\,a_{i+1}]}\right)\Big|_{s=0}$$

$$\frac{d}{ds}\mathrm{L}(\Gamma_s)\Big|_{s=0}=\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(b),\dot{\gamma}(b))\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(b,0)-\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a),\dot{\gamma}(a))\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(a,0). \qquad \blacksquare$$

Definiremos a continuación un lagrangiano no-degenerado.

Definición 1.6 *Si L es un lagrangiano de clase C^2 en la variedad M, decimos que L es no-degenerado si para cada $(x,v)\in TM$ la segunda derivada parcial $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x\,,\,v)$ es no-degenerada como una forma cuadrática.*

Tomando en cuenta lagrangiano no degenerado, definimos a continuación la Transformada de Legendre.

Definición 1.7 *Si L es un lagrangiano de clase C^r en la variedad M, definimos la Transformada de Legendre, como la aplicación, $\mathcal{L}: TM \to T^*M$, C^{r-1}, asociada a L dada por:*

$$\mathcal{L}(x,v)=\left(x,\frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right)$$

Calculando en coordenadas el diferencial de $\mathcal{L}$ en un punto $(x\,,v)$ obtenemos que

$$d\mathcal{L}(x,v)=\begin{pmatrix} Id_{\Re^n} & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial v}(x,v) & \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v)\end{pmatrix}$$

Que implica que $d\mathcal{L}(x,v)$ es invertible sí y solo sí $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v)$ es invertible.

La siguiente proposición nos ayudara en la demostración de resultados presentados posteriormente y es consecuencia directa del teorema de la función inversa.

Proposición 1.8

Sea $L: TM \to M$ *un Lagrangiano de clase* C^2 *y* $\mathcal{L}: TM \to T^*M$ *su transformada de Legendre. Se cumple entonces que:*

1) L *es no degenerado* C^r *sí y solo sí* $\mathcal{L}$ *es un difeomorfismo local* C^{r-1}.

2) L *es no degenerado* C^r *y* $\mathcal{L}$ *es inyectiva sí y solo sí* $\mathcal{L}$ *es un difeomorfismo* C^{r-1} *sobre su imagen.*

Con todo lo visto hasta ahora, podemos probar que si γ es extremal de clase C^1 de L , un lagrangiano no degenerado, entonces necesariamente γ tiene la misma regularidad que L .

Corolario 1.9

Si $L: TM \to \mathbb{R}$ *es un Lagrangiano no degenerado de clase* C^r, $r \geq 2$ *en un abierto* $M \subset \mathbb{R}^n$. *Entonces toda curva extremal* L *de clase* C^1 *es de clase* C^r.

Demostración: Sea $\gamma : [a,b] \to M$ una curva extremal de clase C^1. Fijando $t_0 \in [a,b]$, miramos el punto $(\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = (x_0, v_0) \in TM$. Como suponemos que L es no degenerado, por la proposición 1.8 su transformada de Legendre $\mathcal{L}: (x,v) \to \left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v) \right)$ es un difeomorfismo local de clase C^{r-1}.

Llamamos $\mathcal{K}: T^*M \to TM$ a su inversa local en el punto $\left(x_0, \frac{\partial L}{\partial v}(x_0, v_0) \right)$. Como ambas curvas γ y $\dot{\gamma}$ son continuas, entonces para *t* en un entorno de t_0 se cumple que

$$\left(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)\right)=\mathcal{K}\left(\gamma(t),\frac{\partial L}{\partial v}\left(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)\right)\right) \qquad (5)$$

Por el lema 0.6

$$\frac{\partial L}{\partial v}\left(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)\right)=\frac{\partial L}{\partial v}\left(\gamma(a),\dot{\gamma}(a)\right)+\int_a^t\frac{\partial L}{\partial x}\left(\gamma(s),\dot{\gamma}(s)\right)ds$$

Lo que implica que si γ es extremal de clase C^1.

Como L es C^1, la función $t\to\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\left(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)\right)$ es de clase C^1. De aquí que el lado derecho de la ecuación *(5)* es por lo menos C^1. Por lo tanto el lado izquierdo también, lo que significa que $\dot{\gamma}$ es C^1, esto es, la curva extremal γ es de clase C^2.

Este razonamiento se puede iterar:

Si L es C^2, como ahora γ es de clase C^2, entonces la función $\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\left(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)\right)$ se vuelve también de clase C^2. Suponiendo que $\mathcal{K}$ es de clase C^2 entonces la ecuación *(5)* implica que γ es de clase C^3.

Concluimos que sí que $\mathcal{K}$ es de clase C^{r-1} entonces γ es de clase C^r. ■

Probamos ahora un resultado más fuerte.

Proposición 1.10

Sea L un Lagrangiano $C^r, r\geq 2$ en la variedad M tal que la transformada de Legendre $\mathcal{L}:TM\to T^*M$ es un difeomorfismo sobre su imagen. Entonces toda curva extremal C^1 es C^r y por tanto satisface la ecuación de Euler-Lagrange.

Demostración: La suposición de $\mathcal{L}$ ser un difeomorfismo, implica por la proposición 1.8 que L es no degenerado y por el corolario anterior cada curva extremal de clase C^1 es de clase C^r

Sea $\gamma:[a,b]\to M$ una curva extremal continua por partes de clase C^1.

Consideremos una subdivisión $a = a_0 < a_1 < ... < a_{k+1} = b$ una subdivisión finita de $[a,b]$ talque la restricción $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es de clase C^1, para todo $i = 0,1,...,k.$

Estas restricciones también son curvas extremales y por el Lema 1.3 son de clase C^1 y por el corolario anterior son de clase C^r.

Resta ver qué sucede en tiempos $t = a_i$ para $i = 1,...,k.$

Sea la curva $\gamma_1 : [a,b] \to M$ de clase C^∞ la cual es cero en una vecindad de *a* y *b*, como γ es extremal sabemos que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}[(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))] \cdot (\gamma_1(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot (\dot{\gamma}_1(t))dt = 0$$

Como en cada subintervalo $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es de clase al menos C^2 para todo $i = 0,1,...,k.$

Si integramos por partes la ecuación anterior obtenemos que

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\partial L}{\partial v}[(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))] \cdot (\dot{\gamma}_1(t))dt = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot (\gamma_1(t))\Big|_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left\{ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right] \right\} \cdot (\gamma_1(t))dt$$

Así tenemos

$$0 = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}[(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))] \cdot (\gamma_1(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot (\dot{\gamma}_1(t))dt$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right] \cdot (\gamma_1(t))dt + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot (\gamma_1(t))\Big|_{a_i}^{a_{i+1}}$$

Y como cada curva $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es extremal de clase C^2, vemos entonces que cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange para todo $i = 0,1,...,k.$

Las integrales se anulan y llegamos finalmente a que

$$0 = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot (\gamma_1(t))\Big|_{a_i}^{a_{i+1}}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left[\frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a_{i+1}), \dot{\gamma}_-(a_{i+1})] \cdot (\gamma_1(a_i)) - \frac{\partial L}{\partial v}[\gamma(a_i), \dot{\gamma}_+(a_i)] \cdot (\gamma_1(a_i)) \right] = 0$$

Donde $\dot{\gamma}_-(t)$ es la derivada por la izquierda y $\dot{\gamma}_+(t)$ es la derivada por la derecha de γ para $t \in [a,b]$.

La igualdad obtenida se cumple para toda curva $\gamma_1 : [a,b] \to M$ de clase C^∞ que se anula en una vecindad de *a* y *b*. Dado un $1 \le i_0 \le k$, podemos elegir una curva $\overline{\gamma_1}$ de clase C^∞ que se anule en $[a, a_{i_0 -1}] \cup [a_{i_0 +1}, b]$ y tomando un a_{i_0} arbitrario concluimos que:

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot \left(\overline{\gamma_1}(t)\right)\Big|_{a_i}^{a_{i+1}} = \frac{\partial L}{\partial v}\left[\gamma(a_{i_0}), \dot{\gamma}_-(a_{i_0})\right] \cdot \left(\overline{\gamma_1}(a_{i_0})\right) - \frac{\partial L}{\partial v}\left[\gamma(a_{i_0}), \dot{\gamma}_+(a_{i_0})\right] \cdot \left(\overline{\gamma_1}(a_{i_0})\right) = 0$$

Como $\overline{\gamma_1}(a_{i_0})$ puede tomar cualquier valor, necesariamente se cumple que

$$\frac{\partial L}{\partial v}\left[\gamma(a_{i_0}), \dot{\gamma}_-(a_{i_0})\right] = \frac{\partial L}{\partial v}\left[\gamma(a_{i_0}), \dot{\gamma}_+(a_{i_0})\right]$$

Esto equivale a decir

$$\mathcal{L}\left(\gamma(a_{i_0}), \dot{\gamma}_-(a_{i_0})\right) = \mathcal{L}\left(\gamma(a_{i_0}), \dot{\gamma}_+(a_{i_0})\right)$$

Por ultimo queremos concluir que $\dot{\gamma}_-(a_{i_0}) = \dot{\gamma}_+(a_{i_0})$. Para esto precisamos la hipótesis que la transformada de Legendre $\mathcal{L}$ es un difeomorfismo sobre su imagen y entonces inyectiva, con lo cual $\dot{\gamma}_-(a_{i_0}) = \dot{\gamma}_+(a_{i_0})$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

En conclusión, cualquier curva γ extremal C^1 por partes, es necesariamente de clase C^1 y por lo tanto, conforme al corolario anterior, termina siendo de clase C^r. ■

Definimos ahora la condición de convexidad.

<u>Definición 1.11</u> *Decimos que L satisface la condición de convexidad si la segunda derivada $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v)$ es uniformemente definida positiva para todo $(x,v) \in TM$, esto es:*

Existe $A > 0$ tal que para todo $(x,v) \in TM$ y todo $w \in T_x M$ se tiene

$$w \cdot L_{vv}(x,v) \cdot w \ge A \|w\|^2 \qquad (6)$$

Por ejemplo el lagrangiano métrico dado por $L(x,v)=\frac{1}{2}\|v\|^2=\frac{1}{2}\langle\ v;\ v\ \rangle$ satisface la condición de convexidad ya que:

$$w\cdot L_{vv}(x,v)\cdot w=\|w\|^{2}$$

La siguiente proposición exhibe una condición sobre L para que $\mathcal{L}$ sea un difeomorfismo.

<u>Proposición 1.12</u>

Si L satisface la condición de convexidad, entonces la transformada de Legendre $\mathcal{L}: TM \to T^{*}M$ es un difeomorfismo C^1 sobre su imagen.

<u>Demostración:</u> En primer lugar, vamos a demostrar que $\mathcal{L}$ es inyectiva. Suponga que $L_v(x,v)=L_v(x,w)$ luego $L_v(x,v)(v-w)=L_v(x,w)(v-w)$ es definido para una función real f, por

$$f(t)=L_v(\ x,tv+(1-t)w)(v-w)$$

Tenemos que $f(1)=L_v(\ x,\ v)(v-w)=L_v(\ x,\ w)(v-w)=f(0)$

Entonces el teorema de Valor medio nos garantiza la existencia de $c\in(0,1)$ tal que $f'(c)=0$

Por otro lado

$$f'(t)=(v-w)L_{vv}(\ x,tv+(1-t)w)(v-w)>0 \quad \text{Si } v\neq w.$$

Por tanto $v=w$ y con eso $\mathcal{L}$ es inyectiva.

Para mostrar que $\mathcal{L}$ es un difeomorfismo observe que la matriz de $D\mathcal{L}$ en coordenadas locales está dada por

$$D\mathcal{L}(x,v)=\begin{bmatrix} Id & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial v}(x,v) & \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v)\end{bmatrix}$$

Como $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v)$ es no degenerado, $D\mathcal{L}(x,v)$ es invertible y el resultado sigue del Teorema de la Función Inversa. ■

La proposición anterior muestra que los lagrangianos que satisfacen la condición de convexidad cumplen la proposición 1.10.

Lema 1.13

Si L es convexo entonces para cada $x \in M$ y para todos $v, w \in T_x M$ tenemos que

$$L(x,w) - L(x,v) \geq L_v(x,v)(w-v)$$

Demostración: Definimos la función $f(t) = L(x, tw + (1-t)v)$ de esa forma, $f'(t) = L_v(x, tw + (1-t)v)(w-v)$, si $0 < t < 1$ tenemos:

$$\frac{f(t) - f(0)}{t-0} = \frac{L(x, tw + (1-t)v) - L(x,v)}{t}$$

$$\leq \frac{tL(x,w) + (1-t)L(x,v) - L(x,v)}{t}$$

$$= L(x,w) - L(x,v)$$

Luego

$$L_v(x,v)(w-v) = f'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t-0} \leq L(x,w) - L(x,v),$$

Como queríamos. ■

A continuación, definiremos superlinealidad.

Definición 1.14 *Decimos que L es superlineal si dado $A > 0$ existe $B > 0$ talque*

$$L(x,v) \geq A\|v\| - B, \quad \forall (x,v) \in TM.$$

Observación 1.15

Para que L sea superlineal es necesario y suficiente que

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \frac{L(x,v)}{\|v\|} = +\infty .$$

De hecho, si L es superlineal, dado $A > 0$ existe $B > 0$ tal que

$$L(x,v) \geq A\|v\| - B \geq A\|v\| \;\Rightarrow\; \lim_{\|v\|\to\infty} \frac{L(x,v)}{\|v\|} = +\infty$$

Recíprocamente, dado $A > 0$ existe $B_0 > 0$ tal que, si

$$\|v\| \geq B_0 \;\Rightarrow\; L(x,v) \geq A\|v\|$$

Haciendo $M = \min_{\|v\| \leq B_0} L(x,v)$ y $B = AB_0 + |M|$ obtenemos

Que si m $\|v\| \leq B_0 \;\Rightarrow\; L(x,v) \geq M \geq -|M| \geq -|M| + A(\|v\| - B_0)$

$$= -|M| + A\|v\| - AB_0$$

$$= A\|v\| - (|M| + AB_0) = A\|v\| - B$$

Por tanto, para todo $v \in T_x M$ tenemos $L(x,v) \geq A\|v\| - B$.

Por ejemplo para el lagrangiano métrico dado por $L(x,v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 = \frac{1}{2}\langle\, v\,;\, v\,\rangle$ vemos que L es superlineal ya que:

$$\lim_{\|v\|\to\infty} \frac{L(x,v)}{\|v\|} = \lim_{\|v\|\to\infty} \frac{1}{2}\|v\| = +\infty$$

Ahora definiremos la condición de acotación, donde definimos $\psi(r)$ y $\sigma(r)$ para encontrar cotas para la función energía de un lagrangiano.

<u>Definición 1.16</u> *El lagrangiano L satisface la condición de acotado si dado $r \geq 0$ se tiene:*

$$\psi(r) = \sup\{L(x,v)\,;\,(x,v) \in TM\,, \|v\| \leq r\} < +\infty \tag{7}$$

$$y \quad \sigma(r) = \sup\{w \cdot L_{vv}(x,v) \cdot w\,;\,(x,v) \in TM\,, \|v\| \leq r \wedge \|w\| = 1\} < +\infty \tag{8}$$

De ahora en adelante, excepto cuando sea explícitamente mencionado, las variedades M serán supuestas completas y los lagrangianos L de clase $C^r, r \geq 3$ satisfaciendo las condiciones de convexidad, superlinealidad y acotación ya que bajo esas condiciones vemos que la transformada de Legendre es un difeomorfismo.

Sabemos que si γ es una curva que satisface la ecuación de Euler-Lagrange tenemos entonces que

$$\frac{d}{dt}L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))=L_x(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))$$

Derivando la ecuación anterior:

$$L_{vx}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\cdot(\dot{\gamma}(t))+L_{vv}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\cdot(\ddot{\gamma}(t))=L_x(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))$$

Haciendo $x=\gamma(t)$, $v=\dot{\gamma}(t)$ obtenemos

$$L_{vx}(x,v)\cdot v+L_{vv}(x,v)\cdot\dot{v}=L_x(x,v)$$

Observe que L_{vv} es invertible por la convexidad y así mismo en coordenadas locales la ecuación de Euler-Lagrange puede ser escrita como un sistema de ecuaciones deferenciales de primer orden en TM:

$$\begin{cases}\dot{x}=v\\ \dot{v}=L_{vv}^{-1}(L_x-L_{vx}\cdot v)\end{cases}$$

El campo de vectores X_L en TM dado en coordenadas, por $X_L(x,v)=\left(v,L_{vv}^{-1}(L_x-L_{vx}\cdot v)\right)$ es un campo asociado al sistema dado, llamado ***Campo de Euler-Lagrange, su flujo denotado por*** φ_t^L***, es denominado el flujo de Euler-Lagrange.***

Observe que suponemos que L es de clase $C^r, r\geq 3$, para que X_L y φ_t^L sean por lo menos de clase C^1, como veremos más adelante φ_t^L es de clase C^{r-1}.

La función energía de un Lagrangiano L es $E:TM\rightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$E(x,v)=\frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\cdot v-L(x,v)$$

Si $\gamma:[a,b]\rightarrow U$ es una solución de la ecuación de Euler-Lagrange, entonces:

$$\frac{d}{dt}E(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))=\left[\frac{d}{dt}L_v(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))-L_x(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\right]\cdot\dot{\gamma}(t)=0$$

Esto muestra que E es constante a lo largo del flujo de Euler-Lagrange y así una integral primera para dicho sistema. Las curvas de nivel de E son dichos niveles de energía los cuales son invariantes bajo el flujo φ_t^L y $E(\varphi_t^L)\equiv k=cte.$

Eso nos da la idea de que el sistema de Euler-Lagrange puede ser conjugado a algún sistema Hamiltoniano, como veremos más adelante.

<u>Proposición 1.17</u>

Si ψ y σ están definidas por las ecuaciones (7) y (8), respectivamente, para algún $B>0$ tenemos $E(x,v)\geq -\psi(0)+\frac{B\|v\|^2}{2}$ y $E(x,v)\leq e_0+\sigma(\|v\|)\frac{\|v\|^2}{2}$.

<u>Demostración:</u> Por la convexidad, existe $A>0$ tal que $w\cdot L_{vv}(x,v)\cdot w\geq A\|v\|^2$.

Considere entonces $B=\inf\{w\cdot L_{vv}(x,v)\cdot w:\ \|w\|=1\ \ y\ \ (x,v)\in TM\}\geq A>0.$

Además, decimos

$$\frac{d}{ds}E\left(x,s\frac{v}{\|v\|}\right)=\frac{v}{\|v\|}\,L_{vv}\left(x,s\frac{v}{\|v\|}\right)\frac{sv}{\|v\|},\tag{9}$$

Donde

$$\frac{d}{ds}E\left(x,s\frac{v}{\|v\|}\right)=s\left(\frac{v}{\|v\|}\,L_{vv}\left(x,s\frac{v}{\|v\|}\right)\frac{v}{\|v\|}\right)\geq sB.$$

Por la condición de acotación, definida en 1.16

$$E(x,v)=E(x,0)+\int_0^{\|v\|}\frac{d}{ds}E\left(x,s\frac{v}{\|v\|}\right)ds\tag{10}$$

$$\geq -L(x,0)+\int_0^{\|v\|}sB\,ds$$

$$\geq -\psi(0) + \frac{B\|v\|^2}{2}.$$

Para probar la segunda desigualdad, observe que la ecuación *(9)* implica que

$$\frac{d}{ds} E\left(x, s\frac{v}{\|v\|}\right) \leq s\,\sigma\left(\|v\|\right),\ |s| \leq \|v\|.$$

Por lo tanto,

$$E(x,v) \leq e_0 + \int_0^{\|v\|} s\,\sigma\left(\|v\|\right) ds = e_0 + \sigma\left(\|v\|\right) \frac{\|v\|^2}{2}$$

Como queríamos. ■

Desde que L es limitado inferiormente, podemos considerar

$$e_0 = \sup_{x\in M}\{E(x,0)\} = -\inf_{x\in M}\{L(x,0)\} \qquad (11)$$

Lema 1.18

Si $\pi : TM \to M$ *es la proyección canónica, entonces*

$$e_0 = \min\left\{k \in \mathcal{R} : \pi|_{E^{-1}(k)} \to M \text{ es sobreyectiva}\right\}$$

Demostración: Como L es convexa sabemos por el Lema 1.13, que para todos v , $v_0 \in T_xM$ tenemos

$$L(x,v) - L(x,v_0) \geq L_v(x,v_0)\,(v - v_0)$$

En particular, para $v = 0$ obtenemos

$$E(x,v_0) = L_v(x,v_0)\,v_0 - L(x,v_0) \geq -L(x,0) = E(x,0) \quad \forall v_0 \in T_xM$$

Sea $C = \left\{ k \in \mathcal{R} : \pi|_{E^{-1}(k)} \to M \text{ es sobreyectiva}\right\}$ y $k \in C$.

De esa forma, dado $x \in M$ existe $v_0 \in T_xM$ tal que $E(x,v_0) = k$ y de ahí

$$k = E(x, v_0) \geq E(x,0) \Rightarrow \inf\ C \geq \sup_{x\in M}\{E(x,0)\}.$$

Entretanto $\sup_{x \subset M}\{E(x,0)\} \in C.$

En efecto, por la proposición 1.15 la imagen de la aplicación $v \to E(y,v)$ será $[E(y,0)\ ,\ +\infty]$.

Entonces, dado $y \in C$ como $E\ (y,0) \leq \sup_{x\in M}\{E\ (x,0)\}$ tenemos que existe w tal que $E\ (y,w) = \sup_{x\in M}\{\,E\ (x,0)\,\}.$ ■

Los siguientes corolarios nos ayudaran en demostrar que el flujo de Euler-Lagrange es completo.

<u>Corolario 1.19</u>

Para cada trayectoria $\varphi_t^L(w) = (\gamma(t), \dot\gamma(t))$ *existe* $K > 0$ *tal que* $\|\ \dot\gamma(t)\ \| \leq K$*, es decir, la solución de Euler-Lagrange tiene velocidad acotada.*

<u>Demostración:</u> Si $E(w) = k$ entonces $E(\gamma(t), \dot\gamma(t)) = k = cte.$ Por la proposición 1.15 tenemos,

$$k = E(\gamma(t), \dot\gamma(t)) \geq -\psi(0) + \frac{B\|\dot\gamma(t)\|^2}{2}$$

Y, por consiguiente

$$\|\dot\gamma(t)\| \leq \sqrt{2\left(\frac{k+\psi(0)}{B}\right)} = K.$$

■

<u>Corolario 1.20</u>

Si una variedad M *es compacta, entonces dado* $u \in TM$ *, los conjuntos* ω *y* $\alpha -$ *límite de* u *son no nulos.*

<u>Demostración:</u> La trayectoria $\varphi_t^L(u)$ es de la forma $(\gamma(t), \dot\gamma(t))$ y por el corolario 1.19 la velocidad $\dot\gamma$ es acotada, y por lo tanto, se deriva de la compacidad de M que $\varphi_t^L(u)$ está contenido en un compacto. ■

Proposición 1.21

El flujo de Euler-Lagrange es completo, es decir que está definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración: Sean $w \in TM$ y (α, β) el intervalo maximal de definición de la aplicación $t \to \varphi_t^L(w)$. Supongamos que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $E(w) = k$ entonces $E(\varphi_t^L(w)) \equiv k$. Desde que $\varphi_t^L(w)$ es de la forma $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$, el corolario 1.19, sigue que existe $K > 0$ tal que $0 \leq \|\dot{\gamma}(t)\| \leq K$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$.

Además, decimos

$$d_M(\gamma(t), \gamma(0)) \leq \int_0^t \|\dot{\gamma}(s)\| \, ds \leq K\,t \leq K\,|\beta - \alpha| .$$

Eso muestra que γ está contenido en una bola cerrada de centro $\gamma(0)$ y radio $K|\beta - \alpha|$. Como M es completo, los acotados y cerrados de M son compactos y de ahí $\varphi_t^L(w)$ está contenido en un compacto.

Por tanto α y β no pueden ser finitos. ■

CAPITULO 2

Sea T_x^*M el espacio dual del espacio tangente T_xM y T^*M el fibrado cotangente de M, un punto de T^*M se denota por (x, p) donde $x \in M$ y $p \in T_x^*M$, además consideremos $\pi^* : T^*M \to M$ la proyección canónica del fibrado cotangente T^*M en M.

A continuación, definiremos un espacio vectorial simpléctico y forma simpléctica.

<u>Definición 2.1</u> *Un espacio vectorial simpléctico es una par (V, ω) donde V es un espacio vectorial provisto de una forma bilineal $\omega : V \times V \to R$ que es antisimétrica no degenerada.*

Estas dos condiciones en ω son:

- *Antisimétrica* $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$, $\forall u$, $v \in V$
- *No degenerada* $\omega(u, v) = 0$, $\forall\ v \in V \ \Rightarrow\ u = 0$

La forma ω es llamada forma simpléctica.

Por ejemplo, sea $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y ω la 2-forma dada por

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} dq_k \wedge dp_k$$

Donde $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ son coordenadas, $dq_k(z)=z_k$ y $dp_k(z)=z_{n+k}$

$\forall\ k\in\{1,\dots,n\}$, $\forall\ z=\{z_1,\dots,z_{2n}\}\in\mathbb{R}^{2n}$

Sabemos que ω es antisimétrica ya que es una consecuencia directa de la definición de producto exterior de formas.

Queda probar que ω es no degenerada.

Tomando $e_1,\dots,e_{2n}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2n}$

sea $u=\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i e_i\in\mathbb{R}^{2n}$ tal que $\omega(u,v)=0$, $\forall v\in\mathbb{R}^{2n}$, entonces en particular tenemos

$$\omega(u,e_i)=0\ ,\quad \forall i=1,\dots,2n$$

Pero

$$\begin{aligned}
\omega(u,e_i) &= \sum_{k=1}^{n} dq_k\wedge dp_k\ (u,e_i)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\det\begin{pmatrix} dq_k(u) & dq_k(e_i)\\ dp_k(u) & dp_k(e_i)\end{pmatrix}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\delta_{(k+n)i}-\alpha_{k+n}\delta_{ki}\right)\\
&= \begin{cases}\ \ \alpha_{i-n}, & si\ \ i=n+1,\dots,2n\\ -\alpha_{i+n}, & si\ \ i=1,\dots,n\end{cases}
\end{aligned}$$

En cualquier caso, resulta $\alpha_i=0,\quad\forall\ i=1,\dots,2n$. Es decir $u=0$ y por lo tanto ω es no degenerada.

La forma ω puede escribirse de la siguiente manera:

$$\omega(\cdot\ ,\ \cdot)=\langle\ J_0\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$$

Donde $\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$ es el producto interno Euclidiano canónico de $\mathbb{R}^{2n}$ y $J_0\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ es la matriz

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces el par (V, ω) es un espacio vectorial simpléctico.

Proposición 2.2

Si $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma simpléctica en el espacio vectorial V entonces la transformación lineal $\tilde{\omega} : V \to V^*$ dada por

$$\tilde{\omega}(x)(y) = \omega(x, y)$$

Es un isomorfismo.

Demostración: El núcleo de $\tilde{\omega}$ es el subespacio $U = \{x \in V \ / \ \omega(x, y) = 0 \ ; \ \forall \ y \in V\}$ y como ω es una forma simpléctica entonces U es nulo. ■

Proposición 2.3

En todo espacio vectorial simpléctico (V, ω), la dimensión de V es par.

Demostración: Si fijamos una base $e_1, ..., e_n$ en V, entonces la estructura simpléctica ω está bien definida por su matriz de estructura asociada $A = (A_{ij})$, donde $A_{ij} = \omega(e_i, e_j)$, entonces tenemos

$$\det A = \det A^{\mathrm{T}} = \det(-A) = (-1)^m \det A$$

Donde m es la dimensión de V.

Debido a que la matriz A es no degenerada tenemos que $\det A \neq 0$ y entonces

$$\det A = (-1)^m \det A \Rightarrow 1 = (-1)^m$$

Por lo tanto $\dim V = m$ es par. ■

Ahora definiremos las variedades simplécticas.

<u>Definición 2.4</u> *Una variedad simpléctica es un par* (M,ω) *donde* M *es una variedad diferenciable y* ω *es una 2-forma tal que*

1) ω *es cerrada, esto es* $d\omega = 0$.

2) ω *es no degenerada, es decir dados* $x \in M$ *y* $W \in T_x M$ *la aplicación* $\rho : T_x M \to (T_x M)^*$ *dada por* $\rho(W) = \omega(W,\cdot)$ *es un isomorfismo.*

Por ejemplo, si consideramos la esfera S^2 y su forma de área ω, que es cerrada por ser de grado máximo.

Si vemos S^2 sumergida en R^3 como la esfera de radio 1 y consideramos el radio vector v en cada punto de la esfera con coordenadas (x,y,z), la expresión concreta de esta forma en este punto es

$$\omega = \det(v,\cdot,\cdot) = x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy$$

En efecto, como en la esfera unidad

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} x\omega &= x^2\,dy \wedge dz + x\,dx(-y\,dz + z\,dy) \\ &= x^2\,dy \wedge dz + (-y\,dy + z\,dz) \wedge (-y\,dz + z\,dy) \\ x\omega &= (x^2 + y^2 + z^2)dy \wedge dz \end{aligned}$$

Análogamente tenemos

$$y\omega = -(x^2 + y^2 + z^2)dx \wedge dz$$

$$z\omega = (x^2 + y^2 + z^2)dx \wedge dy$$

En cada una de las expresiones anteriores, el miembro de la derecha se anula en el plano tangente a la esfera en los puntos en los que se anula el correspondiente x, y o z de la izquierda, tenemos que la forma ω nunca se anula en la esfera.

También se puede ver como se expresa esta forma en coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \cos\phi \ sen\ \theta \\ y = sen\phi \ \cos\ \theta \\ z = \cos\ \theta \end{cases}$$

Luego tenemos

$$\begin{cases} dx = -sen\phi \ sen\ \theta \ d\phi + \cos\phi \ \cos\ \theta \ d\theta \\ dy = \cos\phi \ sen\ \theta \ d\phi + sen\phi \ \cos\ \theta \ d\theta \\ dz = -sen\theta \, d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\,x \wedge d\,y = -sen\theta \cos\theta \, d\,\phi \wedge d\,\theta \\ d\,x \wedge d\,z = sen\phi \ sen^2\,\theta \ d\,\phi \wedge d\,\theta \\ d\,y \wedge d\,z = -\cos\phi \ sen^2\,\theta \ d\,\phi \wedge d\,\theta \end{cases}$$

Por ultimo tenemos

$$\omega = -\left(\cos^2\phi \ sen^3\,\theta + sen^2\phi \ sen^3\,\theta + sen\theta \cos^2\theta\right) d\,\phi \wedge d\,\theta = -sen\theta \ \ d\,\phi \wedge d\,\theta$$

Que es la forma de área típica en coordenadas esféricas.

Definiremos a continuación Pull-back.

Definición 2.5 *Sea* M *una variedad y* (N,η) *una variedad simpléctica, dada la función diferenciable* $f : M \to N$*, definimos* $f^*\eta : T_x M \to \mathbb{R}$ *una 2-forma en* M *el cual llamaremos el Pull-back de* η *mediante la función f, a la siguiente expresión:*

$$\left(f^*\eta\right)_x \vec{v} = \eta_{f(x)}\left(d\,f_x \vec{v}\right) \qquad \textit{para todo } x \in M,\ \vec{v} \in T_x M$$

A continuación, definiremos 1-forma de Liouville

<u>Definición 2.6</u> *Sea M una variedad diferenciable, definimos una 1-forma de Liouville a la aplicación* $\alpha(x,\rho): T_{(x,\rho)}(T^*M) \to \mathbb{R}$ *que es la compuesta de las aplicaciones lineales* $d_{(x,\rho)}\pi^*: T_{(x,\rho)}(T^*M) \to T_xM$ *y* $\rho: T_xM \to \mathbb{R}$*, definida por:*

Para cada $\xi \in T_{(x,\rho)}(T^*M)$*, tenemos:*

$$\alpha_{(x,\rho)}\ (\xi) = \rho \circ d\,\pi^*{}_{(x,\rho)}\,\xi = \rho\left(d\,\pi^*{}_{(x,\rho)}\,\xi\right).$$

Localmente podemos ver el resultado anterior, consideremos una carta $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \to \varphi(U) \subset M$ y su carta asociada $\varphi^*: U \times \mathbb{R}^n \to T^*M$. Como la proyección $\pi^*: T^*M \to M$, esto nos da las coordenadas $(x_1,\ldots,x_n)$ de M y las coordenadas $(x_1,\ldots,x_n;\rho_1,\ldots,\rho_n)$ de T^*M. Si un vector $W \in T_{(x,\rho)}(T^*M)$ tiene coordenadas $(X_1,\ldots,X_n;P_1,\ldots,P_n)$ las coordenadas de $d\pi^*(W)$ son $(X_1,\ldots,X_n)$.

Entonces en estas coordenadas la forma α está escrita como

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \rho_i\ dx_i$$

Por lo tanto concluimos que α es de clase C^∞.

La 1-forma de Liouville posees la siguiente propiedad que la caracteriza.

<u>Lema 2.7</u>

Sea ω *una 1-forma diferenciable definida en un subconjunto abierto* U *de* M*, con* $\omega(x) = (x,\omega_x)$*, tenemos entonces*

$$\omega^*\,\alpha = \omega$$

Donde $\omega^*\,\alpha$ *es el pull-back de la forma de Liouville* α *en* T^*M *por la aplicación* $\omega: U \to T^*U$

.

<u>Demostración:</u> Sean $(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$las coordenadas en un entorno de M y las coordenadas en el dual $(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ donde hacemos énfasis en marcar la diferencia entre $\tilde{x}_i: U \to \mathbb{R}$ (las funciones coordenadas en M) con las funciones coordenadas $x_i : T^*U \to \mathbb{R}$ en T^*M. En general se hace un ligero abuso de notación llamando a ambas x_i.

En estas coordenadas la 1-forma se escribe como $\omega(x) = (x_1,..., x_n, \omega_1(x),..., \omega_n(x))$ y su diferencial es

$$d_x\omega = \sum_{i=1}^{n} d\,\tilde{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + d_x\,\omega_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

Sabemos además que en coordenadas $\alpha(x, \omega_x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i$

Y como $\omega^*\alpha$ es el pull-back de la forma de Liouville, tenemos $(\omega^*\alpha)_x = \alpha_{(x,\omega_x)}(d_x\omega)$ entonces

$$\begin{aligned}(\omega^*\alpha)_x &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i\left(\sum_{i=1}^{n} d\,\tilde{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + d_x\,\omega_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, d\,\tilde{x}_i\\ &= \omega_x\end{aligned}$$

Por lo tanto $\omega^*\alpha = \omega$. ■

Veremos a continuación que la 1-forma de Liouville sirve para dar una estructura natural de variedad simpléctica al fibrado cotangente de cualquier variedad,

Proposición 2.8

Sea M una variedad y T^*M su fibrado cotangente. Si tomamos la 2-forma Ω en M dada por $\Omega = -d\alpha$, donde $\alpha : M \to T^*M$ es la 1-forma de Liouville, entonces (T^*M, Ω) es una variedad Simpléctica.

Demostración: Por ser la derivada exterior de una 1-forma, sabemos que Ω es cerrada. Solo faltaría verificar que es no degenerada, para lo cual tomaremos un sistema de coordenadas en el dual $(x_1,..., x_n, \xi_1,..., \xi_n)$, en las cuales $\alpha(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, dx_i$ entonces

$$
\begin{aligned}
\Omega &= -d\alpha \\
&= -d\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \; dx_i\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} d\xi_i \wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} d\, x_i \wedge d\, \xi_i
\end{aligned}
$$

Ahora, tomemos un vector $v \in T_{(x,\xi)}M$ y lo descomponemos en

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

Por lo tanto, si fijamos el v, obtenemos la siguiente 1-forma en $T_{(x,\xi)}M$

$$\Omega_{(x,\xi)}(v,\cdot) = \sum_{i=1}^{n} v_i \; d\xi_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \; dx_i \tag{12}$$

Como el conjunto $(dx_1,...,dx_n, d\xi_1,..., d\xi_n)$ es una base de $T^*_{(x,\xi)}M$ entonces

$$\Omega_{(x,\xi)}(v,\cdot) \equiv 0 \text{ si y solo si } v \equiv 0$$

Concluyendo que Ω es no degenerada y por lo tanto el par (T^*M,Ω) es una variedad Simpléctica. ■

Definamos a continuación hamiltoniano.

<u>Definición 2.9</u> *Una función* $H : T^*M \to \mathbb{R}$ *de clase* C^r *,* $r \geq 2$ *es dicha Hamiltoniana. El campo de vectores Hamiltoniano* X_H *asociado al hamiltoniano* H *está definido por*

$$\Omega_x(X_H(x),\cdot) = d_x H(\cdot)$$

Observe que el campo Hamiltoniano X_H es únicamente determinado por Ω que es una forma simpléctica.

Desde que, en coordenadas locales,

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

Por la ecuación *(12)* tenemos

$$X_H(x, p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Entonces, en coordenadas locales, el sistema Hamiltoniano que prueba que el campo X_H está dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p \\ \dot{p} = -H_x \end{cases}$$

El flujo φ_t^H de este sistema es llamado flujo Hamiltoniano.

<u>Lema 2.10</u>

Sea $H : M \to \mathbb{R}$ una función C^2 definida en un subconjunto abierto M de la variedad simpléctica V, entonces H es constante sobre las orbitas del flujo hamiltoniano φ_t^H .

<u>Demostración:</u> Debemos comprobar que

En efecto, si $(x(t), p(t))$ es una curva solución del sistema Hamiltoniano, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(H\left(\varphi_t^H(p)\right)\right) &= dH_{\varphi_t^H(p)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^H(p) \\ &= dH_{\varphi_t^H(p)} X_H\left(\varphi_t^H(p)\right) \\ &= \Omega_{\varphi_t^H(p)}\left(X_H\left(\varphi_t^H(p)\right), X_H\left(\varphi_t^H(p)\right)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto H es constante sobre las orbitas del flujo hamiltoniano φ_t^H . ■

Precisamos de una función definida en el fibrado cotangente T^*M de tal forma que el flujo Hamiltoniano asociado a ella sea conjugado al flujo de Euler-Lagrange.

Una función con esa propiedad es la transformada de Fenchel definida a continuación.

Definición 2.11 *La transformada de Fenchel de un Lagrangiano L es una aplicación* $H : T^*M \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$H(x, p) = \underset{v \in T_x M}{Sup} \{pv - L(x,v)\}$$

Mostraremos que H está bien definida.

Por la superlinealidad de L , dado $v \in T_x^* M$

$$\underset{\|v\| \to \infty}{Lim} \frac{pv - L(x,v)}{\|v\|} = -\infty$$

Entonces existe $K > 0$ tal que $\underset{v \in T_x M}{Sup} \{pv - L(x,v)\} = \underset{\|v\| \le K}{Max} \{pv - L(x,v)\}$.

Proposición 2.12

La transformada de Fenchel H *de un Lagrangiano* L *es convexa y superlineal.*

Demostración: Dados $p_1, p_2 \in T_x^* M$ y $t \in [0,1]$ tenemos:

$$H(x, t\, p_1 + (1-t) p_2) = \sup_{v \in T_x M} \{(t\, p_1 + (1-t) p_2) v - L(x,v)\}$$

$$\le \sup_{v \in T_x M} \{t\, p_1 v - t\, L(x,v)\} + \sup_{v \in T_x M} \{(1-t)\, p_2\, v - (1-t) L(x,v)\}$$

$$= t\, H(x, p_1) + (1-t) H(x, p_2)$$

Que muestra la convexidad de H.

Mostremos que H es superlineal. En efecto, Dado $A > 0$,

$$H(x, p) = \sup_{v \in T_x M} \{p v - L(x,v)\}$$

$$\ge \sup_{\|v\| = A} \{p v - L(x,v)\}$$

$$\geq \sup_{\|v\|=A}\{pv\} + \sup_{\|v\|=A}\{-L(x,v)\}$$

$$= \|p\|A - B$$

Donde $B = \min_{\|v\|=A}\{L(x,v)\}$

Por lo tanto la transformada de Fenchel H es convexa y superlineal. ■

El siguiente lema relaciona la transformada de Fenchel con el lagrangiano L .

Lema 2.13

Si H es una transformada de Fenchel de L *, entonces* $H(x,p) = pv - L(x,v)$ *sí y solo sí* $p = L_v(x,v)$*. Además decimos* $H = E \circ \mathcal{L}^{-1}$*, donde* E *es la energía y* $\mathcal{L}$ *es la transformada de Legendre de* L *.*

Demostración: Usando el Lema 1.13 dados $v, w \in T_x M$ tenemos

$$L_v(x,v)v - L(x,v) \geq L_v(x,v)w - L(x,w)$$

Entonces

$$L_v(x,v)v - L(x,v) \geq \max_{w \in T_x M}\{L_v(x,v)w - L(x,w)\} = H(x, L_v(x,v))$$

Mostrando que

$$H(x, L_v(x,v)) = L_v(x,v)v - L(x,v) \text{ y } H \circ \mathcal{L}(x,v) = E(x,v).$$

Recíprocamente, si $H(x,p) = pv - L(x,v)$ fijando w tenemos

$$pv - L(x,v) = H(x,p) \geq p(v + \varepsilon w) - L(x, v + \varepsilon w) \ , \ \forall \varepsilon > 0.$$

Luego por la diferenciabilidad de L ,

$$L(x, v + \varepsilon w) - L(x,v) \geq \varepsilon\, p w$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{L(x,v+\varepsilon w)-L(x,v)}{\varepsilon} \geq p\,w$$

Entonces $L_v(x,v)w \geq p\,w$

Desde que $(L_v(x,v)-p)w \geq 0$ para todo w y $L_v(x,v)-p$ es lineal, sigue que:

$$L_v(x,v)-p=0$$

Entonces $p=L_v(x,v)$ ■

La siguiente proposición muestra la conjugación entre los flujos de Euler Lagrange y flujo Hamiltoniano.

Proposición 2.14

La transformada de Legendre $\mathcal{L}: TM \to T^*M$ es una conjugación entre el flujo de Euler-Lagrange y el flujo Hamiltoniano.

Demostración: Es suficiente probar que $D\mathcal{L}(x,v)X_L(x,v)=X_H(\mathcal{L}(x,v))$.

Observe que

$$D\mathcal{L}(x,v)X_L(x,v)=\begin{bmatrix} Id & 0 \\ L_{xv}(x,v) & L_{vv}(x,v)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ L_{vv}^{-1}(L_x-L_{xv}\,v)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v \\ L_x(x,v)\end{bmatrix}$$

Ahora, escribiendo $\mathcal{L}^{-1}(x,p)=(x,h(x,p))$ tenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\circ\mathcal{L}=id \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(x,L_v(x,v))=(x,v) \quad \Rightarrow v=h\,(x,L_v(x,v))$$

$$\mathcal{L}\circ\mathcal{L}^{-1}=id \Rightarrow \mathcal{L}\,(x,\,h(x,p))=(x,p) \quad \Rightarrow p=L_v(x,h(x,p))$$

Usando el lema anterior

$$H(x,p)=E\circ\mathcal{L}^{-1}(x,p)$$

De ahí $H(x,p)=L_v(x,h(x,p))h(x,p)-L(x,h(x,p))=p\,h(x,p)-L(x,h(x,p))$

Sigue que

$$H_p(x,p) = h(x,p) + ph_p(x,p) - L_v(x,h(x,p))h_p(x,p) = h(x,p) \qquad (13)$$

$$H_x(x,p) = ph_x(x,p) - L_x(x,h(x,p)) - L_v(x,h(x,p))h_x(x,p)$$

$$= -L_x(x,h(x,p)) \qquad (14)$$

Por lo tanto

$$X_H(\mathcal{L}(x,v)) = [h(x,L_v(x,v)) ; L_x(x,h(x,L_v(x,v)))] = [v ; L_x(x,v)]$$

Como deseábamos. ■

Tengamos en cuenta la siguiente observación,

Observación 2.15

Las ecuaciones *(13)* y *(14)* muestran que *H* es de la misma clase de diferenciabilidad que el Lagrangiano L .

Corolario 2.16

Si L es de clase C^r *entonces el flujo de Euler-Lagrange* X_L *es de clase* C^{r-1}.

Demostración: Por la expresión de X_L vista en el capítulo 1, tenemos que si $L \in C^r$ implica que $\varphi_t^L \in C^{r-2}$.

Entretanto como hemos observado más arriba $L \in C^r$ implica que $H \in C^r$ y por definición, $X_H \in C^{r-1}$.

La transformada de Legendre es un difeomorfismo de clase C^{r-1}.

Más aun

$$\varphi_t^L(x,v) = \mathcal{L}^{-1} \circ \varphi_t^H \circ \mathcal{L}(x,v)$$

O también

$$\varphi_t^H(x,v) = \mathcal{L} \circ \varphi_t^L \circ \mathcal{L}^{-1}(x,v)$$

Sigue que

$$X_L \in C^{r-1}. \qquad \blacksquare$$

Definiremos a continuación subespacio lagrangiano.

<u>Definición 2.17</u> *En un espacio vectorial E dotado de una forma bilineal simplética $\omega : E \times E \to \mathcal{R}$, un subespacio lagrangiano es un subespacio F de E con $\dim E = 2\dim F$ y ω es idénticamente 0 en $F \times F$.*

<u>Lema 2.18</u>

Sea F un subespacio lagrangiano de (E,ω) un espacio vectorial simpléctico. Si $x \in E$ es tal que $\omega(x, y) = 0$ para todo $y \in F$ entonces el vector x está en F.

<u>Demostración:</u> Sea $F^{\perp} = \{x \in E \ / \ \omega(x, y) = 0\}$ para todo $y \in F$ el subespacio formado por los vectores ortogonales a *F*.

Como F es un subespacio lagrangiano se cumple $F \subset F^{\perp}$.

Además la aplicación $\tilde{\omega} : E \to E^*$ que asocia $x \to \omega(x,\cdot)$ es un isomorfismo por la proposición 2.2

Como la imagen de $F^{\perp}$ por esta aplicación es el conjunto $\tilde{\omega}(F^{\perp}) = \{p \in E^* \ / \ p|_F = 0\}$ de funcionales cuyo núcleo incluye a *F*, entonces $\tilde{\omega}(F^{\perp})$ se puede identificar con $(E/F)^*$ Por lo tanto tenemos que la dimensión

$$\dim(F^{\perp}) = \dim(\tilde{\omega}(F^{\perp})) = \dim((E/F)^*) = \dim(E) - \dim(F) = \dim(F)$$

Y como $F \subset F^{\perp}$ tenemos entonces $F^{\perp} = F$ $\blacksquare$

Ahora definiremos subvariedad lagrangiana.

Definición 2.19 *Si V es una variedad simplética, una subvariedad lagrangiana de V es una subvariedad N de clase al menos C^1 y tal que el subespacio T_xN de T_xV es para cada $x \in N$ un subespacio lagrangiano de forma bilineal simplética Ω_x.*

Por el lema 2.18, si $x \in N$, cualquier vector $v \in T_xV$ tal que $\Omega_x(v,v')=0$ para todo $v' \in T_xN$ está necesariamente en T_xN.

Por ejemplo, si consideramos la esfera S^2 y la forma ω, definida por

$$\omega(x,y,z) = x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy$$

Sea $\mathcal{C} : (x,y,z) \in S^2 \ , \ x=0 \ , \ \ y^2+z^2=1$

Consideremos una parametrización

$$\alpha(t) = (0, \cos t \ , sen\ t)$$

Entonces su espacio tangente será $T_{\alpha(t)}\ \mathcal{C} = \langle 0 \ , -sen\ t \ , \cos t \rangle$

$$\begin{aligned}
\omega_{T_{\alpha(t)}\mathcal{C} \times T_{\alpha(t)}\mathcal{C}} &= \omega_{(u,v)} = \omega((0\ ,\ -sen\ t\ ,\ \cos\ t),(0\ ,\ -sen\ t_0\ ,\ \cos\ t_0)) \\
&= 0 - \cos\ t\ dx \wedge dz + sen\ t\ dx \wedge dy \\
&= -\cos\ t \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \cos\ t & \cos\ t_0 \end{vmatrix} + sen\ t \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -sen\ t & -sen\ t_0 \end{vmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces $\omega(u,v)=0$

Por lo tanto $\mathcal{C} : (x,y,z) \in S^2 \ , \ x=0 \ , \ \ y^2+z^2=1$ es una subvariedad lagrangiana.

Definiremos a continuación el gráfico.

Definición 2.20 *Sea ω una 1-forma diferencial de un subconjunto abierto U de M. El gráfico de ω es el conjunto*

$$Graf\,(\omega) = \{ \ (x, \omega_x) \ / \ x \in U \ \} \subset T^*M$$

Por ejemplo sea la esfera S^2, una parametrización del hemisferio superior es

$$\varphi(u,v)=\left(u,v,\ \sqrt{1-u^2-v^2}\ \right)$$

Las derivadas son

$$\frac{\partial}{\partial u}=\left(1,0,\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)\quad,\qquad \frac{\partial}{\partial v}=\left(0,1,\ \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

Todo vector $\vec{v}\in T_{\varphi(u,v)}S^2$ es de la forma $\vec{v}=a\frac{\partial}{\partial u}+b\frac{\partial}{\partial v}$

Su base dual es $\{du,dv\}$ y $du(\vec{v})=a \quad , \quad dv(\vec{v})=b$

Definimos la forma $\omega_p=du+dv$

Entonces el gráfico es $Graf(\omega)=\{(p,\omega_p)\ /\ p\in S^2\}\subset T_{\varphi(u,v)}S^2$

Mostraremos a continuación un lema importante para gráfico.

Lema 2.21

Si ω esa una 1-forma diferencial C^1 en una variedad M, entonces el gráfico $Graf(\omega)$ de ω es una subvariedad lagrangiana de T^*M si y solo si ω es una forma cerrada.

Demostración: Si ω es 1-forma, por el lema 2.6 tenemos

$$\omega=\omega^*\alpha$$

y por lo tanto también $d\omega=\omega^*(d\alpha)=-\omega^*(\Omega)$

$$d\omega_x=-\Omega_{(x,\omega_x)}$$

Sin embargo la forma $\omega : M\to T^*M$ induce un difeomorfismo de clase C^1 de M en $Graf(\omega)$, es decir $\omega : M\to Graf(\omega)$

Por lo tanto $d\omega_x=0$ si y solo sí $\Omega_{(x,\omega_x)}=0$

es decir $d\omega = 0$ si y solo sí $\Omega_{Graf(\omega)} = 0$ ■

Definiremos a continuación un conjunto invariante.

<u>Definición 2.22</u> *Sea* $\varphi_t : M \to M$, *si* $N \subset M$, *se dice que N es invariante por* φ_t *sí* $\varphi_t(N) \subseteq N$.

Con todo lo presentado ahora enunciaremos y demostraremos el teorema principal de nuestro trabajo, conocido como Hamilton-Jacobi.

<u>Teorema 2.23</u> (*Hamilton-Jacobi)*

Sea $H : O \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^2 *definida en un subconjunto abierto* O *de una variedad simplética* V *, si* $N \subset O$ *es una* C^1 *subvariedad lagrangiana de* V *, es localmente invariante por el flujo* φ_t^H *sí y solo sí* H *es constante en* N *.*

<u>Demostración:</u> Si H es constante en N, tenemos

$$\forall x \in N, \quad d_x H \big|_{T_x N} = 0$$

Y por lo tanto $\Omega_x(X_H(x), v) = 0$ para todo $v \in T_x N$ y por el lema 2.18 como $T_x N$ es un subespacio lagrangiano entonces $X_H(x) \in T_x N$ para todo $x \in N$.

Luego podemos restringir el campo $X_H : O \to TO$ de clase C^1 a un campo en la subvariedad N. Por unicidad del teorema de Cauchy-Lipschitz [2] , las soluciones de φ_t^H en N también son órbitas de φ_t^H en O y por lo tanto la subvariedad N es invariante por el flujo hamiltoniano en O.

Por el contrario, si N es invariante por φ_t^H, entonces para todo $x \in N$, las curvas $\gamma(t) = \varphi_t^H(x)$ definidas en un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ están incluidas en N, es decir que su velocidad $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} N$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. En particular tiene una velocidad $X_H(x)$ para $t = 0$ que debe estar en $T_x N$.

Por definición de campo Hamiltoniano, para cada $x \in N$ se cumple:

$$d_x H \big|_{T_x N} = \omega\left(X_H(x), \cdot\right) \big|_{T_x N}$$

Pero como $X_H(x) \in T_x N$ y N es una subvariedad lagrangiana desaparece en cada punto de N, es decir $\omega_x \big|_{T_x N \times T_x N} \equiv 0$ entonces

$d_x H \big|_{T_x N} \equiv 0$ para todo $x \in N$

con lo que la restricción $H \big| N$ es constante. ■

De la proposición 2.14 tenemos que la transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ es una conjugación entre el flujo de Euler-Lagrange y el flujo Hamiltoniano, si $A \subset T^*M$, $\exists B \subset TM \;/\; \mathcal{L}(B) = A$.

Si A es invariante por el flujo hamiltoniano φ_t^H tenemos

$$\varphi_t^H (A) \subseteq A$$
$$\mathcal{L} \circ \varphi_t^L \circ \mathcal{L}^{-1}(A) \subseteq A$$
$$\varphi_t^L \circ \mathcal{L}^{-1}(A) \subseteq \mathcal{L}^{-1}(A)$$
$$\varphi_t^L (B) \subseteq (B)$$

Sí y solo sí B es invariante por el flujo lagrangiano φ_t^L.

A continuación, enunciaremos un teorema, cuya demostración es inmediata del teorema de Hamilton-Jacobi.

Teorema 2.24

Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase C^3, si N es una subvariedad lagrangiana para $\mathcal{L}^*\Omega$ entonces N es localmente invariante por el flujo φ_t^L sí y solo sí H es constante en N

.

Por ejemplo, en el caso Riemanniano:

Si M es una variedad Riemanniana tenemos el lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ definido por

$$L(x, v) = \langle v, v \rangle_x = \| v \|_x^2$$

Su hamiltoniano correspondiente $H : TM \to \mathbb{R}$ es

$$H(x,v)=L_v(x,v)v-L(x,v)$$

$$H(x,v)=2\|v\|^2-\|v\|^2=\|v\|^2$$

Sea $H(SM)=1$ donde $SM=\{(x,v)\in TM,\ \|v\|=1\}$ es invariante por φ_t^L, que es el flujo geodésico.

En el caso de Lagrangianos Mecánicos.

Consideremos el péndulo, el Lagrangiano mecánico $L:S^1\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es de la forma

$$L(\theta,\dot{\theta})=\frac{\dot{\theta}^2}{2}+\cos\theta$$

Sea $p=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\dot{\theta}$

Su hamiltoniano correspondiente H es

$$\begin{aligned}H(\theta,p)&=L_p(\theta,p)\,p-L(\theta,p)\\&=\frac{p^2}{2}-\left(\frac{p^2}{2}+\cos\theta\right)\end{aligned}$$

$$H(\theta,p)=\frac{p^2}{2}-\cos\theta$$

El sistema asociado al campo de Hamiltoniano será:

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\dfrac{\partial H}{\partial p}=p\\[2mm]\dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial\theta}=-(-(-sen\theta))=-sen\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\theta}=p\\\dot{p}=-sen\,\theta\end{cases}$$

Consideremos ω una forma simpléctica en $S^1\times\mathbb{R}$ tal que

$$\omega=d\theta\wedge dp$$

Entonces la 1-form a $\omega(\theta, p)\left(a_1 \frac{\partial}{\partial\theta} + a_2 \frac{\partial}{\partial p}\right)(\cdot)$ queda dada por

$$\omega(\theta, p)\left(a_1 \frac{\partial}{\partial\theta} + a_2 \frac{\partial}{\partial p}\right)\left(b_1 \frac{\partial}{\partial\theta} + b_2 \frac{\partial}{\partial p}\right) = d\theta \wedge dp\left(a_1 \frac{\partial}{\partial\theta} + a_2 \frac{\partial}{\partial p}\right)\left(b_1 \frac{\partial}{\partial\theta} + b_2 \frac{\partial}{\partial p}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\, b_2 - a_2\, b_2$$

$$= a_1\, dp - a_2\, d\theta$$

Como $DH(\theta, p) = p\, dp + sen\theta\, d\theta$ y $\omega(X_H, \cdot) = DH$ tenemos

$$p\, dp + sen\theta\, d\theta = a_1\, dp - a_2\, d\theta$$
$$a_1 = p \quad \wedge \quad a_2 = -sen\theta$$

El campo Hamiltoniano será:

$$X_H(\theta, p) = p\, \frac{\partial}{\partial\theta} - sen\theta\, \frac{\partial}{\partial p}$$

Es decir que obtuvimos es campo que define el sistema hamiltoniano.

Como H es constante en las orbitas del campo y las orbitas están confinadas en niveles de energía H.

$$H(\theta, p) = c$$
$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2} - \cos\theta = c$$

Luego

$$\frac{p^2}{2} - \cos\theta = c$$

$$p = \pm\sqrt{2(c + \cos\theta)}$$

CONCLUSIONES

1. En esta tesis, hemos presentado toda la teoría relacionada con lagrangianos convexos.
2. Los Lagrangianos y Hamiltonianos, definen un flujo y bajo ciertas condiciones para la transformada de Legendre, se demostró un aconjugación entre estos flujos.
3. Con todo lo presentado, se demuestra que dado ω, 1-forma cerrada en M, si H es constante sobre el gráfico $Graf(\omega) = \{(x, \omega_x) \ / \ x \in M\}$, entonces este gráfico es invariante por el flujo hamiltoniano.
4. Esta tesis entrega también herramientas para el estudio de los conjuntos Aubry-Mather, ésta teoría describe conjuntos de medidas invariantes que minimizan la acción y su relación con la dinámica de *L*.

BIBLIOGRAFÍA

[1] V. L. Arnold, *Métodos matemáticos en mecánica clásica* (1999)

[2] N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques.* Hermann, Paris, 1976. *Fonctions d' une variable réelle*, *Théorie élémentaire*, Nouvelle édition.

[3] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson Éditeur, Paris (1983).

[4] M. J. Carneiro, *On minimizing measures of the action of autonomous Lagrangians*, Nonlinearity 8, N° 6, 1077-1085 (1995).

[5] M. J. Carneiro, A. Lopes, *On the minimal action function of autonomous lagrangians associated to magnetic fields*, Annales de l'I. H. P., section C, tome 16, N.6, 667-690, (1999).

[6] G. Contreras, J. Delgado, R. Iturriaga, *Lagrangian Flow: The dynamics of globally minimizing orbits*- II, Bol. Soc. Brasil. Mat., V. 28, N. 2, 155-196, (1997).

[7] G. Contreras, R. Iturriaga, *Global Minimizers de Autonomous Lagrangians*, CIMAT, México, (2000).

[8] A. Fathi, *Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics*. Lyon, Versión 17 octubre 2003.

[9] P. Fernandez, *Medidas e Integração*, Rio de Janeiro, IMPA-CNP$_q$ (1976).

[10] E. L. Lima, *Curso de Análise volume 2*, Rio de Janeiro IMPA-CNP$_q$ (1981).

[11] J. Mather, *Actión minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems*, Math. Z. 207, N° 2, 169-207, (1991).

[12] R. Mañé, *Variational methods on conservative dynamics*, Colóquio Brasileiro de matemática, IMPA-CNP$_q$ (1993).

[13] R. Mañé, *On the minimizing measures of lagrangian dynamics systems*, Nonlinearity 5, N° 3, 623-638 (1992).

[14] R. Mañé, *Teoria Ergódica*, Rio de Janeiro IMPA-CNP$_q$ (1983).

[15] J. C. Oxtoby, *Ergodic Sets*, Bull. Amer. Math. Soc., 116-136, (1952).

[16] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinária*, Rio de Janeiro IMPA-CNP$_q$.